

---

---

## Section 3. Decision Making

---

---

### 3.1. Actual Problems of Decision Making

#### О ПРОБЛЕМАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

**Алексей Ф. Волошин**

**Аннотация:** *Анализируются причины ограниченной применимости моделей принятия решений в социально-экономических системах. Предлагаются 3 основных принципа повышения их адекватности – «локализация» решений, непосредственный учет влияния субъекта на процесс принятия решений («субъективизация объективности») и уменьшение влияния индивидуальных психосоматических характеристик субъекта («объективизация субъективности»). Принципы иллюстрируются на математических моделях принятия решений в эколого-экономических и социальных системах.*

**Ключевые слова:** *принятие решений, эколого-экономические и социальные системы, последовательный анализ вариантов, нечеткий анализ, методы экспертного оценивания, коллективное принятие решений, системы поддержки принятия решений.*

---

#### Введение

---

Во второй половине XX столетия появилось большое количество математических моделей эколого-экономических и социальных процессов [1], успех применения которых, однако, несравним с практическими достижениями в применении моделей «неживой природы». Экономические, политические, техногенные и экологические кризисы характерны как отдельным странам, регионам, политико-экономическим системам, так и всему человечеству в целом. Проникая в глубины Вселенной, раскрывая тайны микромира современная цивилизация не в состоянии предотвратить военные конфликты (за 5500 лет современной истории человечество жило без войн всего 292 года), накормить голодных (с 6.4 млрд. живущих людей голодают 800 млн., хотя продуктов питания производится на 20% больше необходимого), предотвратить террористические акции, нерешенные экологические проблемы угрожают самому существованию человечества.

Возникает естественный вопрос – почему современные достижения теории принятия решений применяются в практике моделирования экономико-социальных процессов очень ограничено? Ответ очевиден – потому что они имеют очень низкую «адекватность» реальному миру, очень высокую степень неопределенности результата, более того, зачастую этот результат является «бессмысленным» (т.е. в принципе непроверяемым). Причем это относится как к нормативным математическим моделям экономико-социальных процессов (которые отвечают на вопрос «что нужно делать, чтобы достичь желаемое?»), так и позитивным (которые отвечают на вопрос «почему имеем то, что имеем?» и, в лучшем случае, «что будет?»).

В рамках существующей парадигмы разработки и анализа эколого-экономических и социальных процессов для преодоления указанных недостатков необходимо, во-первых, учитывать как можно большее количество факторов, которые влияют на процесс принятия решений (что ведет к «проклятию

размерности»), во-вторых, учитывать неточность и нечеткость значений параметров модели (а нередко и их полное отсутствие), которые связаны как с «объективной неопределенностью» [2] (которая присуща самой организации нашего мира), так и с «субъективной неопределенностью» (которая характерна человеческой природе в целом). Стандартные подходы, ориентированные на разработку алгоритмов, которые гарантируют сходимость (в классическом понимании) к точному решению, не столько решают поставленные проблемы, сколько создают иллюзию их решения. Проблема же состоит не в нахождении с любой степенью точности решения задачи (при неточных данных!), а его «локализации» [3] - в определении интервалов изменения компонент решения (которые зависят, конечно, от точности вычисления данных). В идеале желательно достичь максимальной локализации решения – минимальных (в некоторой метрике) интервалов неопределенности решения. И если такой подход в естественных науках (вспомним «принцип неопределенности» Гейзенберга [4]), давно уже стал естественным, то при моделировании социально-экономических процессов он не нашел широкого применения. И это при условии, что субъект является их активной компонентой! Все особенности субъективного восприятия выбора принятия решения в «классическом» подходе «загоняются» в аксиомы и задача исследователя сводится к тестированию их «реальности» [5]. Здесь априори принимается, что «реальность» гипотезы означает ее «реальность» для каждого субъекта в любой момент времени (или в достаточно продолжительном интервале времени). Не нашли применения в современной математической экономике и принципы теории группового мышления, которые с начала 70-х годов прошлого века успешно используются в принятии военно-политических решений [6]. Осознание необходимости использования субъективных особенностей в принятии решений в экономике привело к появлению в 90-х годах XX столетия «ситуативной экономики». Возникновение в 60-х годах прошлого века «нечеткого анализа» [7] также является подтверждением необходимости (а, зачастую, и «единодоступности») непосредственного использования субъекта при построении социально-экономических моделей (значение «функции принадлежности» нечеткого множества может интерпретироваться как «субъективная вероятность»).

Таким образом, при построении математических и информационных моделей социально-экономических процессов возникают две проблемы – «субъективизация объективности» (непосредственный учет влияния субъекта на процесс принятия решения) и «объективизация субъективности» (уменьшение влияния индивидуальных характеристик субъекта) - учет его «объективных» психосоматических особенностей познания действительности). «Субъективизация объективности», в свою очередь, приводит к необходимости использования при построении и исследовании моделей теории нечеткого анализа, теории группового мышления, разработки локализирующих решения алгоритмов. «Объективизация субъективности» в моделях может осуществляться на основе социально-психологических дисциплин, например, путем учета принадлежности субъекта к одному из соционических типов, склонности к риску, степени независимости и т.п. [8]. В свою очередь, для увеличения степени объективизации целесообразно использовать описание субъекта в нечетком виде, в идеале «объективизация» субъекта должна «накладываться» на «субъективизированное» описание объекта.

Предложенные принципы иллюстрируются ниже на теоретических и прикладных моделях задач принятия решений в социально-экономических системах.

### Модели анализа статических балансовых эколого-экономических моделей большой размерности

Рассматривается статическая балансовая модель Леонтьева — Форда в такой постановке [9]:

$$\begin{cases} x_i^1 = \sum_{p \in I} a_{ip}^{11} x_p^1 + \sum_{q \in J} a_{iq}^{12} x_q^2 + y_i^1, \\ x_j^2 = \sum_{p \in I} a_{jp}^{21} x_p^1 + \sum_{q \in J} a_{jq}^{22} x_q^2 - y_j^2, \\ i \in I, j \in J; \quad x^1 > 0, x^2 \geq 0; \end{cases} \quad (1)$$

где  $x^{1T} = (x_i^1)_{i \in I}$  — вектор объемов производства продукции,  $x^{2T} = (x_j^2)_{j \in J}$  — вектор объемов уничтожения загрязнителей,  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $J = \{1, 2, \dots, m\}$  — множества индексов переменных соответственно “экономической” и “экологической” составляющих модели,  $T$  — знак транспонирования;  $A_{11} = \|a_{ji}^{11}\|_{i \in I}^{j \in I}$  — квадратная матрица нормативных коэффициентов затрат продукции  $j$  при производстве единицы продукции  $i$ ,  $A_{12} = \|a_{ij}^{12}\|_{j \in J}^{i \in I}$  — прямоугольная матрица нормативных коэффициентов затрат продукции  $i$  при уничтожении единицы загрязнителя  $j$ ,  $A_{21} = \|a_{ji}^{21}\|_{i \in I}^{j \in J}$  — прямоугольная матрица нормативных коэффициентов выброса загрязнителя  $j$  при производстве единицы продукции  $i$ ,  $A_{22} = \|a_{ji}^{22}\|_{i \in I}^{j \in J}$  — квадратная матрица нормативных коэффициентов выброса загрязнителя  $j$  при уничтожении единицы загрязнителя  $i$ ,  $a_{ij} \in [0; 1]$ ,  $y^{1T} = (y_i^1)_{i \in I}$  — вектор объемов конечной продукции,  $y^{2T} = (y_j^2)_{j \in J}$  — вектор объемов загрязнителей, которые не уничтожаются,  $y_i^1 > 0$ ,  $i \in I$ ,  $y_j^2 \geq 0$ ,  $j \in J$ .

$X = \prod_{i \in I} X_i^1 \times \prod_{j \in J} X_j^2$  — гиперпараллелепипед решений задачи, который учитывает содержание ограничений экономических и экологических составляющих:

$$X_i^1 = \begin{cases} [d_{i(H)}^1, d_{i(B)}^1], & i \in I^{(H)}, \\ \{d_{i(H)}^1, d_{i(H)+1}^1, \dots, d_{i(B)}^1\}, & i \in I^{(Ц)} = I \setminus I^{(H)}, \end{cases} \quad (2)$$

$$X_j^2 = \begin{cases} [d_{j(H)}^2, d_{j(B)}^2], & j \in J^{(H)}, \\ \{d_{j(H)}^2, d_{j(H)+1}^2, \dots, d_{j(B)}^2\}, & j \in J^{(Ц)} = J \setminus J^{(H)}, \end{cases} \quad (3)$$

де  $d_{i(H)}^1$ ,  $d_{i(B)}^1$  и  $d_{j(H)}^2$ ,  $d_{j(B)}^2$  — границы (верхняя и нижняя соответственно) переменных  $x_i^1$  и  $x_j^2$  соответственно,  $d_{i(B)}^1 \geq d_{i(H)}^1 \geq 0$ ,  $d_{j(B)}^2 \geq d_{j(H)}^2 \geq 0$  (в случае целочисленной постановки задачи (1)  $d_{i(H)}^1$ ,  $d_{i(B)}^1$  и  $d_{j(H)}^2$ ,  $d_{j(B)}^2$  считаются целыми), индексы (H) и (Ц) делят множество индексов на множества индексов соответственно непрерывных и целочисленных переменных. Если начальные границы не заданы, тогда  $d_{i(H)}^1$  и  $d_{j(H)}^2$  считаются нулями, а  $d_{i(B)}^1$  и  $d_{j(B)}^2$  выбираются достаточно большими (исходя из экономических соображений).

В основе методов, которые предлагаются для преодоления указанных во вступлении трудностей, которые возникают при анализе моделей (1-3) большой размерности, лежат схемы последовательного анализа вариантов [10-15]. Основу алгоритма решения задач (1-3) составляет процедура WB [16] аппроксимации множества  $D$  решений гиперпараллелепипедом  $X^*$  таким, что  $X \supseteq X^* \supseteq D$ .

Аналитическая оценка эффективности процедуры WB имеет следующий вид. Пусть  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ , — относительные ошибки приближения величин  $Q^{1(k)}$  и  $Q^{2(k)}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , к границам

$$Q^{1*} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( y_{\min}^1 \sum_{s=0}^k \lambda_1^s \right) = y_{\min}^1 \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^k \lambda_1^s = \frac{y_{\min}^1}{1 - \lambda_1}, \quad Q^{2*} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( y_{\min}^2 \sum_{s=0}^{k-1} \lambda_2^s \right) = y_{\min}^2 \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^{k-1} \lambda_2^s = \frac{y_{\min}^2}{1 - \lambda_2}.$$

$$\text{Тогда } k_1 \leq \frac{\log_2 \varepsilon_1}{\log_2 \lambda_1} + 1, \quad k_2 \leq \frac{\log_2 \varepsilon_2}{\log_2 \lambda_2} + 1, \quad \text{где } \lambda_1 = \min_{i \in I} \frac{\sum_{p \in I, p \neq i} a_{ip}^{11}}{1 - a_{ii}^{11}}, \quad \lambda_2 = \min_{j \in J} \frac{\sum_{q \in J, q \neq j} a_{jq}^{22}}{1 - a_{jj}^{22}}.$$

Пусть  $L = ((n+m)^2 + 3(n+m)) \log_2 a$  — длина входа задачи (1),  $a = \max |\log_2 a_{ij}| + 1$ , тогда относительная ошибка решения  $\max \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = \varepsilon \geq 2^{-L}$ .

Количество элементарных операций  $M$  процедуры WB имеет порядок  $M = O(L)$ , а вычислительная трудоемкость оценивается [17]:  $N = O(Mk) = O\left(-\frac{L^2}{\log_2 \lambda}\right)$ , где  $k \leq \frac{\log_2 \varepsilon}{\log_2 \lambda} + 1$ ,  $\lambda = \min \{\lambda_1, \lambda_2\}$ . При

отсутствии начальных ограничений  $d_{i(H)}^{1(0)}$ ,  $d_{i(B)}^{1(0)}$ ,  $i \in I$ ,  $d_{j(H)}^{2(0)}$ ,  $d_{j(B)}^{2(0)}$ ,  $j \in J$ , для процедуры WB можно

положить:  $d_{i(H)}^{1(0)} = \frac{y_{\min}^1}{1 - \lambda_1}$ ,  $i \in I$ ,  $d_{j(H)}^{2(0)} = \frac{y_{\min}^2}{1 - \lambda_2}$ ,  $j \in J$ ,  $d_{i(B)}^{1(0)} = \frac{y_{\max}^1}{1 - \bar{\lambda}_1}$ ,  $i \in I$ ,  $d_{j(B)}^{2(0)} = \frac{y_{\max}^2}{1 - \bar{\lambda}_2}$ ,

$$j \in J, \quad \text{где } y_{\max}^1 = \max_{i \in I} y_i^1, \quad \bar{\lambda}_1 = \max_{i \in I} \frac{\sum_{p \in I, p \neq i} a_{ip}^{11}}{1 - a_{ii}^{11}}, \quad y_{\max}^2 = \max_{j \in J} \{A_{21} y^1 - y^2\}, \quad \bar{\lambda}_2 = \max_{j \in J} \frac{\sum_{q \in J, q \neq j} a_{jq}^{22}}{1 - a_{jj}^{22}}.$$

Подробные результаты вычислительного эксперимента по процедуре WB приведены в [18] (ПЭОМ с тактовой частотой процессора 266 МГц, процент экологической составляющей  $\frac{m}{m+n} \cdot 100 = 5\%$ ).

Эффективность использования вычислительной процедуры определяется временем, потраченным на вычисление, и точностью результата. При относительной ошибке с точностью до шестого знака и размерности задачи  $m+n=1000$  время для решения непрерывной и целочисленной задачи составляет порядка 30 мин. Поскольку при увеличении размерности задачи удельный вес ненулевых элементов уменьшается, представляет практический интерес модификация процедуры WB на случай разреженных матриц [18]. При приведенной относительной ошибке и размерности порядка 10000 при заполнении матриц на 1% время для непрерывной целочисленной задачи составляет порядка 10 мин.

## Нечеткие и многокритериальные модели

«Субъективизация объективности» предполагает активное участие субъекта в принятии решения, учет в моделях социально-экономических процессов субъективной компоненты. Рассмотрим два основных способа реализации этого принципа – нечеткость (на примере статической модели Леонтьева [1]) и многокритериальность (на примере задачи коллективного принятия решений [21]).

Рассмотрим модель Леонтьева  $x = Ax + y$ ,  $x \geq 0$ . Объем конечного потребления, как правило, задается в виде гиперпараллелепипеда  $Y = \Pi[y_j^-, y_j^+]$ , где  $y_j^-$  – нижняя „норма” потребления  $j$ -го продукта,  $y_j^+$  – верхняя. Более того, логично (и, как правило, так и делается) на интервале  $I_j = [y_j^-, y_j^+]$  задается „функция принадлежности”  $\mu_{ij}$  в виде экспертных рекомендаций по объему потребления  $j$ -го продукта. Аналогично для модели Леонтьева-Форда логично задавать нижние и верхние „нормы” объемов неуничтоженных загрязнителей, то есть задавать гиперпараллелепипед  $Y^2 = \Pi[y_j^-, y_j^+]$ . Тогда и решение моделей  $x \in X$  логично находить, учитывая пожелания экспертов, в виде функции принадлежности  $\mu_x$ .

Для модели Леонтьева (для модели Леонтьева-Форда построения аналогичные) необходимо найти  $x \in \{x: x = Ax + y, x \in X, y \in Y\}$  при заданных функциях принадлежности  $\mu_x, \mu_y$ . Запишем нечеткое множество в виде:  $X \sim = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha X_\alpha$ , де  $X_\alpha = \{x | \mu_x(x) \geq \alpha\}$ .

По определению функция принадлежности нечеткого множества  $\alpha A$  задается как:  $\mu_{\alpha A}(a) = \begin{cases} \alpha, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$ .

Аналогично  $Y \sim = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha Y_\alpha$ . Основное предположение, которое накладывается на решение нечеткой модели Леонтьева, состоит в следующем:  $x \in X_\alpha$  тогда и только тогда, когда  $x - Ax \in Y_\alpha$

Рассмотрим кусочно-линейные функции принадлежности, тогда:

$$X_\alpha = \prod_{k=1}^n [x_k^-(\alpha), x_k^+(\alpha)] = \prod_{k=1}^n I_\alpha(x_k), \quad X_\alpha^\pm(\alpha) = x_\alpha^\pm(0)(1-\alpha) + x_\alpha^\pm(1) \cdot \alpha, \quad \mu_X(x) = \prod_{k=1}^n \mu_i(x_k).$$

Обозначим:  $AX = \{Ax \mid x \in X\}$ ,  $X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$ .

Учитывая, что  $(AX)_\alpha = AX_\alpha$  и аддитивность процедуры WB, вычисления границ гиперпараллелепипеда для каждого значения  $\alpha$  ведется независимо по формуле:

$$AX = \prod_j \left[ \sum_{j, a_{ij} > 0} a_{ij} x_j^- + \sum_{j, a_{ij} < 0} a_{ij} x_j^+; \sum_{j, a_{ij} > 0} a_{ij} x_j^+ + \sum_{j, a_{ij} < 0} a_{ij} x_j^- \right].$$

При применении описанного выше подхода к задаче с нечеткими данными имеем:

1. Решения нечеткой задачи сводится к решению  $p$  (по количеству  $\alpha$  - уровней) обычных задач Леонтьева, которые решаются независимо;
2. Решением нечеткой задачи будем считать нечеткое множество с функцией принадлежности, образованной линиями уровня для каждой компоненты решения этих  $p$  задач;
3. Алгоритм последовательного анализа вариантов не ухудшает параметры решения: „неопределенность” решения нечеткой задачи будет „не большей” неопределенности начальных данных.

Предложенный подход применим и в случае нечеткой матрицы нормативных коэффициентов.

Наиболее общая постановка задачи принятия коллективного решения, имеющая многочисленные приложения в экономике, политике и других областях человеческой деятельности, связанных с анализом и разрешением конфликтов, сводится к следующей математической модели:

$$U_i(x) \rightarrow \max, \quad i \in I, \quad x \in \prod X_i, \quad (4)$$

где:  $U_i$  - функция полезности  $i$ -го субъекта (агента),  $X_i$  - множество его стратегий, набор стратегий  $x$  называется ситуацией.

В отличие от классической постановки игровой задачи, в которой стратегии выбираются игроками (агентами) одновременно и независимо, в общем случае игроки могут договариваться об очередности ходов, о совместном выборе стратегии и т.п. Наиболее распространенным принципом оптимального поведения («принципом оптимальности») в задаче (4) считается «равновесие Нэша» [19], в котором индивидуальные отклонения игроков от стратегий, входящих в эту ситуацию, не увеличивают выигрыша отклонившегося игрока при условии, что остальные игроки придерживаются зафиксированных в этой ситуации стратегий. Выделение ситуаций равновесия в качестве претендента на оптимальное поведение достаточно естественно, однако ситуации равновесия могут обладать рядом свойств, затрудняющих их практическое применение. В первую очередь – это неединственность, причем разные ситуации равновесия предпочтительны разным игрокам. В [19] выделяются два критерия выбора единственного равновесия – доминирование по выигрышу и доминирование по риску. В тех случаях, когда доминирование по выигрышу и доминирование по риску имеют различные направления, авторы [19] отдают приоритет доминированию по выигрышу. Однако на практике представляется разумным учитывать психосоматические особенности агентов – в данном случае «склонность к риску» [25]. В общем случае логично рассматривать многокритериальный выбор с учетом двух приведенных критериев. С целью «субъективизации» модели (4) целесообразно рассматривать не скалярные функции полезности  $U_i$ , а векторные [20,21], и применять свертки, зависящие от психосоматических особенностей лица, принимающего решение (ЛПР). Поскольку в абсолютном большинстве случаев значения функций полезности есть результат экспертной оценки, то представляет практический интерес рассмотрение нечетких постановок задачи (4) [22].

---

### Методы экспертного оценивания

---

В данном разделе рассмотрим возможность совместного использования принципов локализации и субъективизации модели для задачи экспертного оценивания [23].

Исследования в области получения непосредственной непротиворечивой информации от эксперта о численных значениях весовых коэффициентов критериев показывает, что эксперт или ЛПР могут адекватно определять весовые коэффициенты в случае, когда количество параметров объектов не превышает «магического» числа 5-9 [24]. Если же объекты характеризуются большим количеством параметров, необходимо применение косвенных методов, в которых отношения предпочтения последовательно уточняются на основе принятых ранее решений (интервалы относительной важности объектов «локализируются»).

Пусть  $A$  – множество объектов  $a^j$ ,  $j \in J$ . Каждый из объектов  $a^j$  характеризуется набором параметров  $a^j = (a_{ij})$ ,  $i \in I$ . Объекту  $a^j$  необходимо поставить в соответствие векторную оценку в  $R^n$ , определяемую набором критериев, по которым ЛПР оценивает объекты.

Рассмотрим два объекта  $a^1$  и  $a^2$  из множества эффективных объектов  $A$ . Объект  $a^1$  считается «лучшим», чем объект  $a^2$ , если сумма взвешенных отклонений параметров от их оптимальных значений у объекта  $a^1$  меньше, чем у  $a^2$ , т.е.

$$\sum_i \rho_i \omega(a_i^1) < \sum_i \rho_i \omega(a_i^2), \quad (5)$$

где  $\rho$  – нормированный вектор относительной важности параметров объектов для утверждения ЛПР об отношении предпочтения между объектами;  $\omega(a_i^j)$  – некоторое монотонное преобразование, определяющее степень отклонения от оптимального значения параметра и преобразующее все значения параметров к безразмерному виду в интервале  $[0, 1]$ .

На основе метода локализации решений [3] предлагаются процедуры вычисления интервалов  $[\rho_i^H, \rho_i^G]$ , сохраняющих отношение (5). Разработано программное обеспечение, которое в режиме реального времени позволяет решать задачи с 50 объектами.

---

### Системы поддержки принятия решений

---

Методы оценки развития социально-экономических процессов, в основе которых лежит «продолжение прошлого», позволяет получить прогноз, как правило, с очень высокой степенью неопределенности, поскольку в них «законсервированы» прошлые опыт, знания, действия субъектов этих процессов. Желание максимально приблизить субъективные восприятия к действительности приводит, во-первых, к необходимости использования экспертной информации в данный момент времени, во-вторых, сложность моделируемых процессов не позволяет использовать непосредственные знания эксперта в более-менее широких областях. Поэтому возникает проблема создания «гибких» систем принятия решений, настраивающихся на конкретную предметную область, требующих узкопрофессиональных, «локальных» знаний, которые, естественно, будут слабоструктурированными, нечеткими, размытыми. «Объективизация» таких форм знаний возможна путем учета психосоматических особенностей эксперта и его предыдущего опыта.

Одним из наиболее адекватно моделирующих процесс принятия решений человеком общепризнано является метод дерева решений [25], однако его применение затруднено «проклятием размерности», возникающей при его использовании. Поэтому необходима разработка специальных методов обработки дерева решений [8].

На основе вышеизложенных концепций разработана инструментальная система создания прикладных систем поддержки принятия решений (СППР) в различных областях. Построение прикладной СППР сводится к выделению экспертами проблем и подпроблем (вершин дерева) и связей между ними (дуг дерева). Экспертами далее определяются веса (вероятности) переходов между вершинами. Допускаются нечеткие оценки экспертов с помощью логических переменных, описываемых значениями функции принадлежности (векторами действительных чисел от 0 до 1). Каждый эксперт задает три оценки –

оптимистическую, реалистическую и пессимистическую, скаляризация которых осуществляется с учетом психологического типа эксперта. Тип определяется на основании психологических тестов, заложенных в систему. На основе психологических тестов определяются также коэффициенты «правдивости», «независимости», «осторожности» и т.д. [8].

Дерево строится на основе коллективных оценок экспертов с применением метода попарных сравнений. Для построения результирующего дерева применяются алгебраические методы обработки экспертной информации, в качестве расстояния между ранжировками применяется метрика Хемминга и мера несовпадений рангов объектов. Результирующее дерево определяется как медиана Кемени-Снелла:

$$\mathop{\text{Arg min}}_A \sum_{i=1}^n d(A, A^i) \text{ или как компромисс: } \mathop{\text{Arg min}}_A \max_i d(A, A^i),$$

где  $A^i$  - матрица, задаваемая  $i$ -м экспертом, в которой элемент  $a_{ij} = 1$  тогда и только тогда, когда  $i$ -я вершина предпочтительнее для эксперта  $j$ -ой,  $a_{ij} = -1$ , для равноценных объектов  $a_{ij} = 0$ ,  $a_{ji} = 0$ .

В случае задания преимущества в нечеткой форме элементы матрицы задаются через функции принадлежности.

Для определения оптимальных путей в дереве предлагаются алгоритмы последовательного анализа вариантов [10-15], позволяющие обрабатывать деревья с сотнями вершин.

Дерево решений задается таблицами. Каждая таблица – это отдельный уровень дерева, каждая строка таблицы – отдельная вершина на этом уровне. Каждый элемент строки – это вероятность, с которой возможен переход из данной вершины в вершину нижнего уровня. Эти вероятности задаются функциями принадлежности, представляющие собой вектора действительных чисел от 0 до 1 любой длины. Таблица заполняется путем опроса экспертов. Существующие функции позволяют добавлять столбцы, строки, задавать словарь (который позволяет вербальным оценкам эксперта ставить в соответствие вероятности, путем задания определенных уровней), сохранять таблицы в файле, считывать таблицы из файла.

Экспертным путем задаются матрицы – результат сравнения вариантов вершин, которые могут быть включены в дерево. На основе анализа матриц определяются вершины, которые включаются в дерево и вероятности, с которыми возможен переход в них из вершин верхнего уровня. Если дерево решения декомпозируется на несколько поддеревьев, которые имеют одинаковые листья, вначале вычисляются вероятности этих листьев в каждом из них, а затем находятся вероятности для всего дерева в целом.

Созданы ряд прикладных систем – прогнозирование курса валют, опосредованного расчета валового национального продукта, диагностики сердечно-сосудистых заболеваний, прогнозирование индекса инфляции и др.

## Библиография

1. Леонтьев В.В. Межотраслевая экономика. - М.: Экономика, 1997. - 479 с.
2. Нариньяни А.С. Неточность как Не - фактор. Попытка доформального анализа. – Москва – Новосибирск, 1994. Препринт РосНИИ ИИ, №2. - 34с.
3. Волошин А.Ф. Метод локализации области оптимума в задачах математического программирования // Доклады АН СССР. - 1987. - Т. 293, № 3. - С. 549–553.
4. Орир Дж. Физика. - М.: Мир, 1981, том 2. - 288с.
5. Nikolson W. Microeconomic theory. -The DRYDEN PRESS, 1998. -821 p.
6. Janis I.L. Groupthink//Psychology Today, 1971. -P.43-46.
7. Орловский С.Г. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. - М.: Наука, 1981.
8. Voloshin O.F., Panchenko M.V. The System of Quality Prediction on the Basis of a Fuzzy Data and Psychography of the Experts// "Information Theories & Applications", 2003, Vol.10, №3.-P. 261-265.
9. Леонтьев В.В., Форд Д. Межотраслевой анализ воздействия структуры экономики на окружающую среду // Экономика и математические методы. - 1972. - т. VIII, вып. 3. - С. 370–400.
10. Михалевиц В.С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение // Кибернетика. - 1965. - № 1. - С. 45–55; -№2. - С.85-89.
11. Волкович В.Л., Волошин А.Ф. Об одной схеме последовательного анализа и отсеивания вариантов // Кибернетика. - 1978. - № 4. - С. 98–105.

12. Михалевич В.С., Волкович В.Л., Волошин А.Ф. Метод последовательного анализа в задачах линейного программирования большого размера // Кибернетика. - 1981. - № 4. - С. 114–120.
13. Волошин О.Ф., Мащенко С.О., Охрименко М.Г. Алгоритм послідовного аналізу варіантів для розв'язання балансових моделей // Доповіді АН УРСР. - 1988. - Сер. А, № 9. - С. 67–70.
14. Волкович В.Л., Волошин А.Ф. и др. Методы и алгоритмы автоматизированного проектирования сложных систем управления. - К.: Наукова думка, 1984. - 216 с.
15. Волкович В.Л., Волошин А.Ф. и др. Модели и методы оптимизации надежности сложных систем. - К.: Наукова думка, 1993. - 312с.
16. Волошин О.Ф., Чорней Н.Б. Алгоритм послідовного аналізу варіантів для розв'язання міжгалузевої моделі Леонтьева-Форда // Вісник Київського університету. - 1999. - Сер. фіз. - мат. н., № 1.
17. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. - М.: Мир, 1985. - 510 с.
18. Волошин А.Ф. Методы анализа статических балансовых эколого-экономических моделей большой размерности // Киевский национальный университет им. Т. Шевченко, «Научные записки», 2004, Том. VII. - С. 43-55.
19. Харшаньи Дж., Зельтен Р. Общая теория выбора равновесия в играх. - Санкт-Петербург: «Экономическая школа», 2001. - 406с.
20. Мащенко С.О. Равновесие Нэша в многокритериальной игре // Вестник Киевского университета, 2001, №3. - С. 214-222.
21. Волохова О.В. Задача коллективного принятия решений с векторными функциями полезности // Труды школы-семинара «Теория принятия решений», Ужгород, 2004. - С. 14.
22. Мащенко С.О. Равновесие Нэша в нечетких играх // Вестник Киевского уни-та, 2004, №2. - С. 204-212.
23. Волошин А.Ф., Гнатиенко Г.Н. Метод косвенного определения интервалов весовых коэффициентов параметров объектов // Проблемы управления и информатики, 2003, №2. - С. 34-41.
24. Тоценко В.Г. Методы и системы поддержки принятия решений. - Киев: Наукова думка, 2002. - 382с.
25. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений. - М.: Логос, 2000. - 296с.

---

### Информация об авторе

---

**Волошин Алексей Федорович** – Киевский национальный университет им. Т. Шевченко, факультет кибернетики, профессор. Киев, Украина. e-mail: [ovoloshin@unicyb.kiev.ua](mailto:ovoloshin@unicyb.kiev.ua)

## ОПТИМАЛЬНАЯ ТРАЕКТОРИЯ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА ОТКРЫТОЙ ЭКОНОМИКИ

**Игорь Ляшенко, Елена Ляшенко**

**Аннотация:** Дано обобщение классических качественных результатов магистральной теории на случай оптимизационной модели динамического межотраслевого баланса для открытой экономики, когда экспорт и импорт оказываются связанными с выпуском основной продукции, а целевой функционал представляет конечное состояние экономики.

**Ключевые слова:** Динамический межотраслевой баланс, оптимизационная задача, магистральная теория, открытая экономика, траектория сбалансированного роста.

Основные трудности при практическом применении многоотраслевых моделей экономической динамики связаны с большой размерностью оптимизационных задач линейного программирования. В связи с этим возник интерес специалистов к качественным методам исследования оптимальных траекторий.

На этом пути были получены интересные результаты, касающиеся создания так называемой *магистральной теории*. Одним из наиболее красивых результатов в теории расширяющейся экономики является теорема, принадлежащая Дорфману, Самуэльсону и Солоу [Dorfman, 1958] и утверждающая, что эффективная траектория экономического роста имеет долгосрочную тенденцию приближаться к



неймановскому пути устойчивого сбалансированного роста. После публикации книги Дорфмана, Самуэльсона и Солоу [Dorfman, 1958] были установлены теоремы о магистрали Хиксом, Моришимой и Мак-Кензи – для модели фон Неймана-Леонтьева; Раднером и Никайдо – для модели фон Неймана-Гейла со строго выпуклым множеством производственных процессов; Мак-Кензи – для обобщенной леонтьевской модели, включающей капитальные блага.

Основные понятия и следствия магистральной теории можно продемонстрировать на примере оптимизационной задачи для модели Неймана [Ашманов, 1984; Пономаренко, 1995]:

$$\begin{aligned} c_T x_T &\rightarrow \max, \\ Ax_t &\leq Bx_{t-1}, \quad x_t \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $A \geq 0$ ,  $B \geq 0$  – неотрицательные прямоугольные  $n \times m$  матрицы затрат и выпуска соответственно,  $Bx_0$  – заданный вектор,  $c_T > 0$  – заданный положительный вектор,  $x_t$  – вектор интенсивностей технологического процесса в промежутке времени  $t$ .

Стационарная траектория интенсивностей для модели Неймана ( $A$ ,  $B$ ) определяется темпом роста  $\alpha = \bar{\lambda}^{-1}$  и лучом Неймана  $\bar{x}$  и имеет вид  $x_t = \bar{\lambda}^{-t} \bar{x}$ , где  $\bar{\lambda} > 0$ ,  $\bar{x} > 0$  – единственное с точностью до скалярного множителя решение системы неравенств

$$A\bar{x} \leq \bar{\lambda} B\bar{x}. \quad (2)$$

Характерным является то, что магистраль  $\bar{x}$  оказывается малочувствительной к изменению коэффициентов целевого функционала  $c_T > 0$ , вследствие чего задача (1) сводится к следующей задаче Неймана

$$\lambda \rightarrow \min, \quad Ax \leq \lambda Bx, \quad x \geq 0. \quad (3)$$

Основной результат относительно минимального собственного значения  $\bar{\lambda} < 1$  модели Неймана (максимального темпа роста) формулируется в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.** Пусть неотрицательные матрицы  $A \geq 0$ ,  $B \geq 0$  такие, что матрица выпуска  $B$  не имеет нулевых строк, а матрица затрат  $A$  не имеет нулевых столбцов. Тогда неразложимая продуктивная модель Неймана (3) имеет единственный темп роста  $\bar{\lambda} < 1$  и магистраль  $\bar{x} > 0$ .

Здесь *неразложимость* модели Неймана понимается как невозможность путем одновременной перестановки строк и столбцов в матрицах  $A$  и  $B$  свести их к виду

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix},$$

где прямоугольные матрицы-блоки  $A_{11}$  та  $B_{11}$  имеют одинаковую размерность,  $0$  – нулевая матрица размерности больше 1. Неразложимость модели Неймана эквивалентна условию: число Фробениуса модели (3) простое, а вектор Фробениуса строго положительный.

*Продуктивность* модели Неймана понимается как существование решения системы неравенств

$$Bx - Ax \geq c, \quad x \geq 0$$

при любом  $c \in R_+^n$ . Продуктивность модели Неймана эквивалентна условию: число Фробениуса модели (3) меньше 1.

Одной из наиболее известных схем динамического межотраслевого баланса закрытой экономики является так называемая общая схема  $\pi$ -модели (детальная схема разработана Ю.П.Ивановым и А.А.Петровым [Иванов, 1971]):

$$\begin{aligned}
Ax_t + D\eta_t + L_t c &\leq x_t, \\
x_t &\leq \xi_{t-1}, \quad \xi_t \leq \xi_{t-1} + \eta_t, \\
lx_t &\leq L_t, \\
(x_t, \xi_t, \eta_t, L_t) &\geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T,
\end{aligned} \tag{4}$$

где индекс  $t$  – номер временного промежутка (года),  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  – совокупный запас товаров, технологические затраты каждой из  $n$  отраслей описываются матрицей Леонтьева  $A$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$  – совокупный максимально возможный валовой выпуск (мощности отраслей),  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$  – желаемое приращение мощностей, материальные затраты на приращение основных мощностей всех  $n$  отраслей описываются матрицей  $D$ ,  $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)^T$  – затраты трудовых ресурсов на единицу валового выпуска,  $L$  – общее количество нанятых рабочих,  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$  – вектор потребления на одного работающего (его натуральная заработная плата),  $\xi_0$  – основные мощности в начальный момент  $t=0$ .

Для модели (4) чаще всего используется терминальный критерий

$$c_T x_T \rightarrow \max, \tag{5}$$

где  $c_T > 0$ , что непосредственно связывается с максимальным темпом роста экономики.

Основной результат относительно существования магистрали для задачи (4) - (5) формулируется в виде следующей теоремы [Ашманов, 1984].

**Теорема 2.** Пусть  $\xi_0 > 0$ , матрица  $R = (c_i l_j)^n$ , матрица  $A+R$  неразложимая и продуктивная, матрица  $Q(\lambda) = \lambda(A + R) + (1 - \lambda)D$  примитивная. Тогда вектор  $(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{L})$ , где  $\lambda = \bar{\lambda} < 1$  и  $\bar{x} > 0$  соответственно число Фробениуса и правый собственный вектор матрицы  $Q(\bar{\lambda})$ , является магистралью для модели (4-5).

Нерешенным на сегодня является вопрос о расширении схемы (4)  $\pi$ -модели на случай открытой экономики, когда экспорт и импорт достигают таких больших объемов, что отказ от них приводит к ситуации невозможности экономического развития. Следующим вопросом становится вопрос о существовании магистрали развития открытой экономики, как это показано для случая закрытой экономики. Разрешению этих двух вопросов и посвящается данная статья.

Для открытой экономики, имеющей экспорт и импорт в больших объемах, ниже предлагается выделить экспортирующие отрасли (первая группа отраслей) и импортирующие отрасли (вторая группа отраслей), а на векторы экспорта  $e_1(t)$  и импорта  $i_2(t)$  наложить производственные ограничения на их объемы. Предлагается следующая модель:

$$\begin{aligned}
c_1^T x_1(T) + c_2^T x_2(T) &\rightarrow \max, \\
A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + D_{11}\eta_1(t) + D_{12}\eta_2(t) + c_1L(t) + e_1(t) &\leq x_1(t), \\
A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + D_{21}\eta_1(t) + D_{22}\eta_2(t) + c_2L(t) - i_2(t) &\leq x_2(t), \\
x_1(t) &\leq \xi_1(t-1), \quad x_2(t) \leq \xi_2(t-1), \\
\xi_1(t) &\leq \xi_1(t-1) + \eta_1(t), \quad \xi_2(t) \leq \xi_2(t-1) + \eta_2(t), \\
l_1x_1(t) + l_2x_2(t) &\leq L(t), \\
e_1(t) &\geq F_1x_1(t), \quad i_2(t) \leq H_2x_1(t), \\
x_1(t) \geq 0, \quad x_2(t) \geq 0, \quad \xi_1(t) \geq 0, \quad \xi_2(t) \geq 0, \quad \eta_1(t) \geq 0, \quad \eta_2(t) \geq 0, \\
e_1(t) \geq 0, \quad i_2(t) \geq 0, \quad L(t) \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T.
\end{aligned} \tag{6}$$

В модели (6) запас продукции экспортирующей группы отраслей  $x_1(t)$  в промежуток времени  $t$  обеспечивает прямые производственные затраты  $A_{11}x_1(t)$  и  $A_{12}x_2(t)$ , потребления  $L(t)c_1$ , создания

приращения мощностей обеих групп отраслей  $D_{11}\eta_1(t)$  и  $D_{12}\eta_2(t)$ , а также экспорт  $e_1(t)$ . В то же время запас продукции импортирующей группы отраслей  $x_2(t)$  в промежуток времени  $t$  может обеспечить прямые производственные затраты  $A_{21}x_1(t)$  и  $A_{22}x_2(t)$ , потребления  $L(t)c_2$ , создания приращения мощностей  $D_{21}\eta_1(t)$  и  $D_{22}\eta_2(t)$ , но уже с помощью использования импорта  $i_2(t)$ . В модели (6)  $F_1$  означает неотрицательную матрицу коэффициентов минимального экспорта продукции первой группы отраслей,  $H_2$  - неотрицательную матрицу коэффициентов максимального импорта для обеспечения производственных потребностей первой группы отраслей. В частности, матрица  $F_1$  может быть диагональной матрицей с диагональными элементами меньшими единицы.

Модель (6) является динамической, в результате ее функционирования мы получим при начальных данных  $\xi(0)$  последовательность векторов, удовлетворяющую всем ограничениям модели -  $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \xi_1(t), \xi_2(t), \eta_1(t), \eta_2(t), e_1(t), i_2(t), L(t))$ ,  $t=1,2,\dots,T$ . Такая последовательность представляет траекторию. В конце исследуемого периода (в момент времени  $T$ ) состояние модели характеризуется вектором  $X(T)$  (так называемое терминальное состояние модели).

Исследуем состояние равновесия в модели (6). Соответствующая стационарная траектория интенсивностей определяется темпом роста  $\alpha = \bar{\lambda}^{-1} > 1$ , лучом Неймана  $X = (x_1, x_2, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, e_1, i_2, L)$  и имеет вид

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \lambda^{-t} x_1, & x_2(t) &= \lambda^{-t} x_2, & \xi_1(t) &= \lambda^{-t} \xi_1, & \xi_2(t) &= \lambda^{-t} \xi_2, \\ \eta_1(t) &= \lambda^{-t} \eta_1, & \eta_2(t) &= \lambda^{-t} \eta_2, & e_1(t) &= \lambda^{-t} e_1, & i_2(t) &= \lambda^{-t} i_2, & L(t) &= \lambda^{-t} L. \end{aligned} \quad (7)$$

Если соотношения (7) подставить в (6), то для состояния равновесия  $(\lambda, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, e_1, i_2, L)$  при больших  $T$  получим оптимизационную задачу:

$$\begin{aligned} \lambda &\rightarrow \min, \\ x_1 &\geq A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + D_{11}\eta_1 + D_{12}\eta_2 + Lc_1 + e_1, \\ x_2 &\geq A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + D_{21}\eta_1 + D_{22}\eta_2 + Lc_2 - i_2, \\ x_1 &\leq \lambda\xi_1, & x_2 &\leq \lambda\xi_2, \\ (1-\lambda)\xi_1 &\leq \eta_1, & (1-\lambda)\xi_2 &\leq \eta_2, \\ l_1x_1 + l_2x_2 &\leq L, \\ e_1 &\geq F_1x_1, & i_2 &\leq H_2x_1, \\ x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & \xi_1 \geq 0, & \xi_2 \geq 0, & \eta_1 \geq 0, & \eta_2 \geq 0, \\ e_1 \geq 0, & i_2 \geq 0, & L \geq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Введем в рассмотрение матрицы

$$R_{11} = (c_i^1 l_j^1), \quad R_{12} = (c_i^1 l_j^2), \quad R_{21} = (c_i^2 l_j^1), \quad R_{22} = (c_i^2 l_j^2)$$

Поскольку при  $0 < \lambda < 1$  имеем

$$x_1 \leq \lambda\xi_1 \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}\eta_1, \quad x_2 \leq \lambda\xi_2 \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}\eta_2,$$

а следовательно

$$\eta_1 \geq \frac{1-\lambda}{\lambda}x_1, \quad \eta_2 \geq \frac{1-\lambda}{\lambda}x_2,$$

то с учетом  $D_{11} \geq 0$ ,  $D_{12} \geq 0$ ,  $D_{21} \geq 0$ ,  $D_{22} \geq 0$  получим

$$D_{11}\eta_1 \geq \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{11}x_1, \quad D_{12}\eta_2 \geq \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{12}x_2, \quad D_{21}\eta_1 \geq \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{21}x_1, \quad D_{22}\eta_2 \geq \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{22}x_2.$$

Далее, поскольку

$$(l_1 x_1) c_1 = R_{11} x_1, \quad (l_2 x_2) c_1 = R_{12} x_2, \quad (l_1 x_1) c_2 = R_{21} x_1, \quad (l_2 x_2) c_2 = R_{22} x_2,$$

то учитывая неотрицательность матриц  $F_1$  и  $H_2$ , приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} x_1 &\geq A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + D_{11} \eta_1 + D_{12} \eta_2 + L c_1 + e_1 \geq \\ &\geq \left( A_{11} + R_{11} + \frac{1-\lambda}{\lambda} D_{11} + F_1 \right) x_1 + \left( A_{12} + R_{12} + \frac{1-\lambda}{\lambda} D_{12} \right) x_2, \\ x_2 &\geq A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + D_{21} \eta_1 + D_{22} \eta_2 + L c_2 - i_2 \geq \\ &\geq \left( A_{21} + R_{21} + \frac{1-\lambda}{\lambda} D_{21} \right) x_1 + \left( A_{22} + R_{22} + \frac{1-\lambda}{\lambda} D_{22} \right) x_2 - H_2 x_1. \end{aligned} \quad (9)$$

После перенесения члена  $H_2 x_1$  налево и умножения обеих частей этих неравенств на  $\lambda > 0$  получим

$$\lambda(E + H)x \geq [\lambda(A + R + F) + (1 - \lambda)D]x,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ H_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$$

- неотрицательные квадратные матрицы,  $E$  - диагональная единичная матрица.

Таким образом, задача максимизации темпа роста открытой экономики (6) сведена нами к такой обобщенной модели Неймана

$$\lambda \rightarrow \min, \quad Q(\lambda)x \leq \lambda Bx, \quad x \geq 0, \quad (10)$$

где

$$Q(\lambda) = \lambda(A + R + F) + (1 - \lambda)D, \quad B = E + H. \quad (11)$$

Приступим к нахождению состояния равновесия модели (6). Равновесная траектория интенсивностей определяется темпом роста  $\alpha = \lambda^{-1}$  и лучом Неймана  $X = (x_1, x_2, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, e_1, i_2, L)$ . Для того, чтобы обеспечить существование нетривиального решения системы неравенств (8), необходимо наложить некоторые ограничения на параметры модели.

Будем считать, что матрица  $A$  неотрицательная и неразложимая,  $l > 0$ ,  $c \geq 0$ ,  $c \neq 0$ , а матрица  $A+R+F$  продуктивная, т.е. ее число Фробениуса меньше 1. Содержательно это ограничение состоит в том, что существующая технология  $(A, l, F)$  позволяет каждому работающему "прокормить" себя, осуществляя производственный процесс и проводя внешнеторговые операции.

Кроме этого, будем считать, что  $D \geq 0$  и если  $\eta \geq 0$ ,  $D\eta = 0$ , то  $\eta = 0$ . Данное предположение означает, что любое приращение  $\eta$  основных мощностей требует материальных затрат. Другими словами, мы считаем, что в матрице  $D$  нет нулевых столбцов.

Построим для (10) двойственную задачу

$$pQ(\lambda) \geq \lambda pB, \quad p \geq 0,$$

где  $p = (p_1, p_2)$  - вектор-строка двойственных оценок. Поскольку нас интересует случай  $x > 0$ , то это возможно лишь тогда, когда

$$pQ(\lambda) = \lambda pB. \quad (12)$$

Система линейных алгебраических уравнений (12) имеет нетривиальное решение  $p \neq 0$  только при условии

$$\det(Q(\lambda) - \lambda B) = 0,$$

т.е.

$$\det[(1 - \lambda)D - \lambda(E - A - R - F + H)] = 0. \quad (13)$$

Поскольку матрица  $A + R + F$  считается продуктивной, то [Пономаренко, 1995] существует неотрицательная матрица  $(E - A - R - F)^{-1} \geq 0$ .

Пусть также матрица  $H$  такая, что  $H \leq A + R + F$  (это может выполняться, поскольку  $A \geq 0$ ,  $R > 0$ ,  $F \geq 0$ ). Тогда матрица  $\bar{A} = A + R + F - H \geq 0$  остается продуктивной, т.е. существует неотрицательная матрица  $(E - \bar{A})^{-1} = (E - A - R - F + H)^{-1} \geq 0$ . Именно последнее оказывается наиболее важным требованием.

Уравнение (13) можно переписать в виде

$$\det[(E - A - R - F + H)^{-1}D - \mu E] = 0,$$

где  $\mu = \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{1}{1-\lambda} - 1 > 0$  при  $0 < \lambda < 1$ . Наименьшему значению  $\lambda$  соответствует наибольшее значение  $\mu$ .

Матрица  $(E - A - R - F + H)^{-1} \geq 0$ . Тогда согласно теореме Перрона-Фробениуса [Пономаренко, 1995] существует число Фробениуса  $\bar{\mu} > 0$  и соответствующий вектор Фробениуса  $\bar{z} \geq 0$  такой, что

$$(E - A - R - F + H)^{-1}D\bar{z} = \bar{\mu}\bar{z}.$$

Отметим при этом, что

$$(E - A - R - F + H)^{-1}D \leq (E - A - R - F)^{-1}D,$$

и поэтому  $\bar{\mu} \leq \mu^*$ , где  $\mu^*$  - число Фробениуса матрицы  $(E - A - R - F)^{-1}D$ .

Вернемся теперь к задаче (10), которую перепишем в виде

$$\mu \rightarrow \min, \quad (E - A - R - F + H)^{-1}x \leq \mu x, \quad x \geq 0.$$

Решение этой задачи достигается при  $\mu = \bar{\mu}$ ,  $x = \bar{z}$ . При этом темп роста  $\bar{\lambda}^{-1} = 1 + \frac{1}{\bar{\mu}} \geq 1 + \frac{1}{\mu^*} > 1$ , а

также структура выпуска  $\bar{x} \geq 0$ .

Основной результат данной статьи формулируется в виде такой теоремы.

**Теорема 3.** Если матрица  $A + R$  продуктивная, матрица  $H \leq A + R + F$ , а матрица  $D$  не имеет нулевых столбцов, то в модели (6) существует состояние равновесия с темпом роста  $\bar{\lambda}^{-1} = 1 + \frac{1}{\bar{\mu}}$ ,

которому соответствует единственный луч Неймана  $(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, y_2, L)$ , причем:

- 1)  $\bar{\mu}$  - число Фробениуса,  $\bar{x}$  - правый вектор Фробениуса матрицы  $(E - A - R - F + H)^{-1}D$ ;
- 2)  $\bar{\xi} = \bar{\lambda}^{-1}\bar{x}$ ,  $\bar{\eta} = \frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}\bar{x}$ ,  $\bar{l}_1 = F_1\bar{x}_1$ ,  $\bar{l}_2 = H_2\bar{x}_1$ ,  $\bar{L} = \bar{l}\bar{x}$ .

---

## Литература

[Dorfman, 1958] Dorfman R., Samuelson P.A., Solow R.M. Linear Programming and Economic Analysis, New York: McGraw-Hill, 1958.

[Ашманов, 1984] Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. - М.: Наука, 1984.- 296 с.

[Пономаренко, 1995] Пономаренко О.И., Перестюк М.О., Бурим В.М. Основи математичної економіки. - К.: Інформтехніка. 1995.- 320 с.

[Иванилов, 1971] Иванилов Ю.П., Петров А.А. Динамическая модель расширения и перестройки производства (π-модель). - В кн.: Кибернетику - на службу коммунизму, т.6, М.: Энергия, 1971, с.23-50.

---

## Информация об авторах

**Игорь Ляшенко** – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Васильковская, 42, кв. 44, Киев –22, 03022, Украина; e-mail: [lyashenko@unicyb.kiev.ua](mailto:lyashenko@unicyb.kiev.ua)

**Елена Ляшенко** – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Васильковская, 42, кв. 44, Киев –22, 03022, Украина; e-mail: [lyashenko@unicyb.kiev.ua](mailto:lyashenko@unicyb.kiev.ua)

## НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА: АКСИОМА АБСТРАКЦИИ, СТАТИСТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ, НАБЛЮДЕНИЯ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Владимир С. Донченко

**Abstract:** Рассматриваются вопросы, касающиеся определения нечётких множеств, введения аналога аксиомы свёртки, статистической интерпретации и её связи с аксиомой свёртки, наблюдений нечётких множеств

**Keywords:** нечёткое подмножество, функция принадлежности, теория множеств

### Введение

Нечёткие множества, предложенные Лотфи Заде в работе [1] (см. систематическое изложение в [2]) рассматривались с одной стороны – как метод моделирования, реализующий представления о неопределённости моделируемой ситуации и альтернативный статистическим методам описания неопределённости, с другой – как теория альтернативная или обобщающая классическую теорию множеств. Претензии на обобщающий характер теории основывали на нечёткой логике, под которой подразумевалась алгебра оперирования с числами из интервала  $[0,1]$  с операциями минимума и максимума в которой справедливы все соотношения булевой алгебры кроме закона исключённого третьего. Однако то, что выходило за рамки булевой алгебры, классическая теория нечётких подмножеств не рассматривалась. В частности, важнейшим элементом аксиоматики теории множеств является аксиома, которая известна под несколькими названиями: аксиома свертки, принцип абстракции [3] или аксиома выделения [4], которая устанавливает связь между множествами в классическом понимании: “четкими” множествами, - и свойствами элементов универсального множества, собственно, - предикатами, заданными на этом универсальном множестве.

В теории нечетких множеств проблема аналога аксиомы свертки (принципа абстракции) исключается из рассмотрения ссылкой на то, что с самого начала рассматриваются нечеткие подмножества, и хотя в обозначении функции принадлежности употребляют элемент, который формально содержит ссылку  $\underline{A}$  на множество:  $\mu_{\underline{A}}(e)$ , – тем не менее обозначение  $\underline{A}$  относится к самому нечеткому подмножеству, под которым понимают, собственно, график функции принадлежности [2]:

$$\underline{A} = \{(e, \mu_{\underline{A}}(e)), e \in E\}, 0 \leq \mu_{\underline{A}} \leq 1.$$

Отсутствие аналога аксиомы свертки или принципа абстракции порождает вопрос о том, какой именно объект или свойство характеризуется нечётко в рамках нечеткого подмножества  $(E, \mu_{\underline{A}}(e))$ . Неявно и только отчасти проблема отсутствия связи между подмножеством и свойством реализуется в понятии лингвистической переменной и её значениях. Именно в рамках понятия лингвистической переменной неявно реализуется принцип абстракции: связь, эквивалентность свойств (предикатов) и подмножеств. Эта неявная реализация принципа абстракции при использовании лингвистических переменных осуществляется рассмотрением для той или иной числовой характеристики: числовой переменной в чётком описании, к примеру расстояния, – свойств, например: “большое”, “среднее” и “малое”, которые связаны с той или иной частью интервала возможных значений расстояния в целом. После этого на соответствующих под интервалах определяется функция принадлежности, которая, собственно реализует нечёткое описание именно отмеченного свойства. Полученные нечеткие подмножества считаются значениями лингвистической переменной. Таким образом, лингвистическая переменная является не просто нечетким подмножеством с соответствующим носителем – а нечеткое подмножество плюс свойство, которое это нечёткое подмножество описывает нечётко, как в упомянутом выше примере со свойствами расстояния. Таким образом в понятии лингвистической переменной неявно реализуется представление об объекте нечеткости: это свойства “большое”, “среднее”, “малое”, а с другой - устанавливается связь между нечеткими подмножествами и соответствующим свойством свойствами.

Такой подход только частично реализует связь между свойством и нечетким подмножеством, так как, соответствующие нечеткие объекты являются нечеткими подмножествами заданными на разных носителях  $E$ : на подинтервалах исходного множества. Так в примере с расстояниями значениями лингвистической переменной являются нечеткие подмножества, связанные с разными подинтервалами – разными носителями.

В работах [5-6] автора предлагается теоретико-вероятностная интерпретация нечеткого подмножества, точнее: функции принадлежности, – в которой с нечетким подмножеством связывается вполне определенное событие-свойство-предикат. В работе [7] предлагается уточнение определения нечеткого подмножества, в котором подходящий предикат  $P$  вводится в само определение нечеткого подмножества: при сохранении общего подхода к заданию нечеткого подмножества носителем и функцией принадлежности, эта последняя приписывается, связывается с предикатом  $P$ , который вводится в обозначение функции принадлежности:  $\mu^{\{P\}}(e)$ . Типичным примером такой функции принадлежности, приписываемой определенному событию-свойству является обобщенная логит- и пробит- регрессия. В ней событие-свойство с самого начала присутствует явно: это свойство, которое описывается фиксируется событием  $\{Y = 1\}$ , которое отвечает совершению покупки и т.д.

### Уточнение понятия нечеткого подмножества

Путем решения проблемы построения аналога аксиомы абстракции или выделения для нечетких подмножеств, на взгляд автора, была бы явная ссылка на свойство – или соответствующее ему множество, – неопределенность в определении которой и описывается, собственно, функцией принадлежности. Эта ссылка должен быть явным образом отраженное, например, в обозначении для

функции принадлежности нечеткого подмножества:  $\mu^{\{P\}}(e)$ , где  $P$  – соответствующее свойство (предикат или четкое подмножество). Учитывая наличие аксиомы свертки (абстракции или выделения) для множеств классических, вместо свойства  $P$  может стоять подходящее подмножество – классическая – множества  $E$ . В рамках такого подхода две функции принадлежности  $\mu^{\{P_1\}}(e)$  и  $\mu^{\{P_2\}}(e)$  с  $P_1 \neq P_2$ , задают два разных нечетких подмножества, даже, если они совпадают как функции  $e, e \in E$ .

Определение. Нечетким подмножеством множества  $E$ , которое нечетко описывает свойство  $P$  на  $E$  или соответствующую  $P$  множество  $P_E \subseteq E$ , называется пара  $(E, \mu^{\{P\}}(e))$  или пара  $(E, \mu^{\{P_E\}}(e))$ , где:

- $E$  - абстрактное множество, которые будем называть универсальным множеством или носителем нечеткого подмножества;
- $P$  – предикат на  $E$ , а  $P_E$  – подмножество множества  $E$ , которое отвечает предикату  $P$ ;
- $\mu^{\{P\}}(e)$  – функция двух аргументов:  $e, e \in E$  и  $P$  из множества предикатов на  $E$ . Эту функцию, как и в классической теории нечетких подмножеств, будем называть функцией принадлежности, прибавляя, что она нечетко реализует или характеризует свойство  $P$  или соответствующее множество  $P_E$ .

Замечание1. По определению, функция принадлежности является функцией двух аргументов:  $e \in E$  и  $P$  на  $E$  или  $P_E \subseteq E$ . В дальнейшем, учитывая наличие аксиомы свертки в “четкой” теории, если это не обусловлено дополнительно, будем считать функцию принадлежности  $\mu^{\{A\}}(e)$  функцией двух аргументов:  $e \in E$  и  $A \subseteq E$ . Таким образом, нечетким подмножеством с носителем – универсальным множеством –  $E$  называется пара  $(E, \mu^{\{A\}}(e))$ .

Подытоживая, отметим, что вероятностная интерпретация нечетких подмножеств и пример обобщенных вариантов логит- и пробит- регрессий как функции принадлежности нечеткого множества, а также внутренние потребности теории, связанные с одной стороны с необходимостью явного определения объекта нечеткости, а с другой - с логической полнотой аналогии с “четкими” множествами: введением аналога принципа свертки - приводит к необходимости уточнения понятия нечеткого подмножества. Это уточнение представлено основным определением этого пункта или вариантом, представленным в замечании.

### Вероятностная интерпретация нечетких подмножеств

В общем, основатели теории нечетких подмножеств неоднократно подчеркивали отличие и принципиальную альтернативность теории нечетких подмножеств статистике. Настойчиво подчеркивается, что эта теория является альтернативным средством описания неопределенности, которая отражает степень субъективной уверенности исследователя, хотя сам объект характеристики оставался, как отмечено выше, вне определения нечеткого подмножества. Пример обобщенных вариантов логит- и пробит-регрессий, упоминавшийся выше, не имеет универсального характера хотя бы потому что связан со специальным выбором носителя. С другой стороны, рассмотрение теории нечетких подмножеств как инструмента прикладных исследований: математического моделирования для той или иной предметной области, требовал и требует применения определенной интерпретации нечетких объектов, которая бы выводя за рамки субъективной уверенности, предоставляла возможности говорить о том, какие объективные черты реальных объектов проявляются в виде нечетких объектов и, в частности, отвечала бы на вопрос, что можно считать наблюдением нечеткого множества. Важность последнего вопроса тяжело переоценить, так как на представлении о совокупности объектов и его математическом воплощении в виде абстрактного множества построена вся современная математика.

#### 3.1. Вероятностная интерпретация нечетких подмножеств - дискретный случай

Этот пункт посвящен рассмотрению теоретико - вероятностной интерпретации нечеткого подмножества в классическом варианте определения для случая дискретного носителя. Конечно, эта интерпретация в полной мере касается и уточненного варианта определения.

Собственно, теоретико - вероятностная интерпретация является следствием теоремы 1, которая устанавливает связь между функцией принадлежности нечеткого подмножества и системой условных вероятностей по полной группе событий в некотором вероятностном пространстве.

Теорема 1. Для любого нечеткого в классическом варианте определения подмножества  $(E, \mu_A(e))$  с дискретным носителем  $E$  обнаружится такое дискретное вероятностное пространство  $(\Omega, B_\Omega, P)$ , событие  $A \in B_\Omega$  и полная группа событий  $H_e$ :  $H_e \in B_\Omega, e \in E$ , – в рамках этого вероятностного пространства, что функция принадлежности  $\mu_A(e)$  представляется системой условных вероятностей в виде:

$$\mu_A(e) = P\{A|H_e\}, \text{ для произвольного } e \in E.$$

Доказательство. Выберем и зафиксируем любое двоелементное множество с элементами, скажем,  $\alpha$  и  $\bar{\alpha}$ . Рассмотрим  $\Omega = \{\alpha, \bar{\alpha}\} \times E$ . Его элементами являются пары  $\omega$  вида:  $\omega = (\alpha, e)$  или  $\omega = (\bar{\alpha}, e)$  для произвольного  $e: e \in E$ , – а именно множество  $\Omega$ , – учитывая дискретность  $E$ , – тоже будет дискретной. Пусть  $p_e, p_e > 0, e \in E$  – вероятности любого ряда распределения на  $E$ , которые удовлетворяют единому требованию: все эти вероятности ненулевые. С помощью функции принадлежности  $\mu_A(e), e \in E$  и вероятностей  $p_e, e \in E$  выбранного ряда распределения определим на булеане  $\Omega$  вероятность, которая, учитывая дискретность этого множества, задается соответствующим рядом распределения  $\bar{p}_\omega, \omega \in \Omega$ :

$$\bar{p}_\omega = \begin{cases} \mu_A(e)p_e, & \text{для } \omega = (e, \alpha) \\ (1 - \mu_A(e))p_e, & \text{для } \omega = (e, \bar{\alpha}) \end{cases}.$$

Действительно:

- для произвольного  $\omega \in \Omega$   $\bar{p}_\omega \geq 0$ ;
- $\sum_{\omega \in \Omega} \bar{p}_\omega = \sum_{e \in E} p_{(\alpha, e)} + \sum_{e \in E} p_{(\bar{\alpha}, e)} = \sum_{e \in E} \mu_A(e)p_e + \sum_{e \in E} (1 - \mu_A(e))p_e = 1$



Определим событие  $A \in B_\Omega$  и полную группу событий  $H_e \in B_\Omega$ ,  $e \in E$  соотношениями соответственно:

$$A = \{\alpha\} \times E$$

$$H_e = \{(\alpha, e), (\bar{\alpha}, e), e \in E\}.$$

Очевидным образом:  $A \cap H_e = \{(\alpha, e)\}$ .

Кроме того:

$$P\{H_e\} = P\{(\alpha, e)\} + P\{(\bar{\alpha}, e)\} = p_e > 0,$$

$$P(A \cap H_e) = P\{(\alpha, e)\} = \mu_A(e) p_e,$$

$$\text{а, ведь: } P(A | H_e) = \frac{P(A \cap H_e)}{P(H_e)} = \frac{P\{(\alpha, e)\}}{p_e} = \frac{\mu_A(e) p_e}{p_e} = \mu_A(e).$$

$$\text{Затем: } \mu_A(e) = P(A | H_e).$$

И доказательство закончено.

Результат, сформулированный в теореме 1, можно распространить на систему нечетких множеств, которую будем называть полной в понимании следующего определения.

*Определение.* Систему  $(E, \mu_{A_i}(e))$ ,  $i = \overline{1, n}$  нечетких в классическом определении подмножеств будем называть полной группой нечетких подмножеств, если для произвольного  $e \in E$  выполняется соотношение:

$$\sum_{i=1}^n \mu_{A_i}(e) = 1.$$

*Теорема 2.* Для любой полной нечеткой в классическом варианте определения группы подмножеств  $(E, \mu_{A_i}(e))$ ,  $i = \overline{1, n}$  одним и тем самым дискретным носителем  $E$  обнаружится такое дискретное вероятностное пространство  $(\Omega, B_\Omega, P)$ , набор событий  $A_i \in B_\Omega$ ,  $i = \overline{1, n}$  и полная группа событий  $H_e$ :  $H_e \in B_\Omega$ ,  $e \in E$ , – в рамках этого вероятностного пространства, что функции принадлежности  $\mu_{A_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$  представляется системой условных вероятностей в виде:  $\mu_{A_i}(e) = P\{A_i | H_e\}$ , для произвольного  $e \in E$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

*Доказательство.* Выберем и зафиксируем любое  $n$ -элементное множество  $\mathfrak{X}$  с элементами, скажем,  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ :  $\mathfrak{X} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ . Рассмотрим  $\Omega = \mathfrak{X} \times E$ . Его элементами являются пары  $\omega$  вида:  $\omega = (\alpha, e)$  для произвольных  $e: e \in E$ ,  $\alpha \in \mathfrak{X}$ , а само множество  $\Omega$ , – учитывая дискретность  $E$  тоже будет дискретным. Пусть, как и в доказательстве предыдущей теоремы,  $p_e$ ,  $p_e > 0$ ,  $e \in E$  – вероятности любого ряда распределения на  $E$ , которые, так же, удовлетворяют единственному требованию положительности. С помощью функций принадлежности  $\mu_{A_i}(e)$ ,  $i = \overline{1, n}$  и вероятностей  $p_e$ ,  $e \in E$  выбранного ряда распределения на  $E$  определим на булеане  $B_\Omega$  множества  $\Omega$  вероятность, которая, учитывая дискретность этого множества, задается соответствующим рядом распределения  $\bar{p}_\omega$ ,  $\omega \in \Omega$ :

$$\bar{p}_\omega = \begin{cases} \mu_{A_1}(e) p_e, & \text{для } \omega = (e, \alpha_1) \\ \dots & \dots \\ \mu_{A_n}(e) p_e, & \text{для } \omega = (e, \alpha_n) \end{cases}$$

Действительно:

- для произвольного  $\omega \in \Omega$   $\bar{p}_\omega \geq 0$ ;
- $$\sum_{\omega \in \Omega} \bar{p}_\omega = \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} \bar{p}_{(\alpha_i, e)} = \sum_{i=1}^n \sum_{e \in E} \mu_{A_i}(e) p_e = \sum_{i=1}^n \mu_{A_i}(e) \sum_{e \in E} p_e = \sum_{i=1}^n \mu_{A_i}(e) = 1.$$

Определим события  $A_i \in B_\Omega$ ,  $i = \overline{1, n}$  и полную группу событий  $H_e \in B_\Omega$ ,  $e \in E$  соотношениями соответственно:

$$A_i = \{\alpha_i\} \times E, i = \overline{1, n}$$

$$H_e = \mathfrak{R} \times \{e\}, e \in E.$$

Очевидным образом:  $A_i \cap H_e = \{(\alpha_i, e)\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $e \in E$ .

Кроме того:  $P\{H_e\} = \sum_{\omega \in H_e} \bar{p}_\omega = \sum_{i=1}^n \bar{p}_{(\alpha_i, e)} = \sum_{i=1}^n \mu_{A_i}(e) p_e = p_e > 0$ ,  $P(A_i \cap H_e) = P\{(\alpha_i, e)\} = \mu_{A_i}(e) p_e$ ,

$$\text{а, ведь: } P(A_i | H_e) = \frac{P(A_i \cap H_e)}{P(H_e)} = \frac{P\{(\alpha_i, e)\}}{p_e} = \frac{\mu_{A_i}(e) p_e}{p_e} = \mu_{A_i}(e).$$

Затем:  $\mu_{A_i}(e) = P(A_i | H_e)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $e \in E$ .

И доказательство теоремы закончено.

---

### Вероятностная интерпретация нечетких подмножеств - непрерывный случай

---

Результат предыдущего пункта удастся значительно усилить: собственно, к уровню представления системами условных вероятностей дискретного случая, - если носитель  $E$  является структурированным, и эта структура является структурой пространства с мерой.

Теорема 1. Пусть:

- $(E, (\cdot, \cdot), m)$ - пространство с мерой;
- $(E, \mu_{A_i}(e))$ ,  $i = \overline{1, n}$   $\mu_i(e)$ ,  $i > 0$  - полная группа нечетких множеств с одним и тем самым носителем  $E$ ;
- все функции принадлежности  $\mu^{(A_i)}(e)$ ,  $i = \overline{1, n}$  являются измеримыми функциями относительно пары  $\sigma$ -алгебр  $\mathfrak{S}, \mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{L}$ - борелевская  $\sigma$ -алгебра в  $R^1$ .

Тогда:

- существует вероятностное пространство  $(\Omega, B_\Omega, P)$ ,
- существует дискретная случайная величина  $\xi$  со значениями из некоторого дискретного множества  $S_p = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ ;
- существует обобщенная случайная величина (со значениями в  $E$ ) такая, что для произвольного  $i = \overline{1, n}$
- $\mu^{(A_i)}(e) = P\{\xi = S_i | \eta = e\}$ , где  $P\{\xi = S_i | \eta = e\}$  - условное распределение в.в.  $\xi$  относительно в.в.  $\eta$ .

Условное распределение является регулярным: для произвольного  $e: P(B | \eta = e)$  является вероятностью по  $B$ .

Доказательство в этом случае воплощает общую идею доказательства дискретного случая построения подходящего вероятностного пространства по условным распределениям.

---

### Наблюдение нечетких множеств.

---

Уточнение понятия нечеткого множества и соответствующая вероятностная интерпретация дают возможность объективизировать понятие нечеткого объекта и дает возможность говорить о наблюдении нечеткого множества, когда речь идет о применении нечеткости в математическом моделировании.

Под наблюдением нечёткого множества можно в уточнённом варианте определения понимать пару  $(e, P(e))$  – значения элемента  $e$  носителя и значения предиката на рассматриваемом элементе. При таком понимании наблюдения, собственно, речь идёт о предъявляемом элементе и фиксации выполнения или невыполнения свойства  $P$  для этого элемента. Именно такое понимание наблюдения и наблюдаемости имеет место в обобщениях логит- и пробит-регрессии. При построении-оценивании функций принадлежности, например по методу максимального правдоподобия, как это делается в упомянутой выше регрессии или иным способом. При привлечении экспертов для оценивания функции принадлежности, указанные эксперты могут при предъявлении элемента  $e$  либо отвечать на вопрос о величине  $\mu^{(A_i)}(e)$  либо – на вопрос о том, отвечает ли  $e$  требованию  $A$  и давать ответ в виде 0, когда по его мнению отвечает и 0 – когда нет. Способ оценивания функции принадлежности в подходящей параметризации может быть подходящая линейная комбинация функционала метода максимальной правдоподобности и метода наименьших квадратов.

---

### Литература

---

1. Zadeh, Lotfi. Fuzzy Sets/ Information and Control, 8(3). June 1965. pp. 338-53.
2. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств.- Г.: Радио и связь. 1982.- 322 с.
3. Столл Роберт Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории.- Г.: Просвещение.- 1968.-231 с.
4. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств.-М.:Мир.-1970.-416 с.
5. Донченко В.С. Условные распределения и нечеткие множества.//Вестник Киевского университета, №3, 1998.
6. Донченко В.С. Вероятность и нечеткие множества.//Вестник Киевского университета, №4, 1998.
7. Донченко В.С. Статистические модели наблюдений и нечеткие множества.//Вестник Киевского университета, №1, 2004.

---

### Информация об авторе

---

**Владимир С. Донченко** – профессор, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики, кафедра Системного анализа теории принятия решений; e-mail: [vsdon@unicyb.kiev.ua](mailto:vsdon@unicyb.kiev.ua)

## ТЕХНОЛОГИЯ КЛАССИФИКАЦИИ ЭЛЕКТРОННЫХ ДОКУМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЯ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ

**Владимир С. Донченко, Виктория Н. Омардибирова**

**Аннотация:** предложена технология классификации электронных документов с использованием теории возмущения псевдообратных матриц.

**Ключевые слова:** классификация, обучающая выборка, псевдообратная матрица, Web Data Mining.

---

### Введение

---

Одной из важнейших современных прикладных задач классификации является классификация электронных документов. Приложения могут быть самые разные. Например, классификация электронной почты и отсеивания так называемого спама, то есть писем не представляющих интерес для пользователя; или классификация документов по тематике при получении их из такого неструктурированного хранилища как Интернет. Данные задачи относятся к классу задач добычи полезных данных из Интернет (Web Data Mining). В представленной статье описана технология классификации электронных документов по заданным классам. В качестве математического аппарата используется теория возмущения псевдообратных матриц. [1]

---

### Постановка задачи

---

Имеется несколько классов электронных документов из некоторой предметной области. Каждый класс характеризуется набором документов-эталонов. Вся предметная область характеризуется некоторым заданным тезаурусом одинаковым для всех классов документов. Необходимо создать и обучить с помощью сформированной из документов-эталонов обучающей выборки классификатор, который будет относить вновь поступающие документы к одному из известных классов. Стандартным в решении задачи распознавания является с одной стороны формирование значимых признаков (Feature Extraction) [2], с другой – выбор подходящий функции близости к формируемым классам.

---

### Основные обозначения

---

Пусть имеется  $K$  классов электронных документов, которые будем обозначать соответственно,  $\Omega_k$ ,  $k = \overline{1, K}$  для которых фиксирован один и тот же тезаурус, количество терминов которого будем обозначать  $L$ . Признаками, по которым будет производиться классификация, выбираются относительные частоты использования терминов тезауруса. Таким образом, каждый документ можно представляется в виде вектора  $a: a^T = (a_1, \dots, a_L)$  состоящего из относительных частот встречаемости слов из тезауруса в данном. Пусть  $n_k$ ,  $k = \overline{1, K}$  – количество документов обучающей выборки, относящихся к каждому из классов.

Введём в рассмотрение матрицы  $A_k, k = \overline{1, K}$ , составленные из «частотных» векторов каждого из классов. Очевидным образом каждая из матриц имеет размерность  $L \times n_k, k = \overline{1, K}$ .

Обозначим среднее векторов обучающей выборки по каждому из классов через  $\bar{a}_k, k = \overline{1, K}$ :

$$\bar{a}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{a \in \Omega_k} a, \quad k = \overline{1, K}. \quad (1)$$

Сдвинем каждый из векторов обучающей выборки того или иного класса на среднее по тому же классу, и матрицы, составленные из полученных векторов как по векторам столбцам. Составим новые матрицы, аналогичные  $A_k, k = \overline{1, K}$ . Будем обозначать полученные матрицы, связанные с каждым из классов через  $\tilde{A}_k, k = \overline{1, K}$ .

---

### Алгоритм классификации

---

Алгоритм классификации предлагается строить на основе вычисления векторов  $\bar{a}_k, k = \overline{1, K}$  и построения сингулярного разложения [1] для матриц  $\tilde{A}_k, k = \overline{1, K}$ , характеризующих соответствующие классы. Как известно, в соответствии с сингулярным разложением матрицы допускают представление:

$$\tilde{A}_k = \sum_{i=1}^{r_k} y_i^{(k)} (x_i^{(k)})^T \lambda_i^{(k)}, \quad r_k = \text{rank } \tilde{A}_k = \text{rank } A_k, \quad k = \overline{1, K}, \quad \text{где } \lambda_1^2 \geq \dots \geq \lambda_{r_k}^2. \quad (2)$$

Собственные значения  $\lambda_i$  и собственные векторы  $y_i^{(k)} \in R^L, x_i^{(k)} \in R^{n_k}, i = \overline{1, r_k}, k = \overline{1, K}$  в данном представлении могут быть вычислены, например, методом Якоби или методом сингулярного разложения матрицы SVD [3].

Сингулярные разложения (2) матриц классов можно использовать для построения приближений этих матриц, которые в свою очередь будут использованы для построения мер близости к каждому из классов. Эти приближения строятся в два этапа: на первом отбрасываются «старшие члены» сингулярных разложений: слагаемые, отвечающие меньшим значениям модулей собственных чисел; на втором – полученные матрицы используются для построения мер близости к классам. Оценка ошибки,

совершаемой при отбрасывании «старших членов» сингулярного разложения, если оставляется  $s_k$  членов:  $s_k < r_k$  описывается следующим неравенством[1]:

$$\begin{aligned} \|\Delta_{is_k}\|^2 &= \sum_{i=s_k+1}^{r_k} (\lambda_i^{(k)})^2 |x_i^{(k)}|^2 \leq (\lambda_{s_k+1}^{(k)})^2 \sum_{i=s_k+1}^{r_k} |x_i^{(k)}|^2 \leq (\lambda_{s_k+1}^{(k)})^2, \text{ где} \\ \tilde{A}_k &= \sum_{i=1}^{s_k} y_i^{(k)} (x_i^{(k)})^T \lambda_i^{(k)} + \Delta_{is_k}, \quad s_k < r_k, \quad k = \overline{1, K} \\ \Delta_{is_k} &= \sum_{i=s_k+1}^{r_k} y_i^{(k)} (x_i^{(k)})^T \lambda_i^{(k)} \end{aligned} \quad (3)$$

Параметр  $s_k$ ,  $s_k < r_k$ ,  $k = \overline{1, K}$  выбирается из соображений малости ошибки, совершаемой при построении подходящего приближения  $\tilde{A}_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , и как правило  $s_k$  выбирается так, чтобы  $|\lambda_{s_k+1}^{(k)}|$  соответствовало процентам или нескольким процентам от модуля максимального собственного числа. Такое построение приближения существенно упрощает вычислительную процедуру построения меры близости к каждому из классов: мер, которые можно построить либо на основе исходных матриц  $\tilde{A}_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , либо их приближений, построенных в соответствии с процедурой, описанной выше.

Меры близости определяются как квадратичные формы с матрицами  $R_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , которые строятся на основе подходящих приближений матриц  $\tilde{A}_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , – которые будем обозначать соответственно  $\tilde{A}_{k, s_k}$ ,  $k = \overline{1, K}$  – в соответствии с формулами:

$$R_k = (\tilde{A}_{k, s_k}^+)^T \cdot \tilde{A}_{k, s_k}^+ = \sum_{i=1}^{s_k} y_i^{(k)} (y_i^{(k)})^T (\lambda_i^{(k)})^{-2} \quad (4)$$

Процедура отнесения электронного документа, характеризующегося «частотным» вектором  $b^T = (b_1, \dots, b_L)$  к одному из классов  $\Omega_k$ ,  $k = \overline{1, K}$  производится на основе вычисления для каждого из них «расстояния»  $m_k$ ,  $k = \overline{1, K}$  до класса, которое определяется выражением:

$$m_k = \left( (b - \bar{a}^{(k)})^T \cdot R_k \cdot (b - \bar{a}^{(k)}) \right), \quad k = \overline{1, K} \quad (5)$$

Классифицируемый документ будет относиться к тому классу, для которого значение расстояния  $m_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , определяемое в соответствии с (5) будет принимать минимальное значение.

## Результаты экспериментов

Для проверки правильности работы предложенной технологии была выбрана книга в электронном формате «The Handbook of Data Mining» [2] размером 689 страниц и состоящая из 3 частей. Соответственно была сформирована обучающая выборка из трех классов по 5 первых документов- глав в каждом классе. После обучения классификатора на его вход подавались главы книги, которые не использовались в обучении классификатора для того, чтобы он отнес их к одному из 3 классов.

Для 8 глав первой части подданной на вход классификатора значения функционала (10) равны:

0.01959

0.15240

0.09561

Так как наименьшее значение функционала равно 0.01959, то классифицируемый документ относится к первому классу.

---

## Выводы

---

В статье описана технология классификации электронных документов по заданным классам с использованием теории возмущения псевдообратных матриц, которая показала свою эффективность по крайней мере в рассмотренных модельных примерах. Предложенная технология может использоваться для автоматической классификации поступающей электронной почты или для автоматической добычи интересующей информации из сети Интернет (Web Data Mining). Благодаря использованию приближений для псевдообращенных матриц, удаётся существенно повысить скорость работы алгоритма.

---

## Список литературы

---

Кириченко Н.Ф., Куц Р., Лепеха Н.П. Распознавание трехмерных объектов по ультразвуковым эхо-сигналам // Проблемы управления и информатики.– 1999.– №5– С.110–122.

The Handbook of Data Mining / edited by Nong Ye, LAWRENCE ERLBAUM ASSOCIATES, London, 2003, 689p.

Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений.-М.:Мир,1980.-280 с.

Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.-М.:Наука,1967.-287 с.

---

## Информация об авторах

---

**Владимир С. Донченко** – профессор, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, кафедра Системного анализа и теории оптимальных решений, e\_mail: [vsdon@unicyb.kiev.ua](mailto:vsdon@unicyb.kiev.ua)

**Виктория Н. Омардибиров** – аспирантка, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, кафедра Системного анализа и теории оптимальных решений, e\_mail: [sdp@unicyb.kiev.ua](mailto:sdp@unicyb.kiev.ua)

# ВЕКТОРНЫЕ РАВНОВЕСИЯ ВО МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ИГРАХ

Сергей Мащенко

**Abstract:** *There are proposed the necessary and sufficiency conditions of the vector Nash's equilibria in multicriterion games.*

**Keywords:** *Nash's vector equilibria, multicriterion game.*

---

## Введение

---

Концепция равновесия по Нешу, несомненно, является важнейшим теоретико-игровым инструментом, который наиболее часто применяется в экономике, социологии, экологии.

Пусть  $N$  – множество игроков. Рассмотрим многокритериальную игру  $G = (X_i, U_i; i \in N)$  в нормальной форме [1,2], где  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  – множество из  $n$  игроков;  $X_i$  – множество стратегий  $i$ -го игрока, элементы которого называют стратегиями и обозначают через  $x_i$ ,  $i \in N$ ;  $U_i(x) = (u_i^j(x))_{j \in M_i}$  – вектор критериев,  $M_i = \{1, 2, \dots, m_i\}$  – множество индексов критериев  $i$ -го игрока,  $m_i$  – их количество (каждый критерий  $u_i^j(x)$  представляет собой действительзначную функцию, определенную на множестве ситуаций игры  $X = \prod_{i \in N} X_i$ ). Каждый из игроков стремится получить по возможности большее значение всех своих критериев.

Если каждый игрок может однозначно определить предпочтение на множестве своих критериев, то в соответствии с методами многокритериальной оптимизации [3], многокритериальную игру можно легко

превратить в обычную (однокритериальную) игру, где функциями выигрыша игроков будут свертки критериев, например,  $W_i(x) = \min_j \rho_i^j u_i^j(x)$ ,  $i \in N$ , где  $\rho_i^j > 0, j \in M_i, i \in N$ , - весовые коэффициенты соответствующие предпочтению  $i$ -го игрока на множестве своих критериев,  $i \in N$ . Однако, проблема состоит в том, что во многих игровых ситуациях игрок априори не может определить предпочтение на множестве своих критериев, так как оно уже само становится элементом игры, зависит от других игроков и должно формироваться в процессе игры.

### Векторные равновесия

Поскольку во многокритериальной игре выигрыши игроков определяются векторными функциями  $U_i(x) = (u_i^j(x))_{j \in M_i}$ ,  $i \in N$ , то нам следует определить в данном случае понятия предпочтения.

В этой работе мы будем придерживаться строгой и слабой аксиом Парето [3]. Интерпретация этих аксиом в условиях многокритериальной игры состоит в следующем. Говорят, что ситуация  $x$  доминирует ситуацию  $y$  по вектору критериев  $U(x) = (u^j(x))_{j \in M}$ , если  $U(x) \succ U(y) \Leftrightarrow u^j(x) \geq u^j(y), j \in M$ , и хотя бы одно неравенство строгое, т. е.  $U(x) \neq U(y)$ , и говорят, что  $x$  сильно доминирует  $y$ , если  $U(x) \succ \succ U(y) \Leftrightarrow u^j(x) > u^j(y), j \in M$ .

Для формализации равновесия Неша в условиях многокритериальной игры нам будут необходимы специальные отношения доминирования, которые мы назовем отношением доминирования по Нешу и слабым отношением доминирования по Нешу. Будем говорить, что ситуация  $x$  многокритериальной игры

доминирует по Нешу ситуацию  $x'$  ( $x \succ x'$ ), которая получается из ситуации  $x$  изменением, каким-то, но лишь одним игроком, своей стратегии, если:  $\exists i \in N : U_i(x_i, x_{N \setminus \{i\}}) \succ U_i(x_i', x_{N \setminus \{i\}})$ . В случае слабого доминирования:  $x \succ \succ x' \Leftrightarrow \exists i \in N : U_i(x_i, x_{N \setminus \{i\}}) \succ \succ U_i(x_i', x_{N \setminus \{i\}})$ .

В соответствии с отношением доминирования ( $\succ$ ) на множестве ситуаций  $X$  определим множество векторных равновесий Неша (обозначим его через  $NE(X_i, U_i; i \in N)$ ). Оно будет состоять из ситуаций  $x^*$ , которые не доминируются по Нешу ни одной другой ситуацией, т. е.

$$x^* \in NE(X_i, U_i; i \in N) \Leftrightarrow \neg \exists x \in X : x \succ x^* \quad (1)$$

Аналогично определяется множество слабых векторных равновесий Неша

$$SNE(X_i, U_i; i \in N) = \left\{ x^* \mid \neg \exists x \in X : x \succ \succ x^* \right\}.$$

Рассмотрим подробнее векторные равновесия Неша. Предположим, что для любой критериальной функции  $u_i^j(x), j \in M_i, i \in N$ , выполняются условия существования максимума на множестве ситуаций игры (множество ситуаций компактно, а критериальные функции непрерывны; множество ситуаций конечно и т.п.). Тогда, если провести аналогию к задачам многокритериальной оптимизации [3], то определение векторного равновесия можно сформулировать в следующем виде:

$$x^* \in NE(X_i, U_i; i \in N) \Leftrightarrow U_i(x^*) = \text{Vect Max}_{y_i \in X_i} \{U_i(y_i, x_{N \setminus \{i\}}^*)\}, i \in N. \quad (2)$$

Действительно, при фиксированном  $i$  (номере игрока) и фиксированном наборе стратегий других игроков  $x_{N \setminus \{i\}}^*$  из (1) получим определение Парето-оптимальной альтернативы  $x_i^*$  для многокритериальной задачи:  $\text{Vect Max}_{y_i \in X_i} \{U_i(y_i, x_{N \setminus \{i\}}^*)\}$ .

Рассмотрим пример векторного равновесия Неша для следующей двух-критериальной игры двух лиц:

	A21	A22	A23
A11	(3,3) (1,1)	(3,1) (2,2)	(1,1) (3,3)
A12	(2,2) (1,3)	(2,2) (2,2)	(2,2) (3,1)
A13	(1,1) (3,3)	(1,3) (2,2)	(3,3) (1,1)

В этом примере:  $\{A11, A12, A13\}$  – множество стратегий первого игрока,  $\{A21, A22, A23\}$  – множество стратегий второго игрока; векторы выигрышей первого игрока представлены в верхнем левом углу каждой ячейки таблицы, а выигрыш второго – в нижнем правом углу. Интересная особенность примера – отсутствие равновесий Неша в этой игре, если каждый игрок будет оценивать свой выигрыш только по одному (любому) критерию. По определению векторного равновесия получим:

$$NE = \text{ArgVect}_{y_1 \in \{A11, A12, A13\}} \text{Max} \{U_1(y_1, A22)\} \cap \text{ArgVect}_{y_2 \in \{A21, A22, A23\}} \text{Max} \{U_2(A12, y_2)\} = \{(A12, A22)\}.$$

### Условия оптимальности

Сформулируем сначала общие (те, что не основываются на специальных свойствах множества стратегий и критериальных функций выигрыша игроков) условия векторного равновесия Неша, которые будут в некотором роде аналогами условий оптимальности в теории многокритериальной оптимизации [3].

**Теорема 1.** Для того чтобы ситуация  $x^*$  была векторным равновесием Неша, необходимо и достаточно, чтобы она была решением системы оптимизационных задач:

$$u_i^k(x^*) = \max_{x_i \in X_i} \left\{ u_i^k(x_i, x_{N \setminus i}^*) \mid u_i^j(x_i, x_{N \setminus i}^*) \geq u_i^j(x^*), j \in M_i \right\}, \forall k \in M_i, \forall i \in N. \quad (3)$$

*Доказательство.* Докажем необходимость. Пусть  $x^* \in NE(X_i, U_i; i \in N)$ . Тогда по определению (1)

получим:  $\neg \exists x \in X : x \succ^{NE} x^*$ . Построим множества  $V^i(x^*) = \left\{ x_i \in X_i \mid u_i^j(x_i, x_{N \setminus i}^*) \geq u_i^j(x^*), j \in M_i \right\}$

$\forall i \in N$ . Заметим, что  $V^i(x^*) \neq \emptyset, \forall i \in N$ . Предположим противное, что

$\exists i \in N, \exists k \in M_i : u_i^k(x^*) < u_i^k(\bar{x}) = \max_{x_i \in V^i(x^*)} \left\{ u_i^k(x_i, x_{N \setminus i}^*) \right\}$ . Тогда имеем  $u_i^j(\bar{x}) \geq u_i^j(x^*),$

$\forall j \in M_i; u_i^k(\bar{x}) > u_i^k(x^*)$ . Отсюда, по определению доминирования Неша, получим  $\bar{x} \succ^{NE} x^*$ , что приводит к противоречию  $x^* \notin NE(X_i, U_i; i \in N)$ .

Докажем достаточность. Пусть ситуация  $x^*$  удовлетворяет (3). Предположим противное, что  $x^* \notin NE(X_i, U_i; i \in N)$ . Тогда существует такой игрок с номером  $i \in N$ , для которого обнаружится

такая ситуация  $\bar{x} = (\bar{x}_i, x_{N \setminus i}^*) \in X$ , которая  $\bar{x} \succ^{NE} x^*$ , т. е.  $u_i^j(\bar{x}) \geq u_i^j(x^*), \forall j \in M_i$ , а для некоторого  $k \in M_i : u_i^k(\bar{x}) > u_i^k(x^*)$ . Отсюда

$u_i^k(x^*) < u_i^k(\bar{x}) \leq \max_{x_i \in X_i} \left\{ u_i^k(x_i, x_{N \setminus i}^*) \mid u_i^j(x_i, x_{N \setminus i}^*) \geq u_i^j(x^*), j \in M_i \right\}$ . Получили противоречие. ♦

Следует отметить, что, с вычислительной точки зрения, система задач (3) есть довольно сложной и многомерной (количество задач равняется суммарному количеству критериев всех игроков -  $\sum_{i \in N} M_i$ ),

поэтому целесообразно рассмотреть следующее условие векторного равновесия, которое может быть полезным в определенных случаях.



**Теорема 2.** Пусть  $\varphi_i(U_i)$  - действительнoзначная, монотонно возрастающая по каждой переменной функция,  $i \in N$ . Тогда, для того чтобы ситуация  $x^*$  была векторным равновесием Неша, необходимо и достаточно, чтобы она была решением системы оптимизационных задач:

$$\varphi_i(U_i(x^*)) = \max \left\{ \varphi_i(U_i(x_i, x_{N \setminus i}^*)) \mid u_i^j(x_i, x_{N \setminus i}^*) \geq u_i^j(x^*), j \in M_i \right\}, \forall i \in N. \quad (4)$$

*Доказательство.* Докажем необходимость. Пусть  $x^* \in NE(X_i, U_i; i \in N)$ . Тогда по определению (1)

$$\text{получим: } \neg \exists x \in X : x \succ^{NE} x^*. \text{ Построим множества } V^i(x^*) = \left\{ x_i \in X_i \mid u_i^j(x_i, x_{N \setminus i}^*) \geq u_i^j(x^*), j \in M_i \right\}$$

$\forall i \in N$ . Заметим, что  $V^i(x^*) \neq \emptyset, \forall i \in N$ . Предположим противное, что

$$\exists i \in N : u_i(U_i(x^*)) < u_i(U_i(\bar{x})) = \max \left\{ u_i(U_i(x_i, x_{N \setminus i}^*)) \mid x_i \in V^i(x^*) \right\}.$$

Тогда, поскольку функция  $\varphi_i$  монотонно возрастает по каждой переменной, имеем  $u_i^j(\bar{x}) \geq u_i^j(x^*), \forall j \in M_i$  (из условия  $x_i \in V^i(x^*)$ );  $\exists k \in M_i : u_i^k(\bar{x}) > u_i^k(x^*)$  (из монотонности  $\varphi_i$ ). Отсюда, по определению доминирования

Неша, получим  $\bar{x} \succ^{NE} x^*$ . Поэтому получим противоречие  $x^* \notin NE(X_i, U_i; i \in N)$ .

Докажем достаточность. Пусть ситуация  $x^*$  удовлетворяет (4). Предположим противное, что  $x^* \notin NE(X_i, U_i; i \in N)$ . Тогда существует такой игрок с номером  $i \in N$ , для которого обнаружится

такая ситуация  $\bar{x} = (\bar{x}_i, x_{N \setminus i}^*) \in X$ , которая  $\bar{x} \succ^{NE} x^*$ , то есть  $u_i^j(\bar{x}) \geq u_i^j(x^*), \forall j \in M_i$ , а для некоторого критерия  $k \in M_i : u_i^k(\bar{x}) > u_i^k(x^*)$ . Благодаря тому что функция  $\varphi_i$  есть монотонно возрастающей за каждой переменной, получим:

$$\varphi_i(U_i(x^*)) < \varphi_i(U_i(\bar{x})) \leq \max_{x_i \in X_i} \left\{ \varphi_i(U_i(x_i, x_{N \setminus i}^*)) \mid u_i^j(x_i, x_{N \setminus i}^*) \geq u_i^j(x^*), j \in M_i \right\}.$$

Что противоречит начальному предположению. ♦

Рассмотрим следствия из этой теоремы для определенных классов функций  $\varphi_i(U_i)$ ,  $i \in N$ . Без ограничения всеобщности будем считать  $u_i^j > 0, \forall j \in M_i, \forall i \in N$ .

**Следствие 1.** Пусть  $\rho_i^j > 0, \forall j \in M_i, \forall i \in N$ , тогда  $x^* \in NE(X_i, U_i; i \in N) \Leftrightarrow \sum_{i \in N} \rho_i^j u_i^j(x^*) =$

$$= \max_{x_i \in X_i} \left\{ \sum_{i \in N} \rho_i^j u_i^j(x_i, x_{N \setminus i}^*) \mid u_i^j(x_i, x_{N \setminus i}^*) \geq u_i^j(x^*), j \in M_i \right\}, \forall i \in N.$$

**Следствие 2.** Пусть  $s > 0, \rho_i^j > 0, \forall j \in M_i, \forall i \in N$ , тогда  $x^* \in NE(X_i, U_i; i \in N) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[ \sum_{i \in N} \rho_i^j (u_i^j(x^*))^s \right]^{\frac{1}{s}} = \max_{x_i \in X_i} \left\{ \left[ \sum_{i \in N} \rho_i^j (u_i^j(x_i, x_{N \setminus i}^*))^s \right]^{\frac{1}{s}} \mid u_i^j(x_i, x_{N \setminus i}^*) \geq u_i^j(x^*), j \in M_i \right\}, \forall i \in N.$$

**Следствие 3.** Пусть  $s > 0, \rho_i^j > 0, \forall j \in M_i, \forall i \in N$ , тогда  $x^* \in NE(X_i, U_i; i \in N) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \prod_{i \in N} (u_i^j(x^*))^{\rho_i^j} = \max_{x_i \in X_i} \left\{ \prod_{i \in N} (u_i^j(x_i, x_{N \setminus i}^*))^{\rho_i^j} \mid u_i^j(x_i, x_{N \setminus i}^*) \geq u_i^j(x^*), j \in M_i \right\}, \forall i \in N.$$

Остановимся теперь на слабых векторных равновесиях Неша.

**Теорема 3.** Пусть (без ограничения общности) функции выигрыша всех игроков в ситуации  $x^*$  принимают положительные значения, т. е.  $u_i^j(x^*) > 0, j \in M_i, i \in N$ . Ситуация  $x^*$  будет слабым векторным равновесием Неша тогда и только тогда, когда существуют векторы параметров

$\mu_i \in M_i^+ = \left\{ \mu_i = (\mu_i^j)_{j \in M_i} \mid \sum_{j \in M_i} \mu_i^j = 1; \mu_i^j > 0, j \in M_i \right\}, i \in N$  такие, что ситуация  $x^*$  будет

равновесием Неша в следующей параметрической игре:

$$G(\mu) = (X_i, \min_{j \in M_i} \mu_i^j u_i^j(x); i \in N). \quad (5)$$

Для слабого векторного равновесия  $x^*$  можно принять  $\mu_i = \hat{\mu}_i$ ,  $i \in N$ , где  $\hat{\mu}_i \in M_i^+$  - вектор параметров с компонентами:

$$\hat{\mu}_i^j = \lambda_i / u_i^j(x^*), \quad j \in M_i; \quad \lambda_i = 1 / \sum_{k \in M_i} \frac{1}{u_i^k(x^*)}, \quad i \in N, \quad (6)$$

и тогда  $\max_{x_i \in X_i} \min_{j \in M_i} \hat{\mu}_i^j u_i^j(x_i, x_{N \setminus i}^*) = \hat{\lambda}_i$ ,  $i \in N$ , т.е.  $\hat{\lambda}_i$  будет выигрышем  $i$  - го игрока в равновесии  $x^*$  параметрической игры (5).

*Доказательство.* Докажем достаточность. Пусть  $x^*$  - равновесие Неша параметрической игры (5) при некоторых значениях параметров  $\hat{\mu}_i \in M_i^+$ ,  $i \in N$ . Отсюда следует, что для любой ситуации  $x \in X$  и любого игрока  $i \in N$  имеют место неравенства:  $\min_{j \in M_i} \hat{\mu}_i^j u_i^j(x_i, x_{N \setminus i}^*) \leq \hat{\mu}_i^j u_i^j(x^*)$ ,  $\forall j \in M_i$ , поэтому

существует такой номер критерия  $j \in M_i$ , что  $u_i^j(x^*) \geq u_i^j(x)$ ,  $\forall x \in X, \forall i \in N$ . Следовательно  $\neg \exists x \in X : x \succ_{NE} x^*$ . Отсюда  $x^*$  будет слабым векторным равновесием Неша.

Докажем необходимость. Для этого возьмем вектор  $\hat{\mu}_i$ ,  $i \in N$  с компонентами, которые определены формулами (6). Отметим, что  $\hat{\mu}_i \in M_i^+$ ,  $i \in N$ . Из того, что  $x^*$  - слабое векторное равновесие следует,

что  $\neg \exists x \in X : x \succ_{NE} x^*$ , т.е.  $\exists i \in N, \exists j \in M_i : u_i^j(x^*) \geq u_i^j(x_i, x_{N \setminus i}^*)$ , а значит, неравенство  $\hat{\mu}_i^j u_i^j(x^*) \geq \hat{\mu}_i^j u_i^j(x_i, x_{N \setminus i}^*)$ . Поскольку  $\hat{\mu}_i^j u_i^j(x^*) = \lambda_i = 1 / \sum_{k \in M_i} \frac{1}{u_i^k(x^*)} = const$ , то для любой ситуации  $x \in X$  и любого игрока  $i \in N$  имеют место неравенства:  $\min_{j \in M_i} \hat{\mu}_i^j u_i^j(x_i, x_{N \setminus i}^*) \leq \hat{\mu}_i^j u_i^j(x^*)$ ,  $\forall j \in M_i$ . Поэтому  $x^*$  - равновесие Неша параметрической игры (5). ♦

Часто бывают полезными специальные условия оптимальности. Рассмотрим следующее.

**Теорема 4.** (достаточное условие векторного равновесия Неша). Пусть  $X_i \subseteq R^1$ ,  $U_i(x) = (u_i^j(x))_{j \in M_i}$  - на  $X_N$  векторные функции,  $\forall i \in N$ . Тогда каждое решение  $x$  следующей системы алгебраических неравенств:

$$\frac{\partial u_i^j(x_i, x_{N \setminus i})}{\partial x_i} \bullet \frac{\partial u_i^k(x_i, x_{N \setminus i})}{\partial x_i} \leq 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_i^j(x_i, x_{N \setminus i})}{\partial x_i} / \frac{\partial u_i^k(x_i, x_{N \setminus i})}{\partial x_i} \right) < 0; \quad j, k \in M_i, i \in N, \quad (7)$$

если оно есть внутренней точкой множества ситуаций  $X$ , будет векторным равновесием игры  $G$ .

*Доказательство.* Покажем сначала, что для того, чтобы вектор  $x^*$  был векторным равновесием достаточно существования для каждого игрока  $i \in N$  такого вектора параметров:

$$\rho_i = (\rho_i^j)_{j \in M_i}, \quad \sum_{j=1}^{m_i} \rho_i^j = 1, \rho_i^j > 0, j \in M_i, \quad \text{что} \quad \sum_{j \in M_i} u_i^j(x^*) = \max_{y_i \in X_i} \sum_{j \in M_i} \rho_i^j u_i^j(y_i, x_{N \setminus i}^*), \quad i \in N. \quad (8)$$

Действительно, пусть  $x^*$  удовлетворяет (8). Предположим от противного, что

$$\exists i \in N, \exists y_i \in X_i : u_i^j(y_i, x_{N \setminus i}^*) \geq u_i^j(x_i, x_{N \setminus i}^*), \forall j \in M_i; \quad \exists k \in M_i : u_i^k(y_i, x_{N \setminus i}^*) > u_i^k(x_i, x_{N \setminus i}^*),$$

тогда суммируя эти неравенства с коэффициентами  $\rho_i^j > 0$ ,  $j \in M_i$ , получим

$$\sum_{j \in M_i} \rho_i^j u_i^j(y_i, x_{N \setminus i}^*) > \sum_{j \in M_i} \rho_i^j u_i^j(x_i, x_{N \setminus i}^*), \quad \text{что противоречит условию (8).}$$

Запишем достаточные условия экстремума для системы параметрических задач оптимизации (8):

$$\sum_{j \in M_i} \rho_i^j \frac{\partial u_i^j(x_i, x_{N \setminus i})}{\partial x_i} = 0, \quad \sum_{j \in M_i} \rho_i^j = 1, \quad (9)$$

$$\rho_i^j \geq 0, \quad j \in M_i, \quad \sum_{j \in M_i} \rho_i^j \frac{\partial^2 u_i^j(x_i, x_{N \setminus i})}{\partial x_i^2} < 0 \quad (10)$$

и докажем, что они эквивалентны (7).

Без ограничения общности будем считать ранг функциональной матрицы

$\left( \frac{\partial u_i^k(x_i, x_{N \setminus i})}{\partial x_i} \right)_{k \in M_i}$  максимальным и равным 2 (в противном случае или все критерии игры - константы,

или они совпадают с точностью до констант), тогда одно из решений системы двух уравнений (9), с  $m_i$

неизвестными для некоторых  $j, k \in M_i$  при условии  $\frac{\partial u_i^k(x_i, x_{N \setminus i})}{\partial x_i} \neq \frac{\partial u_i^j(x_i, x_{N \setminus i})}{\partial x_i}$  имеет вид:

$$\rho_i^j = \frac{\partial u_i^k(x_i, x_{N \setminus i})}{\partial x_i} \left/ \left( \frac{\partial u_i^k(x_i, x_{N \setminus i})}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i^j(x_i, x_{N \setminus i})}{\partial x_i} \right) \right.; \quad \rho_i^k = 1 - \rho_i^j; \quad \rho_i^s = 0; \quad s \neq j, k; \quad s \in M_i. \quad (11)$$

После подстановки (11) в условия (10) получим следующее. Если  $\frac{\partial u_i^k(x_i, x_{N \setminus i})}{\partial x_i} > \frac{\partial u_i^j(x_i, x_{N \setminus i})}{\partial x_i}$ , то

$\frac{\partial u_i^k(x_i, x_{N \setminus i})}{\partial x_i} \geq 0, \frac{\partial u_i^j(x_i, x_{N \setminus i})}{\partial x_i} \leq 0$  и имеем неравенства (7), если  $\frac{\partial u_i^k(x_i, x_{N \setminus i})}{\partial x_i} < \frac{\partial u_i^j(x_i, x_{N \setminus i})}{\partial x_i}$ , то

$\frac{\partial u_i^k(x_i, x_{N \setminus i})}{\partial x_i} \leq 0, \frac{\partial u_i^j(x_i, x_{N \setminus i})}{\partial x_i} \geq 0$ , и снова получим (7). ♦

---

## Заключение

В заключение следует отметить, что приведенные выше общие условия векторного равновесия (теоремы 1, 2) существенно проигрывают в плане конструктивности условию слабого векторного равновесия (теорема 3), поскольку для их проверки надо решать достаточно сложные системы оптимизационных (не игровых) задач (3) или (4). В случае же слабого векторного равновесия, проверка условий сводится к игровой задаче (5), что позволяет более гибко использовать теорему 3 для решения прикладных задач. С другой стороны, сильная аксиома Парето, на которой базируется понятие векторного равновесия, имеет более широкий спектр применения на практике, чем слабая аксиома Парето, что сужает круг задач, в которых, может быть использована концепция слабого векторного равновесия.

---

## Ссылки

- [1] Мащенко С.О., Бабенко О.В. Использование функции полезности для поиска осторожных и доминирующих стратегий в многокритериальной игре// Вестник Киевского университета. Серия: физ.-мат. науки. 2000. 4. с.234-242.
- [2] Мащенко С.О. Равновесия Неша в многокритериальных играх// Вестник Киевского университета. Серия: физ.-мат. науки. 2001. 3. с.214-222.
- [3] Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.

---

## Информация об авторе

**Мащенко Сергей Олегович** – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Доцент; Проспект академика Глушкова, 6, Киев – 207, Украина; e-mail: [msomail@yandex.ru](mailto:msomail@yandex.ru)

## ЭВОЛЮЦИОННАЯ КЛАСТЕРИЗАЦИЯ СЛОЖНЫХ ОБЪЕКТОВ И ПРОЦЕССОВ

Виталий Снитюк

**Аннотация:** В статье предложен метод кластеризации сложных объектов и процессов, базирующийся на использовании генетического алгоритма. Рассмотрены аспекты его реализации и формирования фитнес-функции. Представлено решение задачи кластеризации областей Украины по социально-экономическим показателям и осуществлен его сравнительный анализ с результатами классических методов.

**Ключевые слова:** Кластеризация, генетический алгоритм.

### Введение

Процесс поступательного движения к созданию информационного общества сопровождаются проблемами, связанные с хранением и обработкой больших массивов данных. Их решение связано с интеллектуальным анализом данных, технологии которого формируются на пересечении искусственного интеллекта, статистики, теории баз данных. К ним принадлежат KDD (knowledge discovery in databases) – обнаружение знаний в базах данных, data mining (“раскопка данных”), OLAP (On-line analysis processing) – извлечение информации из многомерных баз данных и другие. Элементы указанных технологий становятся неотъемлемой частью электронных хранилищ данных (Warehouses). Значительную часть информации представляют данные, являющиеся социально-экономическими показателями функционирования сложных систем. Большим массивам информации свойственно присутствие шумовых эффектов, их обработка приводит к накоплению совокупной ошибки. Для преодоления указанной проблемы необходимо определять значимые факторы и осуществлять их анализ. Уменьшение информационной энтропии может быть также достигнуто путем группировки объектов и извлечения знаний в меньших и функционально связанных совокупностях. Такие процедуры направлены на последовательное преодоление неопределенности. Первым его шагом является решение задачи кластеризации.

### Анализ моделей и методов кластеризации

Задача кластеризации заключается в определении групп объектов (процессов), которые являются наиболее близкими один к другому по некоторому критерию. При этом никаких предположений об их структуре, как правило, не делается [Мандель, 1988], [Gorban, 2002]. Большинство методов кластеризации базируется на анализе матрицы коэффициентов сходства, в качестве которых выступают расстояние, сопряженность, корреляция и др. Если критерием или метрикой выступает расстояние, то кластером называют группу точек  $\Omega$ , такую, что средний квадрат внутригруппового расстояния до центра группы меньше среднего расстояния до общего центра в исходном наборе объектов, т.е.  $\bar{d}_{\Omega}^2 < \sigma^2$ , где

$$\bar{d}_{\Omega}^2 = \frac{1}{N} \sum_{X_i \in \Omega} (X_i - \bar{X}_{\Omega})^2, \quad \bar{X}_{\Omega} = \frac{1}{N} \sum_{X_i \in \Omega} X_i.$$
 В общем случае, критериями являются:

1. Расстояние Эвклида  $d(X_k, X_l) = \left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (X_{kj} - X_{lj})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$
2. Максимальное расстояние по признакам  $d(X_k, X_l) = \max_{1 \leq j \leq m} |X_{kj} - X_{lj}|.$
3. Расстояние Махаланобиса  $d(X_k, X_l) = [(X_k - X_l) \cdot R^{-1} \cdot (X_k - X_l)^T]^{-\frac{1}{2}}.$
4. Расстояние Хэмминга  $d(X_k, X_l) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |X_{kj} - X_{lj}|.$

Решение задачи минимизации расстояния между объектами равносильно решению задачи минимизации расстояния до объекта, имеющего усредненные характеристики, поскольку, например, для расстояния Хэмминга

$$\sum_{\substack{j=1 \\ k < l}}^m |X_{kj} - X_{lj}| = \sum_{\substack{j=1 \\ k < l}}^m |X_{kj} - \bar{X} + \bar{X} + X_{lj}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ k < l}}^m |X_{kj} - \bar{X}| + \sum_{\substack{j=1 \\ k < l}}^m |X_{lj} - \bar{X}| \leq \sum_{j=1}^m |X_{kj} - \bar{X}| + \sum_{j=1}^m |X_{lj} - \bar{X}| = 2 \sum_{j=1}^m |X_{kj} - \bar{X}|.$$

Задаче кластеризации сопутствуют две проблемы: определение оптимального количества кластеров и получение их центров. Исходными данными для задачи кластеризации являются значения параметров объектов исследования. Очевидно, что определение оптимального количества кластеров является прерогативой исследователя. Предположим, что число кластеров  $K$  задано и  $k \ll m$ , где  $m$  - количество объектов. Получим задачу

$$\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{m_i} \|X_j - \bar{X}_i\| \rightarrow \min, \quad (1)$$

где  $\bar{X}_i$ ,  $i = \overline{1, K}$  - среднее значение в кластере,  $\|X_j - \bar{X}_i\|$  - расстояние между объектами. Решением задачи (1) являются центры кластеров  $\bar{X}_i$ , которые могут содержаться среди рассматриваемых объектов, что является достаточно строгим условием, и могут быть представлены любыми точками области исследования.

К традиционным методам кластерного анализа относят древовидную кластеризацию, двухвходовое объединение, метод  $K$  средних, метод дендритов, метод корреляционных плеяд и метод шаров [Плюта, 1989]. Преимуществами указанных методов является их простота, инвариантность их техники относительно характера исходных данных и используемых метрик. К недостаткам относят слабую формализованность, что затрудняет применение вычислительной техники, а также низкую точность, следствием чего является предварительные оценки структуры пространства факторов и их информативности. Еще одним методом решения задачи кластеризации является использование самоорганизованной карты Кохонена [Kohonen, 1988]. Проблемой использования такой нейронной сети является выбор начальных весовых коэффициентов, непрерывный характер функционирования и эффективность, оценка которой на сегодняшний день остается проблемой.

В качестве альтернативного метода предлагаем использовать генетический алгоритм.

### Генетические алгоритмы – неклассический метод решения задачи оптимизации

Первые варианты генетического алгоритма и рассмотрение аспектов его применения появились в работах [Fraser, 1962], [Fraser, 1968], [Bremermann, 1965], [Holland, 1969], [Holland, 1975]. Дальнейшие исследования показали его эффективность в решении инженерных, экономических экологических и других проблем. Главной идеей, лежащей в основе построения генетического алгоритма, является использование идей природного отбора, селекции и мутаций. Его канонический вариант содержит такие этапы:

1. Определение генеральной совокупности особей  $\Theta$ , являющихся потенциальными решениями задачи оптимизации фитнес-функции.
2. Выполнение предварительных шагов алгоритма, заключающихся в определении количества элементов  $K$  выборочной популяции  $\Xi$ , причем  $k \ll |\Theta|$ ; выборе способа нормирования исходных данных; выборе варианта кроссовера, мутации и инверсии, а также соответствующих вероятностей.
3. Для каждого элемента  $\theta_i \in \Xi$ ,  $i = \overline{1, k}$  вычисляем значения фитнес-функции  $f_i = F(\theta_i)$ .
4. С вероятностями  $P_i^k$ , пропорциональными значением  $f_i$ , выбрать две особи и осуществить кроссовер, вследствие выполнения которого получим две новых особи.
5. С вероятностью  $\frac{1}{2}$  выбираем одну из полученных особей и с вероятностью  $P^m$  осуществляем мутацию.

6. Полученную особь помещаем в новую популяцию  $\Xi^n$ .

7. Повторяем шаги 3-6  $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$  раз.

8. Переписываем элементы  $\Xi^n$  в популяцию  $\Xi$ , удаляя старые особи.

Критерием окончания генетического алгоритма могут выступать следующие условия: сходимость элементов популяции  $\Xi$  к одному элементу; максимальное абсолютное отклонение между элементами популяции  $\Xi$  будет меньше некоторого положительного числа  $\delta$ ; максимальное абсолютное отклонения между значениями фитнес-функции будет меньше некоторого малого положительного числа  $\varepsilon$ .

### Формирование фитнес-функции задачи кластеризации

Исходными данными задачи кластеризации являются значения факторов (табл. 1).

Таблица 1: Значения факторов исследования

1	$X_{11}$	$X_{12}$	...	$X_{1n}$
2	$X_{21}$	$X_{22}$	...	$X_{2n}$
...	...	...	...	...
m	$X_{m1}$	$X_{m2}$	...	$X_{mn}$

Предварительно, выполним их нормирование, например, по формуле  $x'_{ij} = \frac{x_{ij} - x_{j\min}}{x_{j\max} - x_{j\min}}$ . Вследствие

такого преобразования значения всех факторов будут лежать в единичном гиперкубе  $[0,1]^n$ . Фитнес-функция реализуется следующим алгоритмом:

Шаг 1. Значение фитнес-функции положить равным нулю ( $F = 0$ .)

Шаг 2. Задать количество кластеров  $K$  и указать значение  $m$ .

Шаг 3. Выполнить инициализацию матрицы принадлежности элементов к кластерам  $T_k$ .

Шаг 4. Для всех объектов выполнить следующие шаги. Пусть  $n = 1$

Шаг 5. Вычислить расстояние от  $n$ -го объекта до центров всех  $K$  кластеров, которые являются особями из выборочной популяции.

Шаг 6. Среди всех расстояний  $d_j, j = \overline{1, K}$  выбрать минимальное  $d_q$  и отнести  $n$ -й объект к  $q$ -му кластеру. Внести соответствующую запись в матрицу  $T_k$ .

Шаг 7.  $F = F + d_q, n = n + 1$ .

Шаг 8. Если шаги 5-7 выполнены для всех объектов, то получено значение фитнес-функции  $F$ , в противном случае перейти на шаг 5.

Очевидно, что алгоритм получения фитнес-функции можно оптимизировать. Возможность улучшения является его внутренним свойством. Многообразие вариантов операций генетического алгоритма представляют множество внешних свойств процесса получения фитнес-функции. Возможность решения задачи ее оптимизации также предполагает двоичное и десятичное представление исходных данных. И если в первом случае в процедурах генетического алгоритма доминирующим является равномерное распределение, то во втором – при поиске оптимального решения предпочтение отдается значениям, имеющим нормальное распределение с математическим ожиданием, совпадающим с центром кластера. Определение оптимальной дисперсии – еще одна задача, которая остается нерешенной.

### Кластеризация областей Украины по социально-экономическим признакам

Для проверки эффективности предложенного метода кластеризации были выбраны области Украины. Кластеризация должна была быть осуществлена, исходя из значений социально-экономических показателей. Такими показателями являются:

$X_1$  - валовая прибавочная стоимость в расчете на одного человека (в фактических ценах, грн.);

- $X_2$  - территория (тис. кв. км);
- $X_3$  - инвестиции в основной капитал на одного человека (в сравнительных ценах, грн.);
- $X_4$  - прямые иностранные инвестиции на одного человека (долл. США);
- $X_5$  - занятость населения на 10 тыс. человек;
- $X_6$  - денежные доходы населения на одного человека (грн.);
- $X_7$  - кредиты, предоставленные субъектам хозяйствования на одного человека;
- $X_8$  - количество полученных патентов на изобретения на 10 тыс. человек.

В качестве классических методов были выбраны древовидная классификация и метод К средних. Априорно задано два кластера. По методу К средних получены следующие результаты (табл. 2). К первому кластеру отнесены Днепропетровская, Донецкая, Запорожская, Николаевская, Одесская, Полтавская и Харьковская области. Согласно древовидной кластеризации (рис. 1) к первому кластеру отнесены те же области, кроме Донецкой области, хотя она и близка к элементам первого кластера.

Таблица 2

область	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
кластер	2	2	2	1	1	2	2	1	2	2	2	2	2	1	1	1	2	2	2	1	2	2	2	2

Кластеризация была проведена также с использованием эволюционного моделирования. Критерием окончания вычислительного процесса была выбрана максимальное количество итераций равное 1000. Для тех же двух кластеров и восьми факторов количество переменных (хромосома), для которых проводилась оптимизация фитнес-функции, составило 16. В выборочную популяцию вошло двадцать элементов. Учитывая, что фитнес-функция являлась полиэкстремальной, вероятность мутации составила 0, 4. Такое значение увеличило время вычислений, но значительно увеличило точность расчетов за счет выбивания функции из локальных минимумов.

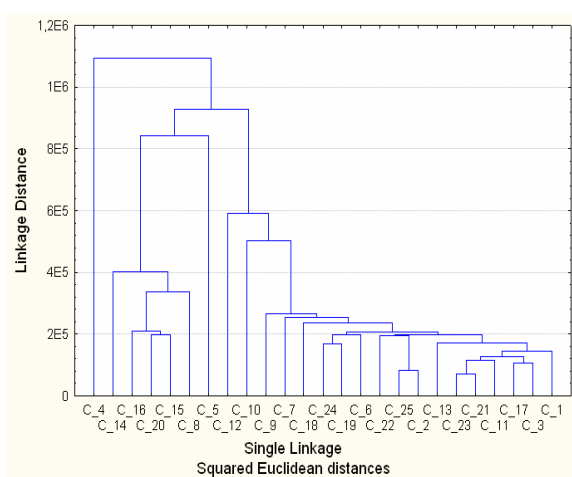


Рис.1 – Результаты древовидной кластеризации

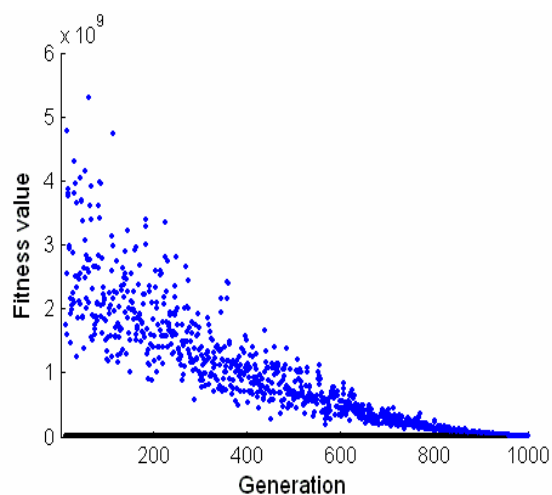


Рис.2 – Значение фитнес-функции

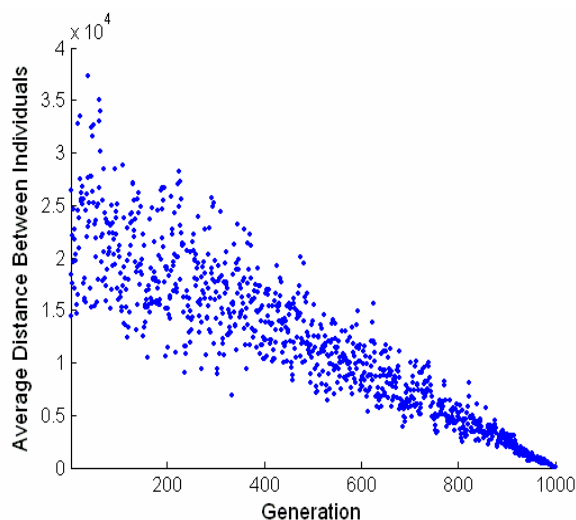


Рис.3 – Расстояние между центрами кластеров

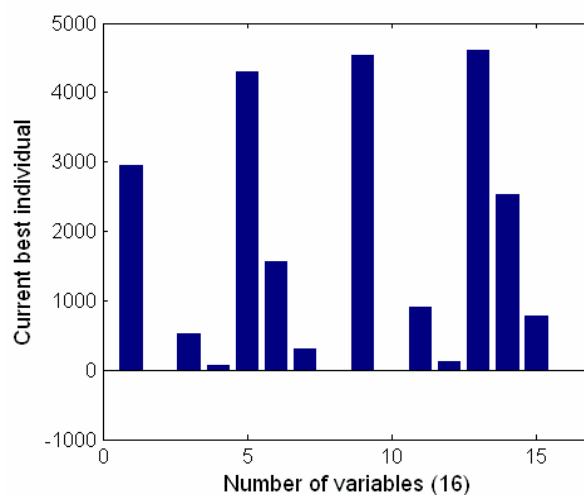


Рис.4 – Координаты центров кластеров

Для контроля за процессом вычислений в режиме реального времени выводилась информация о значении фитнес-функции на каждой итерации (рис.2); о среднем расстоянии между центрами кластеров (рис. 3); значения центров кластеров (рис. 4). Значение фитнес-функции уменьшилось с  $6 \cdot 10^9$  до 11351587, причем на начальных этапах уменьшение происходило гиперболически, а на последних – линейно. Среднее расстояние между центрами кластеров уменьшалось линейно, с постоянно уменьшающейся дисперсией.

В результате вычислений получено два центра кластеров. Координаты первого  $X_1 = 4553, X_2 = 0,01, X_3 = 915, X_4 = 99, X_5 = 4623, X_6 = 2554, X_7 = 791, X_8 = 1,34$ .

Координаты второго  $X_1 = 2952, X_2 = 0,02, X_3 = 530, X_4 = 58, X_5 = 4288, X_6 = 1555,$

$X_7 = 297, X_8 = 0,59$ . К первому кластеру относятся Днепропетровская, Донецкая, Николаевская, Одесская, Полтавская и Харьковская области. Результаты трех рассмотренных методов являются близкими, что свидетельствует о точности эволюционного моделирования. Его преимуществом является также указание центров кластеров и формализация вычислительного процесса. Как было указано выше, предложенная технология может быть усовершенствована.

## Заключение

Предложенный метод эволюционного моделирования, базирующийся на использовании генетического алгоритма, эффективно функционирует при обработке массивов большой размерности, поскольку в нем оптимально сочетаются целенаправленный поиск и элементы случайности, направленные на выбивание целевой функции из локальных минимумов. Никаких предварительных условий для его использования не требуется. Главным условием оптимизации вычислений является правильная алгоритмизация расчета значений целевой функции. Многовекторность процесса улучшения быстроты алгоритма (для генетических алгоритмов особенно актуально) и его точности (поиска глобального минимума фитнес-функции), а также его востребованность свидетельствуют о необходимости решения задачи оптимизации предложенного метода.

## Библиография

- [Мандель, 1988] И.Д. Мандель. Кластерный анализ. Москва, Финансы и статистика, 1988.  
 [Gorban, 2002] A.N. Gorban, A.Yu. Zinovyev. Method of Elastic Maps and its Applications in Data Visualization and Data Modelling // Int. Journal of Computing Anticipatory Systems, CHAOS. - 2002. - Vol. 12. - P. 353-369.



- [Плюта, 1989] В. Плюта. Сравнительный многомерный анализ в эконометрическом моделировании. – Москва: Финансы и статистика, 1989.
- [Kohonen, 1988] T. Kohonen. Self-organization and associative memory. – New-York, 2d. ed., Springer Verlag, 1988.
- [Fraser, 1962] A.S. Fraser. Simulation of genetic systems. J. of Theor. Biol., vol. 2, pp. 329-346, 1962.
- [Fraser, 1968] A.S. Fraser. The evolution of purposive behavior. In Purposive Systems, H. von Foerster, J.D. White, L.J. Peterson, and J.K. Russel, Eds. Washington, DC: Spartan Books, pp. 15-23, 1968.
- [Bremermann, 1965] H.J. Bremermann, M. Rogson, S. Salaff. Search by Evolution. In Biophysics and Cybernetic Systems. M. Maxfield, A. Callahan, and L. J. Fogel, Eds. Washington DC: Spartan Books, pp. 157-167, 1965.
- [Holland, 1969] J.H. Holland. Adaptive plans optimal for payoff-only environments. Proc. of the 2nd Hawaii Int. Conf. on System Sciences, pp. 917-920, 1969.
- [Holland, 1975] J.H. Holland. Adaptation in Natural and Artificial Systems. Ann Arbor: Univ. of Michigan Press, 1975.
- [Skurikhin, 1993] A.N. Skurikhin, A.J. Surkan. Identification of parallelism in neural networks by simulation with language J. Proc. of the Intern. Conf. on KPL, APL Quote Quad, Vol.24, No.1, pp.230-237, Toronto, Canada, August 1993.

---

### Информация об авторе

---

**Виталий Снитюк** – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, докторант факультета кибернетики; пр. Акад. Глушкова 2, стр. 6, Киев, Украина; e-mail: [svit@majar.com](mailto:svit@majar.com)

## СИСТЕМА КАЧЕСТВЕННОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКИХ ДАННЫХ И ПСИХОГРАФИИ ЭКСПЕРТОВ

**А.Ф. Волошин, В.М. Головня, М.В. Панченко**

**Резюме.** Дается описание системы технологического прогнозирования, основанной на методе дерева решений. Ставится задача сбора и обработки экспертной информации, предлагаются методы ее обработки, которые позволяют учитывать нечеткость информации и разрешают проблему большой размерности, которая возникает при значительном объеме дерева решений. Приводится описание системы диагностики эпилептических заболеваний.

**Ключевые слова.** Метод дерева решений, нечеткие экспертные данные, поиск оптимальных путей.

---

### Вступление

---

Для прогнозирования поведения немонотонных процессов существует целый ряд так называемых методов качественного анализа, которые используют данные экспертов. Одним из наиболее распространенных из них является метод дерева решений, суть которого состоит в представлении развития исследуемого явления в виде некоторой иерархической структуры, которая строится на основе экспертной информации [Тэрano, 1993].

Представляемая система позволяет организовывать опрос экспертов [Макаров, 1982], на основе собранной информации строить дерево решений и на основе его анализа делать прогноз развития явления на определенный период. Для этого ставится задача сбора экспертной информации, ее анализа, предлагаются оригинальные методы, которые ее решают.

На основе предложенной системы были созданы такие прикладные СППР:

- система диагностики эпилептических заболеваний;
- система диагностики кардиологических заболеваний.

В процессе их создания проведены опросы экспертов, построены соответствующие деревья решений. Для нахождения прогноза к построенным деревьям применяются указанные методы, основная цель работы которых – найти оптимальные пути в дереве решений и суммарные веса вершин.

Представленные результаты являются развитием работ [Волошин, 1999],[Волошин, 2001],[Voloshin, 2003].

### Поиск оптимальных путей

Постановка задачи анализа дерева решений:

пусть  $f_i(x_1^0, x_2^0, y) = \left( \sum_{j=1}^{l-1} a_{y_j y_{j+1}}^i \right) * T((x_1^0 - y_1), (x_2^0 - y_l), a_{y_1 y_2}^i, \dots, a_{y_{l-1} y_l}^i); i = \overline{1, K}$ , -  $K$  оценочных

функционалов для альтернативы (пути)  $y = (y_1, \dots, y_l), l \leq n$ ,  $l$  - количество дуг, которые входят в путь  $y$ ,  $n$  - количество вершин в дереве решений,  $x_1^0$  - начальная вершина,  $x_2^0$  - конечная вершина.

Тут  $T(a_{y_1 y_2}, \dots, a_{y_{l-1} y_l}) = 0$ , если  $a_{y_1 y_2} \dots a_{y_{l-1} y_l} = 0$  и  $T(a_{y_1 y_2}, \dots, a_{y_{l-1} y_l}) = 1$  иначе,  $Y$  - множество всех возможных путей (то есть множество всех возможных комбинаций  $N$  вершин дерева решений).

Тогда задача обработки решений имеет вид:

1) в случае задания отношения предпочтения четко: необходимо найти такую альтернативу  $y^* = (y_1^*, \dots, y_p^*)$ , что  $\neg \exists y \in Y; y = (y_1, \dots, y_l); y \neq y^* : f(y) \geq f(y^*)$ , где  $l$ -количество элементов в векторе  $y$ , при условии

$$f(x_1^0, x_2^0, y) = \left( \sum_{j=1}^{l-1} a_{y_j y_{j+1}} \right) * T((x_1^0 - y_1), (x_2^0 - y_l), a_{y_1 y_2}, \dots, a_{y_{l-1} y_l});$$

2) в случае задания отношения предпочтения нечетко: необходимо найти такое множество  $Y' \subseteq Y$ , что для  $\forall y' \in Y'$  выполняется условие:  $\neg \exists y \in Y, y \notin Y'$ , что  $\forall i, i = \overline{1, K}, f_i(y') \leq f_i(y)$ ;  $\forall i, i = \overline{1, K}, f_i(y') \geq f_i(y)$  (если необходимо найти самые длинные пути);

или необходимо найти такое множество  $Y' \subseteq Y$ , что для  $\forall y' \in Y'$  выполняется условие:  $\neg \exists y \in Y, y \notin Y', y = (y_1, \dots, y_l)$ , где  $l$ -количество элементов в векторе  $y$ , что  $\forall i, i = \overline{1, K}, f_i(y') \geq f_i(y)$  (если необходимо найти самые коротки пути).

Ни один из существующих на данный момент методов не позволяет решить такую задачу. Поэтому, на основе известных методов Дейкстры и Флойда [Майника, 1981], созданы оригинальные методы поиска на дереве.

*Алгоритм поиска самого длинного пути.* Необходимо найти самый длинный путь из вершины  $s$  в вершину  $t$ . Каждой вершине  $x$  соответствует оценка  $d(x)$ . Каждая вершина может быть окрашена и раскрашена (лишена окраски).

Шаг 1. Окрашиваем вершину  $s$ . Пусть  $d(s) = 0, d(x) = -\infty, y = s$ .

Шаг 2. Для всех вершин пересчитываем:

$$d(x) = \max \{d(x), d(y) + a(y, x)\},$$

где  $a(y, x)$  соответствует длине дуги, которая соединяет вершины  $y$  и  $x$ . Если же такая дуга отсутствует, то  $a(y, x) = -\infty$ .

Если  $d(x) = -\infty$  для всех неокрашенных вершин  $x$  и вершина  $t$  не окрашена, закончить процедуру алгоритма: в исходном графе отсутствуют пути из  $s$  в неокрашенные вершины. Иначе окрасить ту из неокрашенных вершин  $x$ , для которой величина  $d(x)$  наибольшая. Кроме того, окрасить дугу, которая ведет в выбранную на данном шаге  $x$ . Положим  $y = x$ . Если  $d(x)$  для неокрашенной вершины  $x$  увеличивается, то раскрашиваем ее и соответствующую дугу.

Шаг 3. Если для всех неокрашенных вершин  $d(x) = -\infty$  и вершина  $t$  окрашена, то самый длинный путь найден, закончить работу алгоритма.

Для этого метода сформулировано и доказано утверждение:

*Утверждение 1.* Алгоритм нахождения самого длинного пути требует выполнения  $1,5n^3$  операций сравнения, где  $n$  – количество вершин в дереве.

Для случая задания переходов в дереве решений нечетко, то есть когда  $a_{ij} = (a_{ij}^1, \dots, a_{ij}^m)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $m$  – количество элементов вектора  $a_{ij}$ , разработано оригинальный метод нахождения самого длинного пути.

*Модифицированный алгоритм поиска самого длинного пути.* Необходимо найти самый длинный путь из вершины  $s$  в вершину  $t$ . Дуги графа заданы нечетко, с помощью векторов. Каждой вершине  $x$  соответствует вектор оценок  $d_i(x)$ . Каждую вершину можно окрасить и раскрасить.

*Шаг 1.*  $d_i(s) = (0, \dots, 0)$  и  $d_i(x) = (-\infty, \dots, -\infty)$  для всех  $x \neq s$ ,  $i = 0$ .

*Шаг 2.* Для каждой неокрашенной вершины  $x$  следующим образом пересчитываем величину  $d_i(x)$ :

$$d_i(x) = \max \{d_i(x), d_i(y) + a(y, x)\}.$$

где вектор  $a(y, x)$  соответствует длине дуги, которая соединяет вершины  $y$  и  $x$ , и  $\max$  рассматривается поэлементно. Если же такая дуга отсутствует, то  $a(y, x) = (-\infty, \dots, -\infty)$ .

Очевидно, что возможен случай, когда векторы  $d_i(x)$  и  $d_i(y) + a(y, x)$  невозможно сравнить. Тогда

$$d_i(x) = d_i(x), \text{ та } d_{i+1}(x) = d_i(y) + a(y, x), \text{ } i = i + 2.$$

Это значит, что в эту вершину существуют два возможных пути.

Если же векторы можно сравнить, то

$$d_i(x) = \max \{d_i(x), d_i(y) + a(y, x)\} \text{ та } i = i + 1.$$

Таким образом имеем для вершин  $x_i$  такие характеристики:

$$d(x_i) = (d_1(x_i), \dots, d_k(x_i)).$$

$d_i(x_i)$  – это вектор, который определяет длину одного из возможных путей к вершине  $x_i$ .

После этого выделяем из множества оценок  $d(x_i)$  паретовское множество [Макаров, 1982]. Если для  $i$ -й окрашенной вершины после выделения паретовского множества размер вектора  $d(x_i)$  изменился, то раскрашиваем ее.

Затем выбираем доминирующие вершины  $x_i, i \in A, A$  – некоторые множества, для которых выполняется  $\neg \exists x_j; j \notin A \neg \exists k : d_k(x_j) \geq d_p(x_i) \forall p$ , и окрашиваем их.

*Шаг 3.* Если все вершины, для которых  $d(x) > -\infty$  окрашены, и после шага 2 ни одно  $d(x)$  не увеличилось, завершить процедуру. Иначе перейти к шагу 2.

Для этого метода сформулировано и доказано такое утверждение:

*Утверждение 2.* Модифицированный алгоритм нахождения самого длинного пути требует выполнения  $O(n^4 K \ln 2)$  операций, где  $n$  – количество вершин в дереве, а  $K$  – количество элементов в векторах, которыми задаются переходы в дереве.

При применении метода поиска самого длинного пути и модифицированного метода поиска самого длинного пути для обработки деревьев значительного объема, возникает проблема большой размерности [Волошин, 1989], связанная со значительными временными затратами. Для ее решения создано оригинальный метод локальной оптимизации, на основе известного метода вектора спада [Сергиенко, 1985].

*Модифицированный метод вектора спада.* Необходимо найти самый длинный путь из вершины  $a_s$  в вершину  $a_t$ . Известен некоторый начальный путь  $a = (a_s, \dots, a_t)$ , который соединяет эти две вершины. Задаем некоторую окрестность  $r$  (глубину поиска).

Шаг 1.  $y = s$ .

Шаг 2. С помощью описанных методов находим самый длинный путь из  $a_y$  в  $a_{y+r}$ . Заменяем соответствующий сегмент в пути  $a$ ;  $y = y + 1$ .

Шаг 3. Если  $y + r < t$ , то перейти к шагу 2. Если же  $y + r \geq t$ , то находим самый длинный путь из  $y$  в  $t$ . Заменяем соответствующий сегмент в пути  $a$ . Заканчиваем работу алгоритма.

Таким образом, улучшая начальный путь  $a$ , мы находим оптимальный (локально оптимальный) путь. Для этого метода сформулировано и доказано такое утверждение.

*Утверждение 3.* Применение модифицированного алгоритма вектора спада требует выполнения  $r^3 * (K - r)$  операций сравнения, где  $r$  – глубина поиска,  $K$  – длина начального пути.

### Описание инструментальной системы

Дерево решений задается матрицей инцидентностей. В каждой ячейке матрицы находится вектор  $a_{ij}$  - который задает вероятность перехода из вершины  $i$  в вершину  $j$ . Он состоит из десяти натуральных чисел  $(a_1, \dots, a_{10}), 0 \leq a_i \leq 1$ . Сумма элементов каждой строки равна единичному вектору. Матрица заполняется путем опроса экспертов. Существуют функции: добавление строк и столбцов, дублирование числа, словарь, сохранение таблицы в файле, загрузка таблицы из файла.

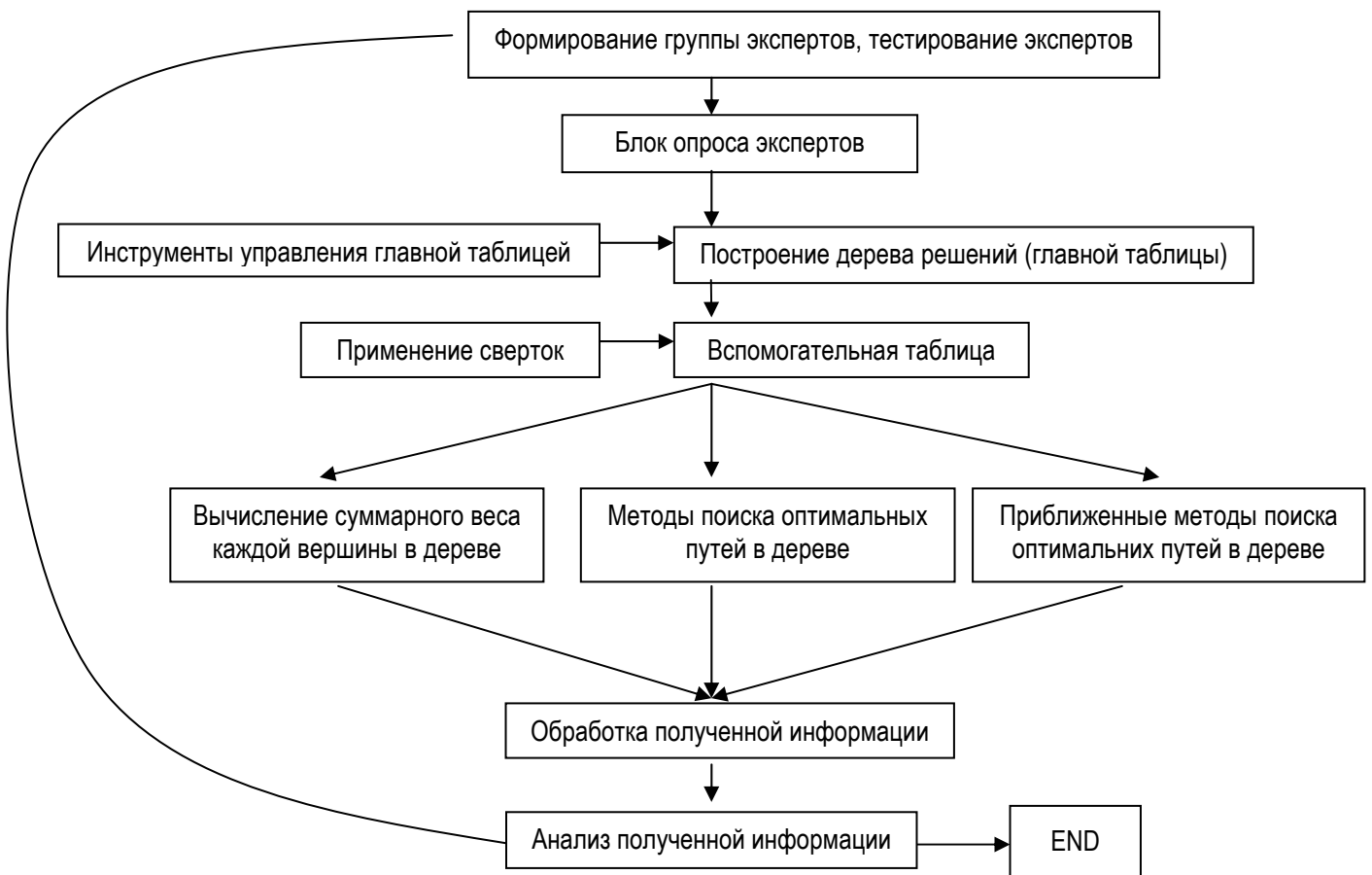


Рис. 1

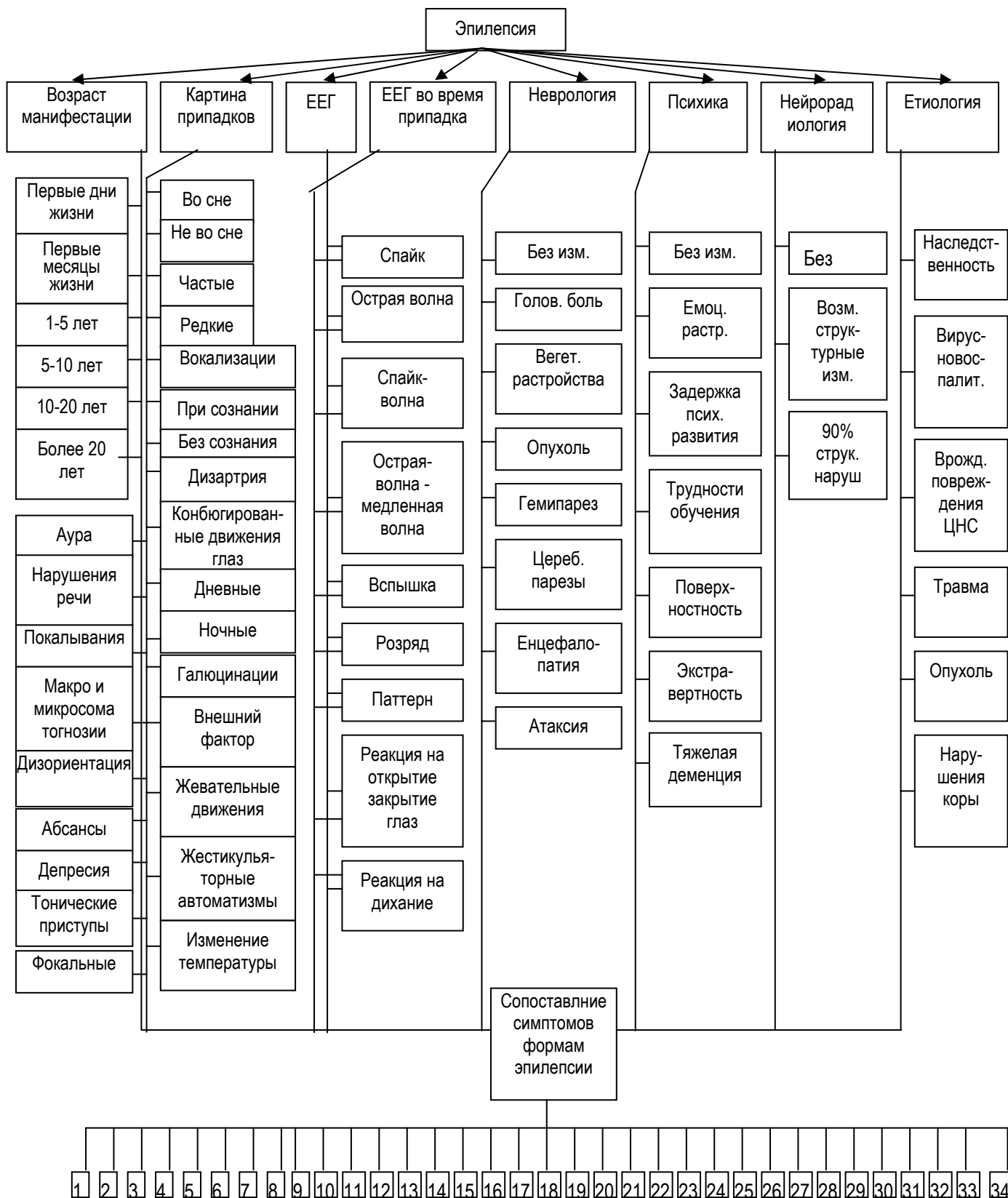


Рис. 2

Для экспертного опроса необходимо воспользоваться формой, которая позволит задать до 10 матриц одинаковой размерности. Каждая такая матрица – это результат сравнения экспертом вариантов вершин, которые могут быть включены в дерево (матрицы  $A^j$ ). Далее проводится анализ этих матриц в результате которого определяются вершины, которые включаются в дерево, и вероятности, с которыми возможен переход в них из вершины верхнего уровня. Эти результаты заносятся в текущую строку матрицы таблицы, которая описывает уровень дерева решений.

После задания матрицы инцидентностей, возможен ее анализ. Для этого необходимо задать две вершины в дереве решений, и будет найден самый короткий (наименее вероятностный) и самый длинный (наиболее вероятностный) путь, соединяющий эти вершины. Так же возможен подсчет общего веса каждой вершины в дереве.

Схема работы созданной программной системы поддержки принятия решений изображена на рисунке 1.

Созданная инструментальная система применялась для создания СППР, которые успешно решали практические задачи, в частности, для создания системы диагностики эпилептических заболеваний на базе знаний эксперта (одного из авторов). Для этого было построено соответствующее дерево решений, которое изображено на рисунке 2.

На верхних уровнях этого дерева находятся основные характеристики, анализируя которые врач ставит диагноз пациенту. На нижних уровнях собраны конкретные значения, которые могут принимать эти характеристики. В листах этого дерева находятся варианты заболевания, соответствующие международной классификации заболеваний. Расставляя оценки наличия у пациента конкретных симптомов и применяя описанные методы и алгоритмы, врач-эпилептолог может вычислить вес (вероятность) каждого листа (заболевания) или найти самый длинный (самый вероятностный) путь, который соединяет пару заданных вершин, что соответствует нахождению наиболее вероятностного сценария развития заболевания.

Фрагмент дерева решений приведен на рисунке 2.

Также, с помощью описанной системы была создана СППР, которая позволяет диагностировать кардиологические заболевания на основе электрокардиограммы. С помощью экспертов было построено аналогичное предыдущему дереву решений, на верхнем уровне которого находятся элементы электрокардиограммы (QRS комплекс, Р и S пики и т.д.), на нижних уровнях – конкретные значения этих параметров, а в листах – варианты заболевания (по международной классификации их 65). Как и в предыдущем случае, анализ построенного дерева решений состоит в вычислении суммарных весов листов и нахождении оптимальных путей в дереве решений.

---

## Вывод

---

Возможно применение данной системы в таких областях как медицинская диагностика, прогнозирование курса валюты и т.п. Причем точность работы системы зависит только от квалифицированности экспертов.

---

## Библиография

---

1. [Тэрano, 1993] Т. Тэрano, К. Асаи, М. Сугэно. Прикладные нечеткие системы.- М.: Мир 1993. –345 с.
2. [Волошин, 2001] Волошин А.Ф., Панченко М.В. Прогнозирование нестабильных процессов с помощью метода дерева решений, на основе метода попарных сравнений для анализа экспертной информации // Труды Международной научно-практической конференции KDS-2001 “Знание – диалог - решение”, Т.1, Санкт-Петербург, 2001. – С.50-53. (англ.)
3. [Волошин, 1989] Волошин А.Ф. Метод локализации области оптимума в задачах математического программирования// Доклады АН СССР, т. 293, №3, 1989. – С. 269-273.
4. [Волошин, 1999] Волошин А.Ф., Панченко М.В., Пихотник Е.П. Экспертная система поддержки прогнозирования курса гривны // Искусственный интеллект, 1999, № 2. – С.354-359. (укр.)
5. [Макаров, 1982] Макаров И. М. и др. Теория выбора и принятия решений М.: Наука, 1982. – 328 с.
6. [Волошин, 2001] Волошин А.Ф., Гнатенко Г.М. Построение коллективной ранжировки на основе меры рангов объектов // Вестник Киевского Национального Университета, Кибернетика, № 4, 2001. – 478 с. (укр.)

7. [Сергиенко, 1985] Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – Киев: Наука Думка, 1985.-384 с.
8. [Майника, 1981] Э. Майника. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. - М.: Мир, 1981. – 321 с.
9. [Voloshin, 2003] Voloshin O.F., Panchenko M.V. The System of Quality Prediction on the Basis of a Fuzzy Data and Psychography of the Experts // International Journal "Information & Application".-2003.-№3. - P. 261-265.

---

### Информация об авторах

---

**Волошин О.Ф.**, профессор, КНУ им. Тараса Шевченко, факультет кибернетики, Украина, Киев.

**Головня М.В.**, врач-эпилептолог, 1-я клиническая больница, Украина, Киев.

**Панченко М.В.**, инженер первой категории, КНУ им. Тараса Шевченко, факультет кибернетики;  
e-mail: – [panchenko@ukr.net](mailto:panchenko@ukr.net)

## ПРОЦЕДУРЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ ВЕКТОРА ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЗА ОБУЧАЮЩИМИ ВЫБОРКАМИ В ЗАДАЧЕ ПОТРЕБЛЕНИЯ

Елена В. Дробот

**Abstract:** *The author analyses the task of an individual consumers' choice on the set of teaching excerpts. It is suggested to analyse the function of consumer's value as additive reduction. For localization of the vector of weighting coefficients of additive reduction the procedures based on metrics of distance of the object towards the ideal point are suggested.*

**Keywords:** *The theory of consuming, the function of value.*

**Аннотация:** *Рассматривается задача индивидуального потребительского выбора на множестве обучающих выборок. Предлагается рассматривать функцию полезности потребителя в виде аддитивной свертки. Для локализации вектора весовых коэффициентов аддитивной свертки предлагаются процедуры, базирующиеся на метрике близости объекта к идеальной точке.*

**Ключевые слова:** *теория потребления, функция полезности.*

---

### Введение

---

Типичной задачей в теории потребления математической экономики традиционно считается [Пономаренко, 1994] задача построения (восстановления, определения) функции полезности потребителя, которая определяет его предпочтения относительно определенного набора товаров (благ). При этом рассматриваются, как правило, так называемые "обучающие выборки": векторные наборы благ  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , каждая компонента которых является количеством единиц соответствующих товаров,  $n$  – количество товаров. Цены товаров и бюджетные ограничения считаются заданными.

Выбор потребителя характеризуется отношением предпочтения  $R$ , суть которого состоит в следующем: о каждых двух наборах благ он может указать наличие (степень) предпочтения или же их равноценность. Априори считается, что выбор потребителем осуществляется в соответствии с его собственной функцией полезности  $U(x)$ , значение которой на обучающей выборке  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  соответствует индивидуальной оценке пользователя для этого набора. Задача потребительского выбора состоит в выборе такого потребительского набора, который максимизирует его функцию полезности при заданном бюджетном ограничении:

$$\begin{cases} U(x) \rightarrow \max \\ px \leq I, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

где  $p$  – вектор цен,  $I$  – доход потребителя.

Классические методы, используемые для определения функции полезности, представляющей бинарное отношение предпочтений  $R$  ( $U(x^1) \geq U(x^2) \Leftrightarrow x^1 R x^2$ , для  $\forall x^1, x^2 \in X$ ), в общем случае являются достаточно “жесткими”. Основанием для их применения, в частности служат достаточные условия ее существования, которые задаются, например, теоремой Дебре [Пономаренко, 1994]: отношение предпочтения должно быть полным, рефлексивным, транзитивным и непрерывным, множество решений – связным. Если условия Дебре не выполняются (субъективное отношение предпочтения может быть, в первую очередь, нетранзитивным), и функция полезности, которая представляет отношение  $R$  не существует, применение классических методов теории потребления затруднено.

Предлагается альтернативный подход для определения функции полезности. Считается, что эксперт (потребитель) при оценивании объекта имеет в виду его векторную оценку. Предлагается процедура формализации проблемы, путем замены «векторной оценки полезности» аддитивной сверткой и тогда задача сводится к уточнению весовых коэффициентов аддитивной свертки.

### Постановка задачи

Пусть на множестве товаров  $X \subseteq R_+^n$  рассматривается конечный набор потребительских товаров (обучающая выборка). Цены товаров считаются заданными, задано также бюджетное ограничение на суммарную стоимость единиц товаров в выборке. Пусть  $\bar{X}$  – множество обучающих выборок  $x^j$ ,  $j \in J$ , где  $J$  – множество индексов выборок, сформированное в рамках бюджетного ограничения. Каждая выборка  $x^j \in X$ ,  $j \in J$ , характеризуется своим распределением единиц для каждого товара  $x^j = (x^{j_1}, \dots, x^{j_i}, \dots, x^{j_n})$ . Множество индексов товаров выборки обозначим  $I$ ,  $I = \{1, \dots, n\}$ . Каждой выборке,  $x^j \in X$ ,  $j \in J$ , ставится в соответствие ее векторная оценка в пространстве товаров  $\Omega^n$ .

В дальнейшем будем рассматривать не само множество значений единиц товаров  $x^j \in A$ ,  $j \in J$ , а соответствующее ему множество  $\omega(x^{j_i})$ ,  $i \in I$ ,  $j \in J$ , где  $\omega$  некоторое монотонное преобразование, которое определяет степень отклонений количественных характеристик от оптимальных значений для каждого товара  $x^{j_i}$ ,  $i \in I$ ,  $j \in J$ , и преобразует все значения количественных характеристик товаров к нормализованному виду в интервале  $[0, 1]$ .

Пусть потребитель (эксперт) последовательно задает свои предпочтения на множестве  $\bar{X}$  в виде бинарного отношения предпочтения  $R$ .

Предлагается следующий подход к решению задачи: предполагается, что при оценке объекта (в нашем случае – обучающей выборки) эксперт (сознательно или неосознанно) имеет в виду его векторную оценку. Если рассматривать «векторную» функцию полезности в виде аддитивной свертки, то задача сводится к нахождению весовых коэффициентов свертки (1)-(2):

$$x^1 R x^2 \Leftrightarrow \sum_{i \in I} \rho_i \omega_i(x^1) \leq \sum_{i \in I} \rho_i \omega_i(x^2), \quad x^1, x^2 \in \bar{X}, \quad (1)$$

$$\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n), \quad i \in I, \quad \rho_i > 0, \quad \sum_{i \in I} \rho_i = 1, \quad (2)$$

где (2) – нормированный вектор относительной важности параметров объектов для утверждения эксперта об отношении предпочтения между объектами.

Таким образом, задача состоит в локализации весовых коэффициентов аддитивной свертки (1)-(2).



### Процедуры локализации вектора весовых коэффициентов

Предлагаются процедуры локализации компонент вектора весовых коэффициентов путем последовательного уточнения интервалов изменения соответствующих компонент вектора  $\rho$  (гиперпараллелепипеда весовых коэффициентов в пространстве предпочтений):

$$\rho \in \Pi = \prod_{i \in I} [\rho_i^H, \rho_i^B], \quad \rho = (\rho_i, i \in I), \quad 0 < \rho_i^H \leq \rho_i^B < 1, \quad \sum_{i \in I} \rho_i = 1, \quad \rho_i > 0, \quad i \in I \quad (3)$$

Идеологическим основанием процедур является гипотеза про «идеальную точку», которая отображает «идеальную выборку» в пространстве товаров (вектор предпочтений в пространстве предпочтений), целостный «образ» которой существует у эксперта. Предполагается, что при сравнении обучающих выборок эксперт сравнивает именно их степень близости относительно некоей метрики к «идеальной» выборке с оптимальным распределением единиц товаров.

Для преобразования всех значений единиц товаров  $x_i^j$ ,  $i \in I$ ,  $j \in J$ , к нормализованному виду в интервале  $[0, 1]$  применяется, в частности, следующая формула [Волкович, 1993]:

$$\omega(x_i^j) = \frac{x_i^{\text{opt}} - x_i^j}{x_i^{\text{opt}} - x_i^0}, \quad (4)$$

где  $x_i^j \in X$ ,  $i \in I$ ,  $j \in J$ ;  $x_i^{\text{opt}} \in X$ ,  $i \in I$ , - наиболее желательное количество единиц  $i$ -го товара на множестве возможных выборок;  $x_i^0 \in X$ ,  $i \in I$ , - наименее желательное количество единиц  $i$ -го товара на множестве возможных выборок. Будем считать, что  $x_i^{\text{opt}}$  и  $x_i^0$  могут быть заданы непосредственно экспертом на множестве допустимых обучающих выборок.

С учетом (4), обобщенный критерий, который отображает суммарное отклонение  $j$ -го объекта,  $j \in J$ , от оптимальных значений, запишется как

$$D(x^j, x^{\text{opt}}) = \sum_{i \in I} \rho_i \omega(x_i^j) = \sum_{i \in I} \rho_i \frac{x_i^{\text{opt}} - x_i^j}{x_i^{\text{opt}} - x_i^0}, \quad j \in J.$$

Последняя формула является метрикой близости вектора  $x^j \in \bar{X}$ ,  $j \in J$ , представляющего распределение единиц товаров в  $j$ -й выборке к некоторому идеальному (оптимальному) вектору распределений  $x^{\text{opt}} = (x^{\text{opt}_1}, x^{\text{opt}_2}, \dots, x^{\text{opt}_n})$ , взвешенных в пространстве товаров. Формула (1) запишется в виде:

$$x^1 R x^2 \Leftrightarrow \sum_{i \in I} \rho_i \omega_i(x^1) \leq \sum_{i \in I} \rho_i \omega_i(x^2) \Leftrightarrow D(x^1, x^{\text{opt}}) \leq D(x^2, x^{\text{opt}}), \quad x^1, x^2 \in X.$$

Последнее неравенство можно интерпретировать таким образом: утверждение «выборка  $x^1$  предпочтительней выборки  $x^2$ » обозначает, что в пространстве товаров  $\Omega^n$  точка, которая соответствует выборке  $x^1$ , находится на меньшем расстоянии по отношению к идеальной точке, чем точка, которая соответствует выборке  $x^2$ . В случае же отношения равноценности выборок соответствующие им точки в  $\Omega^n$  находятся на одинаковом расстоянии от точки, соответствующей идеальному объекту.

Процедуры локализации вектора весовых коэффициентов (2) представляют собой фактически две процедуры: процедуру уточнения интервалов весовых коэффициентов (3) и процедуру отсеивания из первоначального множества рассматриваемых обучающих выборок «неперспективных» выборок. Процедуры базируются соответственно на утверждениях 1 и 2, приводимых ниже. Доказательства этих утверждений, обобщенные для случая задания экспертом предпочтений в метризованной форме, приводятся в работе [Волошин, 2003].

**Утверждение 1.** Вектор предпочтений, соответствующий равноценным выборкам в пространстве предпочтений  $E^1$ , определяет границы интервалов изменения весовых коэффициентов товаров, что численно выражается:

$$\sum_{\substack{i \in I_1 \\ \rho_i^s \in \Pi^s}} \rho_i^{(s)B} \omega_i(x^1) + \sum_{\substack{i \in I_2 \\ \rho_i^s \in \Pi^s}} \rho_i^{(s)H} \omega_i(x^2) = \sum_{\substack{i \in I_1 \\ \rho_i^s \in \Pi^s}} \rho_i^{(s)B} \omega_i(x^1) + \sum_{\substack{i \in I_2 \\ \rho_i^s \in \Pi^s}} \rho_i^{(s)H} \omega_i(x^2), \quad x^1, x^2 \in X,$$

где  $\rho_i^{(s)B}, \rho_i^{(s)H}, i \in I$ , - соответственно верхняя и нижняя границы  $i$ -го интервала весовых коэффициентов на  $s$ -й итерации сравнений;  $I_1 = (i : \omega_i(x^1) > \omega_i(x^2)) \neq \emptyset$ ,  $I_2 = (i : \omega_i(x^1) \leq \omega_i(x^2)) \neq \emptyset$ ,  $i \in I = I_1 \cup I_2$ .

Таким образом, гиперпараллелепипед весовых коэффициентов (ГВК) на  $(s+1)$ -ом шаге станет равным:

$$\Pi^{s+1} = \prod_{i \in I_1} [\rho_i^{(s)H}, \rho_i^{(s+1)B}] \times \prod_{i \in I_2} [\rho_i^{(s+1)H}, \rho_i^{(s)B}]. \quad (5)$$

Нахождение вектора предпочтений, соответствующего равноценным объектам в [Волошин, 2003], предлагается осуществлять решением  $n$  уравнений вида:

$$\rho_i(\omega_i(x^1) - \omega_i(x^2)) - \rho_i(\omega_i(x^1) - \omega_i(x^2)) = 0, \quad x^1, x^2 \in X, \quad \sum_{i \in I} \rho_i = 1, \quad \rho_i > 0, \quad i \in I. \quad (6)$$

**Утверждение 2.** Условием отсеивания объектов  $\omega^j, j \in J$ , из множества  $X^s$  является непринадлежность ГВК вектора, который проходит через начало координат и точку  $\omega(x^j), x \in X^s, j \in J$ , то есть  $\rho(\omega(x^j)) \notin \Pi^{(s+1)}$ . Вектор весовых коэффициентов определяется по формуле [Волкович, 1993]:

$$\rho = \rho(\omega(a^j)) = \{\rho_i : \rho_i = \prod_{\substack{t \in I \\ t \neq i}} \omega(a^j_t) / \sum_{\substack{q \in I \\ l \neq q}} \prod_{l \in I} \omega(a^j_l)\}.$$

Процедуры локализации вектора весовых коэффициентов используются в следующей человеко-машинной процедуре.

- Шаг 1. Выделение конечного множества обучающих выборок  $\bar{X}$  на бесконечном множестве потребительских товаров. Первоначальный ГВК полагается равным единичному гиперкубу.
- Шаг 2. Выбор экспертом двух выборок  $x^1$  и  $x^2$  из множества  $X^s$  в ГВК  $\Pi^s, s = 1, 2, \dots$  (шаг сужения ГВК) с указанием факта предпочтения или эквивалентности.
- Шаг 3. Построение системы уравнений вида (6). Нахождение решения системы уравнений.
- Шаг 4. Уточнение границ ГВК по формуле (5). Если гиперкуб  $\Pi^{(s+1)}$  удовлетворяет эксперта, то окончание процедуры. Иначе переход к следующему шагу.
- Шаг 5. Выделение множества «перспективных» выборок  $X^{(s+1)} (X^{(s+1)} \subset X^{(s)})$  в ГВК  $\Pi^{(s+1)}$  и предъявление их эксперту для выбора очередных двух объектов с указанием для них отношения предпочтения.
- Шаг 6. Присоединение выборок, указанных экспертом на предыдущем шаге к множеству рассмотренных и исследование на полученном множестве условия транзитивности. Если транзитивность не нарушается, то увеличение номера итерации:  $s = s + 1$  и переход к шагу 2. Если же транзитивность нарушается, то исключение этих выборок из множества рассмотренных объектов и переход на шаг 6.

Итерационный процесс завершается, когда эксперта удовлетворяют найденные интервалы изменения весовых коэффициентов товаров.

Для нахождения коллективных решений на базе формализованных таким способом интервальных индивидуальных оценок, можно применить, например, методы, предложенные в [Гнатиенко, 2002].

## Выводы

Предложенные процедуры, не требуя полной матрицы парных сравнений обучающих выборок, позволяют на множестве бинарных отношений восстановить функцию полезности потребителя. Кроме того, задание вектора весовых коэффициентов в виде интервалов можно интерпретировать и как отображение нечеткости в социально-экономических системах. Поэтому предложенные процедуры позволяют уменьшить уровень неопределенности в нечетких моделях принятия решений.

Автор благодарит проф. Волошина А.Ф. за поставленную задачу.

---

## Бібліографія

---

- [Пономаренко, 1994] Пономаренко О.І. Системні методи в економіці, менеджменті та бізнесі. – К.: Наукова думка, 1994. – 242 с.
- [Волкович, 1993] Волкович В.Л., Волошин А.Ф. и др. Модели и методы оптимизации надежности сложных систем / Под ред. Михалевича В.С. – К.: Наукова думка, 1993. – 312 с.
- [Волошин, 2003] Волошин А.Ф., Гнатиенко Г.Н., Дробот Е.В. Метод косвенного определения интервалов весовых коэффициентов параметров для метризованных отношений между объектами // Проблемы управления и информатики, 2003, № 2. – с. 34 - 41.
- [Гнатиенко, 2002] Гнатиенко Г.М., Дробот О.В., Санько-Новік М.О. Агрегування матриць парних порівнянь // Праці міжнародної школи-семінару “Теорія прийняття рішень”, Ужгород, УжНУ, 2002. – С. 27.
- 

## Информация об авторе

---

**Дробот Елена Витальевна** – Кировоградский педагогический университет имени В. Винниченко, кандидат технических наук, доцент. Кировоград, Украина. E-mail: [elena\\_drobot@ukr.net](mailto:elena_drobot@ukr.net)

## НЕЧЕТКИЕ МОДЕЛИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО КОЛЛЕКТИВНОГО ВЫБОРА

**Алексей Ф. Волошин, Николай Н. Маляр**

**Аннотация:** Для многокритериальной задачи с конечным числом альтернатив определяется нечеткая задача достижения “точки удовлетворения лица, принимающего решения”. Предлагаются различные типы “точек удовлетворения ЛПР”, в качестве функций принадлежности предлагаются различные типы сверток, для выбора которых учитываются психосоматические характеристики экспертов. Задача обобщается на случай принятия коллективного решения.

**Ключевые слова:** коллективный выбор, многокритериальная оптимизация, нечеткая модель, свертка критериев, точка удовлетворения.

---

## Введение

---

Одна из наиболее общих постановок задачи принятия коллективного решения, имеющая многочисленные приложения в экономике, политике и других областях человеческой деятельности, сводится к следующей математической модели [1]:

$$U_i(x) \rightarrow \max, \quad i \in I = \overline{1, p}, \quad x \in X, \quad (1)$$

где  $U_i$  – функция полезности  $i$ -го лица, принимающего решение (ЛПР),  $X$  – множество альтернатив (ситуаций).

Будем рассматривать модели, в которых множество альтернатив  $X$  конечно,  $|X| = n$ , каждая альтернатива  $x_j \in X$  оценивается  $i$ -м ЛПР набором критериев  $K^i$  с “универсального” набора  $i \in J = \overline{1, m}$ , оценка альтернатив осуществляется каждым ЛПР независимо, каждый ЛПР имеет свой “тип” функции полезности (определяемой той или иной сверткой “своих” критериев), каждый ЛПР при формировании решения использует свой “принцип оптимальности”.

К такой постановке сводится, например, задача формирования комплексных целевых программ [2], в которой в качестве альтернатив выступают множества проектов, связанных в составные альтернативы причинно-следственными связями, в качестве целей – политические, социальные, экономические и научно-технические критерии: “Увеличение действенности социальной защиты”, “Повышение уровня экономики”, “Повышение уровня науки и культуры”, “Информатизация стратегических направлений развития государственности, безопасности и обороны”, “Улучшение состояния окружающей среды” и т.д.

([2], С. 340–349, всего 162 целей). Естественно, что оценки таких разнообразных целей различными экспертами, министерствами и ведомствами будут существенно отличаться, отличаться будут и “принципы оптимальности” – от пессимистического (при оценке, например, “экологических” критериев) до оптимистических (при оценке, например, информатизации).

При решении поставленной задачи, отличающейся очень высоким уровнем неопределенности, субъективизмом в выборе критериев, оценках альтернатив по ним, естественным будет использование нечеткого анализа [3] для описания субъективной компоненты модели и учет психологических характеристик как отдельных экспертов, так и их коалиций с целью уменьшения “субъективной неопределенности” (см. доклад А.Ф. Волошина “О проблемах принятия решений в социально-экономических” в настоящем сборнике).

### Постановка задачи нечеткого выбора

Рассмотрим вначале случай  $p = 1$  (один ЛПР). Задача (1) тогда задается одной матрицей решений

$$K = (K_{ij}), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n} \quad (2)$$

где  $K_{ij}$  – оценка по  $i$ -му критерию  $j$ -й альтернативы.

Не ограничивая общности, предположим, что все альтернативы принадлежат множеству Парето [4], а наилучшей считается альтернатива, для которой все оценки достигают своего максимального и минимального значения. Пусть все оценки – положительные числа, иначе применяем преобразование:

$$K'_{ij} = \left( \max_j K_{ij} + \min_j K_{ij} \right) - K_{ij} \quad (3)$$

Таким образом, множество альтернатив  $X$  представляет собой некоторое подмножество евклидоваго  $m$  мерного пространства  $R_{++}^m$ , каждая альтернатива рассматривается как точка  $x^j = (K_{ij}), i \in I, j \in J$ .

Введем точку “удовлетворения ЛПР”  $T \in R_{++}^m$  и опишем множество точек “близких” к этой точке как нечеткое множество

$$A_T = \{x, \mu_A(x)\}, \quad x \in X \subset R_{++}^m. \quad (4)$$

где  $\mu_A(x)$  – функция принадлежности нечеткого множества  $A_T$ , характеризующая “степень принадлежности” элементов  $x \in X$  нечеткому множеству  $A_T$ . “Точка удовлетворения ЛПР”  $T$  может как принадлежать множеству  $X$  (т.е. быть достижимой), так и не принадлежать  $X$  (быть недостижимой, например, “идеальной”).

Задача выбора теперь сводится к выбору “наилучшей” (по некоторому критерию оптимальности) альтернативы  $x^* \in A_T$ .

Опишем построение функции принадлежности  $\mu_A(x)$ . Предположим, что известна матрица ЛПР (2) и задана точка его “удовлетворения”  $T = (t_i)_{i=\overline{1, m}}$ . Определим оптимальную безразмерную оценку достижения “точкой удовлетворения ЛПР” оптимальных значений критериев следующим образом:

$$x_i^j = 1 - |t_i - K_{ij}| / \max \{ t_i - \min_j K_{ij}; \max_j K_{ij} - t_i \}, \quad i \in I, \quad j \in J. \quad (5)$$

### Построение функции принадлежности

Для построения функции принадлежности, как свертки заданных критериальных оценок, предлагается использование следующих сверток критериев эффективности (при условии их равноважности):

$$\mu_A^2(x^j) = \frac{m}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{x_i^j}}, \quad \mu_A^3(x^j) = \sqrt[m]{\prod_{i=1}^m x_i^j}, \quad \mu_A^4(x^j) = \frac{\sum_{i=1}^m x_i^j}{m}, \quad \mu_A^5(x^j) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (x_i^j)^2}{m}} \quad (6)$$

Как известно, между этими свертками существует следующая субординация:

$$\mu_A^2(x) \leq \mu_A^3(x) \leq \mu_A^4(x) \leq \mu_A^5(x), \quad \forall x \in X \quad (7)$$

Последнее означает, что при выборе, например, с помощью “наиболее пессимистической” свертки  $\mu^2$  “наилучшей” точки  $x^* \in A_T$ , степень принадлежности ее множеству точек, “близких к точке удовлетворения ЛПР”, будет всегда меньше, чем при использовании “оптимистической” свертки  $\mu^5$ . Значит, предлагаемая модель позволяет учитывать достижение определенной “степени удовлетворения ЛПР” от его субъективных особенностей, учитываемых при выборе критерия оптимальности и точки удовлетворения. Таким образом, “объективизация” субъекта накладывается на субъективное описание объекта (см. доклад А.Ф. Волошина).

### Точки удовлетворения ЛПР

В качестве “точек удовлетворения ЛПР” предлагается использовать точки  $T^i, i = \overline{1,6}$ , с координатами:

$$t_i^1 = \min_j K_{ij}, \quad t_i^2 = \frac{n}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{K_{ij}}}, \quad t_i^3 = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n K_{ij}}, \quad t_i^4 = \frac{\sum_{j=1}^n K_{ij}}{n}, \quad t_i^5 = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n K_{ij}^2}{n}}, \quad t_i^6 = \max_j K_{ij}. \quad (8)$$

Учитывая, что между предлагаемыми точками справедлива аналогичная (7) субординация, можно определить “степень удовлетворения ЛПР” при выборе конкретной свертки и различных точек удовлетворения.

### Методы нечеткой многокритериальной оптимизации

Теперь определенным образом модифицируются “классические” методы многокритериальной оптимизации.

**Метод идеальной точки.** Пусть  $y = (y_1, \dots, y_n)$  идеальная точка. Зададим правило выбора: выбирается альтернатива  $x \in X$ , для которой функция принадлежности нечеткому множеству “близка к идеальной точке” максимальна.

**Метод с учетом количества доминирующих критериев.** Пусть заданы точка удовлетворения  $T$  и матрица решений (2). Для каждой альтернативы строятся оценки по следующему правилу:

$$y_i^j = \begin{cases} x_i^j, & \text{если } t_j < K_{ij}, \\ 1, & \text{если } t_j \geq K_{ij}. \end{cases}$$

Дальше для каждого вектора оценок  $y^j$  строится функция принадлежности нечеткому множеству (4) согласно одной из формул (6). Правило выбора: выбирается альтернатива, для которой количество доминирующих критериальных оценок больше и/или функция принадлежности принимает максимальное значение.

### Заключение

При переходе к общему случаю (количество ЛПР  $p > 1$ , критерии для каждого ЛПР неравноценны) предлагается применить методы обработки экспертной информации (при усреднении оценок экспертов), учитывающие психосоматические особенности экспертов [6] (степень “реалистичности”, “риска”, “независимости” и т.д.). При организации “групповой” экспертизы (все множество экспертов разбивается на коалиции, оценивающие, например, экологические, экономические, социальные, технические и т.д. параметры), необходимо учитывать принципы группового мышления [7].

---

## Библиография

---

1. Дж. Харшаньи, Р. Зельтен. Общая теория выбора равновесия в играх. – С.-Петербург: Экономическая школа, 2001. – 406 с.
2. В.Г. Тоценко. Методы и системы принятия решений. – Киев: Наукова думка, 2002. – 382 с.
3. С.А. Орловский. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – М.: Наука, 1981. – 207 с.
4. И.М. Макаров, Т.М. Виноградская и др. Теория выбора и принятия решений. – М.: Наука, 1982. – 328 с.
5. Э. Мушик, П. Мюллер. Методы принятия технических решений. – М.: Мир, 1990. – 208 с.
6. А.Ф. Волошин, М.В. Панченко (ММС).
7. J.L. Janis, L. Mann. Decision making: a Psychological analyses of Conflict, Choice and Commitment. – New York: Free Press, 1977.

---

## Информация об авторах

---

**Волошин Алексей Федорович** – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, доктор технических наук, профессор. Киев, Украина. E-mail: [ovoloshin@unicyb.kiev.ua](mailto:ovoloshin@unicyb.kiev.ua)

**Маляр Николай Николаевич** – Ужгородский национальный университет, кандидат технических наук, доцент. Ужгород, Украина. E-mail: [cyber@mail.uzhorod.ua](mailto:cyber@mail.uzhorod.ua)

## АЛГОРИТМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА И ОТСЕИВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕДИАНЫ СТРОГИХ РАНЖИРОВАНИЙ ОБЪЕКТОВ

Павел П. Антосяк, Григорий Н. Гнатиенко

**Аннотация:** Рассматривается задача нахождения результирующего ранжирования объектов по индивидуальным ранжированиям, заданных экспертами. Предлагается алгоритм, основанный на последовательном анализе вариантов и условии ацикличности решения. Приводятся результаты вычислительного эксперимента.

**Ключевые слова:** последовательный анализ, результирующее ранжирование.

---

## Введение

---

Задачи ранжирования (упорядочения множества объектов по степени проявления некоторого свойства) относятся к одной из основных задач экспертного оценивания [1]. Суть задачи состоит в определении полного порядка на множестве объектов, которые сравниваются, по заданному частичному порядку.

Среди задач принятия решений проблема линейного упорядочения объектов выделяется большим количеством конкретных применений и безусловной актуальностью темы. Эта проблема традиционно находится в центре внимания исследователей и количество работ, посвященных вопросам построения оптимальных в том или ином смысле линейных порядков (или квазипорядков) на множестве объектов, которые сравниваются, очень велико [2].

Практическое применение задач ранжирования очень разнообразно [3]. Такие задачи возникают, например, при решении проблемы определения последовательности загрузки и разгрузки транспортного космического корабля; нахождение последовательности устранения неисправностей некоторой системы; комплексном анализе качества продукции; анализе характеристик продукции и выделении главных показателей качества; нахождении узких мест в некоей сложной системе, которая имеет такие свойства как устойчивость (например, живучесть), управляемость, самоорганизация; проектирование каналов связи между узлами в информационно-вычислительных сетях; экспертного оценивания различных проектов развития некоторых отраслей или научных исследований; планирование построения жилья и т.п.

Будем рассматривать задачи качественного и количественного ранжирования. Суть задач состоит в том, что необходимо ввести отношение порядка на множестве объектов, которые сравниваются. При этом с целью обеспечения большей объективности полученных результатов упорядочение объектов осуществляется группой экспертов. При решении таких задач на этапе задания экспертной информации наиболее широкое применение нашел метод парных сравнений. Но известно, что во многих задачах бинарные отношения, которые представляют мнение экспертов и коллективное мнение экспертной группы, часто содержат контуры (циклы), поэтому анализу этих задач посвящено множество работ [4].

Одной из самых распространенных задач ранжирования есть задача нахождения результирующего ранжирования по ранжированиям (или матрицам парных сравнений, которые соответствуют бинарным отношениям в общем случае нетранзитивным), заданных экспертами. Для вычисления результирующего отношения (которое принадлежит некоторому классу – в нашем случае классу строгих ранжирований) вводится мера близости (как правило, выбирается метрика Хемминга [5]) и выбирается критерий качества результирующего отношения (наиболее распространенным и обоснованным считается вычисление медианы заданных отношений). При этом получают сложную комбинаторную задачу, для решения которой необходимы специальные алгоритмы.

### Постановка задачи

Пусть на фиксированном множестве объектов  $a_\nu \in A$ ,  $\nu = 1, \dots, n$ , экспертами заданы матрицы парных сравнений  $P^i$ ,  $i \in I = \{1, \dots, k\}$ , где  $n, k$  – соответственно количество объектов и экспертов. Элементы  $p_{\nu\eta}^i \in \{-1, 1\}$  матриц  $P^i$  представляют собой результат сравнения  $i$ -м экспертом объектов  $a_\nu$  и  $a_\eta$ ,  $\nu, \eta \in \{1, \dots, n\}$ .

Одним из методов нахождения результирующего ранжирования есть вычисление медианы Кемени-Снелла [6]:

$$R^* \in \underset{R \in \mathfrak{R}}{\text{Arg min}} \sum_{i \in I} d(R, P^i),$$

где  $\mathfrak{R}$  – множество всех матриц, которые соответствуют строгим ранжированиям  $n$  объектов (ранжирования и матрицы, которые им соответствуют, будем обозначать одинаковыми символами),  $d(R, P^i)$  – расстояние Хемминга между  $R$  и  $P^i$ .

Для решения проблемы вычисления точного решения сложной комбинаторной задачи,  $NP$  – сложной в сильном смысле, предлагается алгоритм, который основан на последовательном анализе вариантов [7].

Задача нахождения результирующего ранжирования объектов в изложенной постановке формализуется в классе однокритериальных комбинаторных моделей:

$$f(x) = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} |c_{ij} - x_j| \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$x_j \in X_j^0 = \{-1, 1\}, \quad j \in J = \{1, \dots, N = n(n-1)/2\}, \quad (2)$$

$$x \in D^A \subset X^0, \quad (3)$$

где  $X^0 = \prod_{j \in J} X_j^0$  – множество всех возможных векторов вида  $x_j = r_{\nu\eta}$ ,  $j = (\nu-1)n + \eta - (\nu+1)\nu/2$ ,

$1 \leq \nu \leq \eta \leq n$ ,  $r_{\nu\eta}$  – элемент матрицы парных сравнений;  $D^A$  – множество векторов, которые соответствуют ациклическим отношениям;  $c_{ij}$  –  $j$ -я компонента вектора, построенного по матрице  $P^i$ , заданной  $i$ -м экспертом.

### Алгоритм определения строгого результирующего ранжирования

С учетом модификации процедур  $W^s$  для однокритериальных моделей и процедур анализа и сужения множества допустимых вариантов, базирующихся на условии ациклическости решения, опишем алгоритм анализа и отсеивания недопустимых элементов задачи (1)–(3).

*Шаг 1.* Вычисление значения  $f_s^* = (f_{\min}^s + f_{\max}^s)/2$ , где  $f_{\min}^s, f_{\max}^s$  – соответственно минимальное и максимальное значение целевой функции на  $s$ -й итерации,  $s=0, 1, 2, \dots$ :

$$f_{\min}^s = \sum_{j=1}^N \min_{x_j \in X_j^s} |c_j - x_j|, \quad f_{\max}^s = \sum_{j=1}^N \max_{x_j \in X_j^s} |c_j - x_j|.$$

*Шаг 2.* Применение процедуры  $W^s$ , суть которой состоит в отсеивании элементов множества  $X_j^s$ ,  $\forall j \in J = \{1, \dots, N\}$ , которые не могут принимать участие при построении решения  $x \in X^s$ . Условие отсева имеет вид:

$$\sum_{i \in I} |c_{ij} - x_j| > f_s^* - \sum_{\substack{t \in J \\ t \neq j}} \sum_{i \in I} \left| c_{it} - \arg \min_{x_t \in X_t^s} |c_{it} - x_t| \right|$$

если отсев недопустим, переход к шагу 7. Иначе – к следующему шагу.

*Шаг 3.* Анализ множества допустимых вариантов, основанный на условии ацикличности решения. Если отсев недопустим, переход к шагу 7. Иначе – к следующему шагу.

*Шаг 4.* Вычисление границ изменения целевой функции  $f_{\min}^s, f_{\max}^s$ . Если границы изменились, то есть  $f_{\min}^s > f_{\min}^{s-1}$  или  $f_{\max}^s < f_{\max}^{s-1}$ , переход к шагу 1, иначе – к шагу 5.

*Шаг 5.* Допустимый отсев:  $X_j^s \neq \emptyset$  для  $\forall j \in J$ . Если на множестве  $X^s$  существуют полные допустимые решения и общее количество возможных решений  $X^s = \left( \prod_{j \in J} |X_j^s| \right)$ , велико для прямого перебора, переход к следующему шагу. Иначе – к шагу 8.

*Шаг 6.* Уменьшение значения  $f_s^*$  – выбор, например, методом дихотомии  $f_{s+1}^* = (f_s^* + f_{\min}^s)/2$ . Переход к шагу 2.

*Шаг 7.* Нарастивание  $f_s^*$  – выбор, например, методом дихотомии из интервала  $f_{s+1}^* \in (f_s^*, f_{\max}^s)$ . Переход к шагу 2.

*Шаг 8.* Если количество возможных элементов на множестве  $X^s$  не велико, то путем прямого перебора находим решение  $x^*$ . Если такое решение единственное и удовлетворяет неравенству  $\sum_{j \in J} |c_{ij} - x_j| \leq f_s^* = (f_{\min}^s + f_{\max}^s)/2$ , то оно есть искомым решением и соответствует результирующему ранжированию.

### Вычислительный эксперимент

Описанный алгоритм был реализован в программной среде Delphi, вычислительный эксперимент проводился на ПЭВМ с тактовой частотой процессора 1,53 ГГц. Исследовалась задача (1)-(3) с  $n = 50 \div 200$ , данные генерировались случайным образом.

Изучалась интенсивность отсеивания в зависимости от размерности задачи и времени работы процессора при сужении допусков по целевой функции до  $\varepsilon = |f_{s+1}^* - f_s^*|$ ,  $X^{s+1} = \emptyset$ . При  $|X^s| \leq 10^{12}$  решение находилось прямым перебором (работа процесса порядка 20–30 мин.). Если за один час работы процесса ( $|X^s| > 10^{13}$ ) решение не было найдено, то на суженом множестве генерировалось решение с использованием эвристических процедур. Рассматривались  $x_{\varepsilon}^{\delta}$  решения, где  $\varepsilon$  – точность по целевой функции,  $\delta$  – точность по ограничениям [7].

Авторы выражают благодарность проф. Волошину А.Ф. за помощь при подготовке работы.



---

## Библиография

---

1. Литвак Б.Г. Меры близости и результирующие ранжирования// Кибернетика. 1983. №1. – С. 57-63.
2. Миркин Б.Г. Анализ качественных признаков и структур. М.: Статистика. 1980. – 319 с.
3. Левин М.Ш. Современные подходы к оценке эффективности плановых и проектных решений в машиностроении. Обзорная информация. Сер.С–9. Автоматизированные системы проектирования и управления. М.: ВНИИТЭМР. 1987. Вып.3. – 56 с.
4. Гнатиенко Г.Н., Микулич А.Ю. Методы метризации качественных ранжировок объектов. Киев. ун-т. – Киев. 1993. Библиогр.: 6 назв. Рус. Деп. вУкрНИИИТИ 10.03.93. №432–Ук93. – 10 с.
5. Макаров И.М., Виноградская Т.М. и др. Теория выбора и принятия решений: Учебное пособие. М.: Наука, 1982.– 328с.
6. Кемени Дж.Г., Снелл Дж.Л. Кибернетическое моделирование. М.: Советское радио. 1972. 192 с.
7. Волошин А.Ф. Метод локализации области оптимума в задачах математического программирования// Докл.АН СССР, т.293, №3, 1987. – С. 234–237.

---

## Информация об авторах

---

**Антосяк Павел Павлович** – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, аспирант. Киев, Украина. E-mail: [antosp@ukr.net](mailto:antosp@ukr.net)

**Гнатиенко Григорий Николаевич** – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, кандидат технических наук. Киев, Украина.

## ОДИН ПОДХОД К МОДЕЛИ ТЕОРИИ ИНВЕСТИЦИОННОГО АНАЛИЗА С УЧЕТОМ ФАКТОРА НЕЧЕТКОСТИ

**Ольга В. Дьякова**

**Аннотация:** рассматривается классическая модель Гари Марковица, которая используется для формирования оптимального портфеля ценных бумаг; недостатки вероятностного описания прибыльности ценной бумаги и анализируется в качестве такого описания использование теории нечётких множеств; рассматриваются расчетные формулы степени риска неэффективности инвестиций на основании предположения о том, что показатель эффективности инвестиций – треугольное нечёткое число, где коэффициент рассчитывается на основании критического и фактического значений прибыльности портфеля ценных бумаг.

**Ключевые слова:** принятие решений, степень риска, эффективность инвестиций, нечёткие числа, прибыльность.

---

## Введение

---

Начиная со второй половины XX-го столетия, большое внимание уделяется построению теоретической базы теории инвестиций. Она получила настолько значительное распространение среди экономистов, что говорят о её революционном развитии. То внимание, которое уделяется портфельным инвестициям, полностью отвечает радикальным изменениям, которые произошли во второй половине двадцатого столетия в экономике промышленно развитых стран. На месте отдельных изолированных региональных финансовых рынков возник общий международный финансовый рынок. Отметим, что традиционный подход к инвестированию, который имел преимущество до возникновения классической теории, имеет два недостатка. Во-первых, он «атомистический», поскольку в нём основное внимание уделялось анализу поведения отдельных активов. Во-вторых, он «одноизмеримый», поскольку основной характеристикой актива является исключительно прибыльность, тогда как другой фактор – риск – не получает чёткой оценки при инвестиционных решениях. [3]

Базовой среди классических моделей является модель Гари Марковица. На сегодняшний день эта модель используется на первом этапе формирования портфеля активов при распределении капитала, который инвестируется, по разным типам активов.

Вероятностный подход Марковица имеет, однако, некоторые модельные характеристики не полностью соответствующие реальностям фондового рынка. Это слабость гипотезы про статичность случайных процессов. Классическая теория, вероятно, констатирует статичность случайных событий в тех условиях, где имеет место статическая однородность выборки событий. Но однородность в силу неисполнения одинаковости условий наблюдения может нарушаться. Изменилось рыночное окружение фирмы и, соответственно, изменилась рыночная позиция эмитента. Следовательно, риск убытков по данной бумаге падает или растёт; но причина этих колебаний внешняя, она не имеет прямого отношения к эмитенту, то есть, не свойственна ему. Поэтому нельзя говорить про статичность случайного процесса доходности ценных бумаг. Если нет статичности случайных процессов дохода по ценным бумагам, тогда нет и статической связи между этими случайными процессами. Когда коэффициенты корреляции задаются константами, предусматривается, что раз и навсегда известен характер причинно-наследственной связи между доходностями двух типов бумаг. Но характер рассмотренной причинности не может быть описанным экспертом полностью точно, а только с некоторой степенью приближения. Намного больше правды в выводах эксперта, когда он вместо чисел употребляет лингвистически нечёткие высказывания с той или иной степенью уверенности. Неопределённость в этом случае имеет двойной характер: с одной стороны – нечёткость в описании самой ситуации, а с другой стороны – неуверенность эксперта при различии одной ситуации от другой. [2] Существенным преимуществом теории вероятности является многовековой исторический опыт использования вероятностей и логических схем, построенных на их основе. Но, когда неопределённость относительно будущего состояния объекта исследования теряет черты статической неопределённости, то классическая вероятность, как измеримая в процессе опытов характеристика массовых процессов, уходит в неизвестность. Ухудшение информационной обстановки вызывает к жизни субъективную вероятность, однако сразу возникает проблема истинности вероятностных оценок. Субъект, который принимает решение, приписывая вероятностям точечные значения в процессе некоторого виртуального пари, исходит из соображений собственных экономических или других преимуществ, которые могут быть деформированы перекрученными надеждами и эмоциями.

В рамках существующей интерпретации возникают две проблемы - непосредственный учёт влияния эксперта на процесс принятия решения и уменьшение влияния индивидуальных характеристик эксперта (учёт его «объективных психосоматических особенностей познания действительности»). [1]

Предложенный принцип иллюстрируется ниже на прикладной модели задачи принятия решения Гари Марковица в теории инвестиционного анализа.

### Метод анализа эффективности инвестиций, модель Г. Марковица

Рассматривается модель Гари Марковица, которая используется для формирования оптимального портфеля ценных бумаг. Она основывается на минимизации риска портфеля при заданном уровне доходности:

$$V_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j v_{ij} \rightarrow \min, \text{ при } \sum_{i=1}^n x_i = 1; x_i \geq 0, i = \overline{1, n}; \sum_{i=1}^n x_i m_i = m^* . \quad (1)$$

где  $x_i$  – представляющий вектор (вектор частиц вложений);  $R_i$  – случайная величина (величина, которая по результатам исследования может принимать то или иное значение, заранее неизвестно какое именно), которая определяет норму дохода  $i$ -той ценной бумаги; ряд значений  $R_i^1 \dots R_i^T$  является реализацией данной случайной величины на временном отрезке  $T$ ;  $m_i$  - ожидаемое значение доходности  $i$ -той ценной бумаги ( $m_i = MR_i$ );  $v_{ij}$  – ковариация доходности  $i$ -той та  $j$ -той ценных бумаг.

В качестве описания доходности ценных бумаг используются треугольные нечёткие числа, которые моделируют экспертное высказывание следующего типа: «Доходность ценной бумаги по окончании периода владения ожидаемо равно  $\bar{r}$  и находится в расчётном диапазоне  $[r1, r2]$ ». При этом эксперт отказывается от вероятностного описания доходности, отрезает слабовероятностные случайные результаты по двум сторонам от ожидаемого значения  $\bar{r}$  (вероятность таких результатов при

нормальном распределении не равно нулю) и формирует расчётный коридор, в котором ожидается уровень доходности ценной бумаги. При этом за  $\bar{r}$  эксперт принимает или наиболее ожидаемое, или среднее значение доходности с расчётного коридора. Функция принадлежности нечёткого числа имеет треугольный вид, если степень субъективной уверенности эксперта в отношении доходности равно нулю за пределами расчётного коридора значений доходности, а максимум этой уверенности, равный единице, достигается в точке  $\bar{r}$ . Эксперт уверен, что  $\bar{r}$  определён по попадёт в какой-либо расчётный коридор доходности, как бы не изменялись границы этого коридора.

Приведённый способ описания ожидаемой прибыльности в форме нечёткого числа автоматически снимает все проблемы, связанные с учётом связи ценных бумаг по тенденциям.

Если прибыльность ценной бумаги – треугольное нечёткое число, а прибыльность портфеля – линейная комбинация прибыльности компонент, тогда результирующий вид доходности портфеля также известен.

Пусть  $r = (r_{1i}, \bar{r}_i, r_{2i})$  – прибыльность по  $i$ -той ценной бумаге, треугольное нечёткое число. Тогда прибыльность портфеля также является треугольным нечётким числом:

$$m = \left( m_{\min} = \sum_{i=1}^n x_i r_{1i}, \bar{m} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{r}_i, m_{\max} = \sum_{i=1}^n x_i r_{2i} \right), \quad (2)$$

Зафиксируем  $m^*$  – критическое значение прибыльности портфеля. Если фактическое значение прибыльности  $m$  окажется ниже  $m^*$ , то считается, что портфель был сформирован неэффективно.

Степень риска неэффективности инвестиций по предположению, что показатель эффективности инвестиций – треугольное нечёткое число, определяется по формулам:

$$V_p = \begin{cases} 0, & \text{при } m^* < m_{\min}, \\ R(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \ln(1-\alpha)), & \text{при } m_{\min} \leq m^* < \bar{m}, \\ 1 - (1-R)(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \ln(1-\alpha)), & \text{при } \bar{m} \leq m^* < m_{\max}, \\ 1, & \text{при } m^* \geq m_{\max}, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$R = \begin{cases} \frac{m^* - m_{\min}}{m_{\max} - m_{\min}}, & \text{при } m^* < m_{\max}, \\ 1, & \text{при } m^* \geq m_{\max}, \end{cases} \quad (4)$$

$$\alpha = \begin{cases} 0, & \text{при } m^* < m_{\min}, \\ \frac{m^* - m_{\min}}{\bar{m} - m_{\min}}, & \text{при } m_{\min} \leq m^* < \bar{m}, \\ 1, & \text{при } m^* = \bar{m}, \\ \frac{m_{\max} - m^*}{m_{\max} - \bar{m}}, & \text{при } \bar{m} < m^* < m_{\max}, \\ 0, & \text{при } m^* \geq m_{\max}. \end{cases} \quad (5)$$

Отличием полученной модели от стандартной является то, что в качестве фактора риска выступает не стандартное отклонение портфеля, а степень риска неэффективности инвестиций.

Стандартные подходы, ориентированные на разработку алгоритмов, которые обеспечивают сходимость к точному решению в классическом понимании, не столько решают поставленные проблемы, сколько создают иллюзию их решения. Проблема состоит не в нахождении с какой-либо точностью решения задачи при неточных данных, а в нахождении интервалов изменения компонент решения. [Ужгород]

---

## Благодарности

Автор благодарен профессору Волошину А.Ф. за помощь при написании статьи.

---

## Библиография

---

1. Волошин А.Ф. Проблемы принятия решений в социально-экономических системах.//Труды школы-семинара «Теория принятия решений» - Ужгород, 2004 – с.15.
2. Недосекин А.О. Применение теории нечётких множеств к задачам управления финансами//Аудит и финансовый анализ. – 2000. – 1 - с. 15-21.
3. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – Москва: Наука, 1981.
4. Шарп У, Александр Дж, Бейли К. "Инвестиции.", М. 1997.
5. S. A. Ross, R. W. Westerfield, J. Jaffe, Corporate finance. – the McGraw-Hill Companies Inc., 1996.
6. Voloshin O.F., Panchenko M.V. The System of Quality Prediction on the Basis of a Fuzzy Data and Psychography of the Experts// "Information Theories & Applications", 2003, Vol.10, №3.-P.261-265.
7. William N. Goetzmann. In Introduction to Investment Theory // <http://viking.som.yale.edu/will/finman540/classnotes/notes.html>.

---

## Информация об авторе

---

Дьякова Ольга Владимировна – Киевский национальный университет им. Т. Шевченко, факультет кибернетики, аспирантка, Киев, Украина; e-mail: [oljalja@ukr.net](mailto:oljalja@ukr.net).

## MODEL OF ACTIVE MONITORING

Sergey Mostovoi, Vasilii Mostovoi

**Abstract:** *Active monitoring and problem of non-stable of sound signal parameters in the regime of piling up response signal of environment is under consideration. Math model of testing object by set of weak stationary dynamic actions is offered. The response of structures to the set of signals is under processing for getting important information about object condition in high frequency band. Making decision procedure by using researcher's heuristic and aprioristic knowledge is discussed as well. As an example the result of numerical solution is given.*

**Keywords:** *math model, active monitoring, set of weak stationary dynamic actions.*

---

## Introduction

---

The distinctive feature of seismic monitoring is the particular, seismic frequency range, encompassing infrasonic and low range of a sound spectrum. The characteristics of each monitoring object are slowly varied in time, but at the same time sometimes processes might be occurred is too rapid. The seismic monitoring deals with the large size objects, down to the sizes of a terrestrial Globe. Because of mankind anxiety on possible earthquakes, the extremely passive monitoring has a deep history, but at latest time, the active monitoring is often used. The active monitoring is such an experiment, which one is connected to generation of sounding signal of a different type, both on a spectral band, and on duration and power, down to atomic explosions. But in active experiment only monitoring approach enables to obtain ecological pure result, i.e. without any of appreciable influencing on an environment. Monitoring is a set of regime observations, and condition of observations and the characteristics of sounding signal depend on the purposes of given investigation. There are many such purposes, but, from our point of view, we select two basic one. It is dynamics of variations happening in investigated object, and it is detail of estimations, which characterize this object. Despite of large discrepancy of these two purpose, the approaches both to experimentation and to processing receivable data are very close, as well as problems, originating at it.

To problems, first of all from the ecological point of view, it is necessary to refer necessity to realize active monitoring of investigated object by low-power signals, commensurable with a level of a natural background. This circumstance results that the estimation of sounding signal parameters, passing the studied object, i.e. signal response of an investigated system on a sounding signal, is hampered because of a low signal-noise proportion.

Therefore there is a necessity for the special conditions of experiment and applying special, sometimes very composite, signal processing procedures of an investigated system response. The used above words "the regime observations" consider rigid stability in implementation of a condition. It means stability of monitoring time characteristic and parameter stability of a sounding signal, i.e. invariance of its spectral characteristic. With evidence it is clear, that always there is an extreme accuracy of arguments describing a signal and arguments temporary experiment providing. In this article the problem is put: when and to what arguments the instability is essential, in what it results, and how to eliminate its influencing, if it is possible?

First of all, it is necessary to construct a mathematical model of experiment, in which one the most essential moments of monitoring process would be reflected, including both processes, and, accompanying this process background noise, and natural hum noise. The prior knowledge of noise stochastic process will allow largely weakening its influencing on deriving of estimation obtainment of process arguments, which one is perceived as a useful signal. This slackening is reached by optimization of processing procedures, which is taking into account prior statisticians of noise stochastic processes.

In a series of treatises [1-4], the separate aspects of a reduced problem were regarded. Into the given paper there is an attempt to summarize earlier reviewed the approach to procedure modelling of active experiment, analysis of experiment parameters instability influence and optimization of procedure processing of observed data, by yardsticks taking into account the characteristics of a natural background noise, instability of sounding signal parameters and consequences caused by this instability.

---

### The Mathematical Model of Active Monitoring

---

The math model of  $i$ -th experiment in a serial from  $M$ -th ones is proposed. In active monitoring serial can be introduced as follows:

$$y_i(t) = S(t, \tau_i, \vec{h}_i) * H(t) + n_i(t), \quad t \in (\tau_i, \tau_i + T), \quad (1)$$

where  $i$  is number of experiment,  $y_i(t)$  - response of environment to an sound signal  $S(t, \tau_i, \vec{h}_i)$ , depending from vector of parameters  $\vec{h}_i$ , which one is convoluted with reacting of environment  $H(t)$  on a delta-function signal  $\delta(t)$ ,  $n_i(t)$  an additive noise accompanying experiment,  $T$  - duration of one experiment,  $(\tau_i, \tau_i + T)$  - time period of  $i$ -th experiment conducting of, and  $*$  - a convolution operator symbol. The experiment is constructed in such a manner that energy of a signal, registered by sensors,  $E[S(t, \vec{h}_i) * H(t)]$  and energy of a natural background  $E[n_i(t)]$  are commensurable in the selected metric, it means, that influencing of experiment on a state of the environment is negligible. In the pattern that circumstance is taken into account, that the non-linear phenomena in experiment can be neglected, a linear routine of the specification statement of interplay of environment and exploring signal by the way convolutions therefore is selected. Let's mark, that the convolution is described by following integral:

$$S(t) * H(t) = \int_0^{\infty} H(\tau) S(t - \tau) d\tau, \quad (2)$$

The full experiment is defined by following model

$$y(t) = \sum_{i=1}^M y_i(t) \quad (3)$$

As a time of experiment  $T$  we shall consider the time for which one the reaction level of environment to an exploring signal becomes less then some level  $\varepsilon$ , which one can be selected depending on a level of a natural background. For example, in the metric  $C_{(\tau_i+T, \tau_i+\Gamma)}$ ;  $\Gamma \gg T$  is instituted from a condition:

$$\max(y_i(t)) \leq \varepsilon; \quad t \in (\tau_i + T, \tau_i + \Gamma) \quad \text{for } \forall \tau_i \quad (4)$$

Certainly  $\varepsilon$ , and after it and  $T$  as well, is exclusively selected by the feeling of explorer heuristics, his point of view to experiment and a priori estimations of a noise  $n(t)$  power. As it was noted, the monitoring guesses a serial from  $M$  experiments, i.e.  $i = \overline{1, M}$ .

### The Model of an Exploring Signal

Let's consider, that the signal  $S(t, \vec{h}_i)$  depends on the vector of parameters  $\vec{h}_i = \{h_{i1}, \dots, h_{iN}\}$ , which components are define the shape and energy of signal. It is naturally to consider that a signal is physically realizable, i.e. to be fitting two conditions: causality and stability. The same conditions are natural to the reacting of the environment  $H(t)$  as well.

$$S(t, \vec{h}_i) = \begin{cases} S(t, \vec{h}_i), t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}; \quad \int_0^{\infty} (S(t, \vec{h}_i))^2 dt < \infty \quad (5)$$

*Causality* means, that if the signal has been started at the moment  $\tau_i$ , it means that the experiment has begun at this moment and up to this moment the signal did not exist.

$$S(t, \vec{h}_i, \tau_i) = \begin{cases} S(t - \tau_i, \vec{h}_i), t - \tau_i \geq 0 \\ 0, t - \tau_i < 0 \end{cases} \quad (6)$$

In a condition of causality we at once consider also a condition of stationary that is reflected in the dependence of a signal on a difference of time  $t$  and the signal start moment  $\tau_i$

The stability means, that for any value  $\varepsilon$  of an energy level in the metric  $L_2$  there is such value of  $T$ , that

$$\int_T^{\infty} (S(t, \vec{h}_i))^2 dt < \varepsilon \text{ for } \forall h_i \quad (7)$$

The last circumstance allows determining duration of one experiment  $T$ , for this purpose it is necessary, that the level  $\varepsilon$  was less or much less then the energy level of a natural background.

It is possible to consider  $\tau_i$  as one of the component (for example, with a zero subscript) of a vector of arguments, which are defining the signal and which are non-linear - including in the pattern of a signal. The duration value of  $T$  is a value of deterministic argument, for example, which is equal to the last component of vector  $\vec{h}$ . Let's try to represent other non-linear arguments of a signal. The signal can be introduced as a linear combination of known functions (for example, fragment of a vector of orthogonal functions  $\{k(t - \tau_i, k \cdot \omega_{0i}) \chi(t, \tau_i - \psi_i, \tau_i + T)\}$ ,  $k = \overline{1, N}$  at an interval of length  $T$ .

$$S(t, \vec{h}_i, \tau_i) = \sum_{k=1}^N h_{ik} k(t - \tau_i, k \cdot \omega_{0i}) \chi(t, \tau_i - \psi_i, \tau_i + T) \quad (8)$$

Here is  $\omega_{0i}$  - a sample unit of random argument  $\omega_0$ , which defines system of functions  $\vec{\varphi}(t, \tau, \omega, \psi)$ , and  $\psi$  is the applicable phase for this system

$$\vec{\varphi}(t, \tau, \omega, \psi) = \{k(t - \tau, \omega \cdot k) \cdot \chi(t, \tau - \psi, \tau + T)\}, \quad k = 1, \dots, N \quad (9)$$

Here is characteristic interval function  $\chi(t, \tau - \psi, \tau + T)$ , which is also a non-linear characteristic of the signal model, as well as argument  $T$ ,

$$\chi(t, \tau_i - \psi_i, \tau_i + T) = \begin{cases} 1, & t \in (\tau_i - \psi_i, \tau_i + T), \\ 0, & t \notin (\tau_i - \psi_i, \tau_i + T); \end{cases}$$

Let's consider argument  $\omega_0$  as one more component of arguments vector  $\vec{h}$ , namely  $h_{N+1}$ . Then  $\psi - h_{N+2}$ , and  $T$  we shall consider as a  $h_{N+3}$  component of vector  $\vec{h} = \{h_k\}$ ,  $k = 0, \dots, N+3$ .

In this case a sound signal in experiment with number  $i$  will be  $S(t, \vec{h}_i)$ .

So, the signal model is a random function which is supposed to be physically realizable and a stationary, which one is completely instituted by a random vector  $\vec{h}$ ,  $N$  parameters of which one are linearly entered into the model.

Under consideration is a case, when set of vectors  $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_M$ , is sampling from set of probable values of vector  $\vec{h}$  with a priori known distribution  $P(\vec{h})$ . It means, that the stochastic nature of process  $y(t) = \sum_{i=1}^M y_i(t)$  is

defined by a random vector  $\vec{h}$  and stochastic additive noise  $n(t)$ . As a determined component into this process is a response of environment  $H(t)$  on a testing signal such as a delta-function. This response contains the environment information. As fluctuations of arguments of an exploring signal is determined and linearly, through the convolution equations, are connected to a signal  $s(t, \vec{h}_i)$ , registered by sensors on an exit of an observation system, that, allowing identifications (2) for a convolution  $*$ , we shall obtain

$$s(t, \vec{h}_i) = S(t, \vec{h}_i) * H(t) \text{ and } y_i(t) = s(t, \vec{h}_i) + n_i(t), \quad t \in (\tau_i, \tau_i + T), \tau_i = h_{i0}, T = h_{iN+3}. \quad (10)$$

Hereinafter we shall esteem only response of environment  $s(t, \vec{h}_i)$ . Let's decipher separated values of a vector of components, defining both signal  $S(t, \vec{h}_i)$  and response of environment  $s(t, \vec{h}_i)$ . First, try to separate arguments, which are included linearly and non-linear into the model.

$$S(t, \vec{h}_i) = \left( \sum_{k=1}^N h_{ik} \cdot k(t - h_{i0}, h_{i,N+1} \cdot k) \right) \cdot \chi(t, h_{i0} - h_{i,N+2}, h_{i0} + h_{iN+3}) \quad (11)$$

$\tau_{i0}$  is the component of vector  $\vec{h}_i$  with zero index,  $\omega_{i0} - N + 1$ , and  $T - N + 2$  -th of a component.

Function vector

$$\vec{s}(t, \vec{h}) = \left\{ k(t - \tau, \omega \cdot k) \cdot \chi(t, \tau - \psi, \tau + T) \right\}, \quad k = 1, \dots, N \quad (12)$$

might be set of convenient for approximation an exploring cue of functions or piece orthonormalized on a spacing  $(0, T)$  of basis functions. The approximating of an exploring signal in seismic survey by the way of damped sine wave can be regarded as the example

$$S(t, \vec{h}_i) = \theta_i \cdot \exp\{-\alpha_i t\} \cdot \sin\{\omega_i \cdot (t - \tau_i)\} \cdot \chi(t, \tau_i - \psi_i, \tau_i + T). \quad (13)$$

In this case vector of free parameters of the pattern, which defines the signal, is  $\vec{h}_i = \{h_{ik}\} = \{\tau_i, \theta_i, \alpha_i, \omega_i, \psi_i, T\}$ ,  $k = 0, \dots, 5$  and has only five components, from which only the second one  $h_{i1}$  is entered into the model linearly. In general, and relevant for practice of seismic sounding case, the signal is represented by the way of approximating piece of its expansion in a series of orthonormalized base, as in the expression (6). The response of environment in  $i$  th experiment will be

$$s(t, \vec{h}_i) = \left( \sum_{k=1}^N h_{ik} \left( \int_{\tau_i}^{\tau_i+T} k(t - \tau_i - \tau, \omega_i \cdot k) \cdot H(\tau) d\tau \right) \right) \cdot \chi(t, \tau_i - \psi_i, \tau_i + T) \quad (14)$$

Taking into account above-mentioned result of a serial from  $M$  trials  $y(t)$  becomes:

$$y(t) = \sum_{i=1}^M y_i(t) = \sum_{i=1}^M \left( S(t, \vec{h}_i) * H(t) + n_i(t) \right) = \sum_{i=1}^M \left( \sum_{k=1}^N h_{ik} \left( \int_{\tau_i}^{\tau_i+T} k(t - \tau_i - \tau, \omega_i \cdot k) \cdot H(\tau) d\tau \right) \right) \cdot \chi(t, \tau_i - \psi_i, \tau_i + T) + n_i(t), \quad t \in (0, M \cdot T) \quad (15)$$

Let's define:

$$\tilde{s}_k(t - \tau_i, \omega_i \cdot k, \psi_i) = \chi(t, \tau_i - \psi_i, \tau_i + T) \int_{\tau_i}^{\tau_i+T} k(t - \tau_i - \tau, \omega_i \cdot k) \cdot H(\tau) d\tau. \quad (16)$$

With allowance for (16) model of monitoring becomes:

$$y(t) = \sum_{i=1}^M \left( \sum_{k=1}^N h_{ik} \tilde{s}_k(t - \tau_i, \omega_i \cdot k, \psi_i) \right) + n_i(t), \quad t \in (0, M \cdot T) \quad (17)$$

---

**Model of Additive Noise  $n(t)$** 


---

In this place we shall note, that for the further analysis the aprioristic knowledge of statistical characteristics of noise  $\tilde{n}(t)$  is important. The ideal situation is a knowledge of aprioristic distributions of all sections of stochastic process  $\tilde{n}(t)$ , but in our case would be enough to know only its first moment  $E[n(t)] = \mu(t)$ , as the further procedure of processing assumes summation of record result of fragments of an experiment, i.e. reception of an estimation  $\hat{E}[n(t)]$ . This knowledge is still important and that as a result of carrying out of experiment and at data processing supervision there would be no accumulation of a regular error. The aprioristic knowledge of  $\mu(t)$  will allow to carry out preliminary such procedure as  $y(t) - \mu(t)$  and by that to minimize a regular error at an estimation of a signal, i.e. to take under consideration such process  $n(t)$  for which  $\mu(t) = 0$ . In this case, procedure of summation of experiments set would state an estimation of value  $\mu$  in each point  $t$  asymptotically, by quantity of the experiments, coming nearer to zero, i.e.

$$E[n(t)] = \mu(t). \quad (18)$$

---

**Model of Data Processing**


---

The following procedure of the observant data processing, which is based on piling signals up experiment of the environment response, is chosen.

$$\hat{E}[s(t) + n(t)] = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^M y_i(t - (i-1) \cdot T) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I s(t - (i-1) \cdot T, \vec{h}_i) + \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I n(t - (i-1) \cdot T) \quad (19)$$

Here  $\hat{E}[s(t) + n(t)]$  is an estimation of a population mean of the environment response and an additive noise, and  $I = M \cdot T$  is the time of monitoring.

Density of distribution of the random parameters which are included in model (1) are necessary for definition of a population mean (19) us. Reception of estimations of aprioristic distributions of a vector of parameters  $\vec{h}$  does not represent work since the source of probing signals always can be tested a priori, before carrying out of experiment, and the necessary statistics of the non-stable parameters determining a signal, thus can be received a priori.

We shall consider, that the aprioristic statistics gives the good consent with some density  $dP(\vec{h})$ .

---

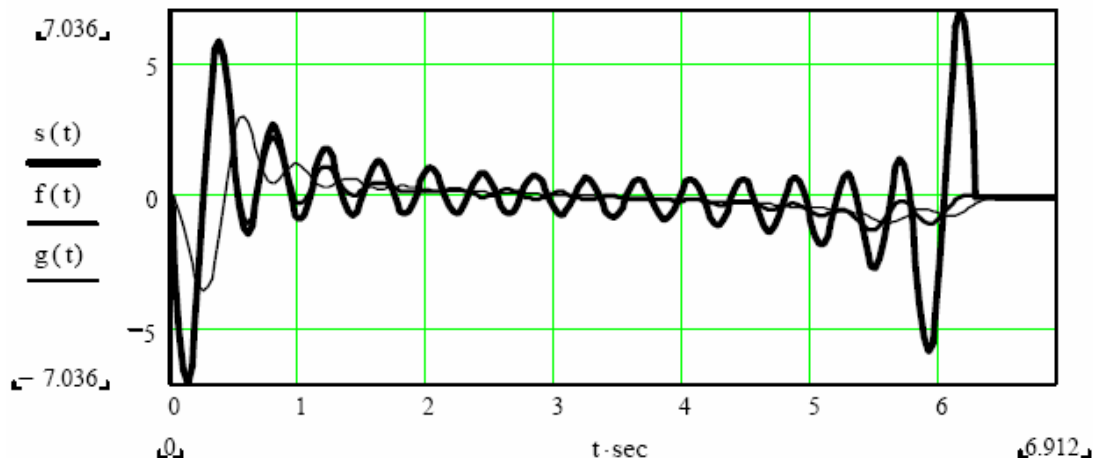
**Example**


---

With the purpose to get the monument spectral characteristics, logarithmic decrement of the oscillations of the object and to analyses of damping ability of the system, which was realized at the monument for oscillation reduction, the site tests were carried out. For registration of fluctuations, three-directional geophone with gauges located on three mutually perpendicular axes was used. The special characteristics of gauges represent one-modal curve with the extreme point in  $f=1$  Hz. Geophones were placed at a horizontal surface, on the level of 42 meters. They served as a part of interface of the monitoring registration and processing automated system. This system allows correcting the spectral characteristic up to uniform in the chosen range of frequencies. The first part of experiment consisted in registration of monument reaction on a natural background as an input signal. This signal represents a superposition of the large number of the external factors from natural microseism noise and men made one up to signals from ground transport. The important moment is that the total spectrum of this signals is much wider then the response spectrum of the monument. For the monument it was obtained three modes on frequencies 0.48 Hz, 0.93 Hz and 1.47 Hz with corresponding amplitudes 1.0, 0.07 and 0.12. The frequency of 1.47 Hz with rather intensive amplitudes hypothetically is devoted to the mode of the top sculpture, the framework of which is less rigid then the framework of the self column. The second part of experiment was consisted in to get a logarithmic decrement of oscillation of the monument on the basic resonant frequency. For this purpose was used a damp of pendulum type. By compulsory swinging of this pendulum the monument was coupled in fluctuations and then the fluctuations faded by a natural way. The average value estimation of the logarithmic decrement of the oscillations was equaled 0.055. This figure shows that the metal column with granite



shell has rather low capacity to dampen fluctuations. The damper, when it was put in operation during the tests, has increased the ratio of the logarithmic decrement of the oscillations up to the level was equaled 0.18-0.25. The damper construction gives the possibility to obtain greater ratio of logarithmic decrement of the oscillations via increasing of the friction coefficient the energy absorber. It's necessary to note that the spectrum of a structure is its steady characteristic. This function varies with change of mechanical parameters of a structure and can be used for detection of "age" changes of a structure while in exploitation. It's possible to consider that the fixed spectral monument characteristics further can be used as reference for detection of a beginning of the moment "age" changes during a structure-monitoring period.



There are three curves at the picture: the first one, which is marked as  $s(t)$ , is model of sounding signal. The second one ( $f(t)$ ) is misshaped signal by random frequency fluctuation, the third one ( $g(t)$ ) is misshaped signal by random frequency fluctuation and start time fluctuation. Having fulfilled procedure of signal reconstruction one get the curve shape very closed to be the shape of origin one  $s(t)$ .

## Conclusion

One can find proposed and analyzed original math model of an active monitoring system for manmade and natural objects. The system was used for analyzing of real object characteristics physically. The measurement is based on piling environment response up as a reaction for flow of stochastic weak signals. The response signal correction is used premature probability of instability parameters of testing signals set generator. It is shown that the main source of instability testing signals is not only the time of signal departure but frequency and phase instability as well. For elimination of defects, the decision-making procedure is proposed.

## Bibliography

1. Gay A.E., S.V. Mostovoi, V.S. Mostovoi, A.E. Osadchuk. Model and Experimental Studies of the Identification of Oil/Gas Deposits, Using Dynamic Parameters of Active Seismic Monitoring, Geophys. J., 2001, Vol. 20, pp. 895-9009.
2. Mostovoi S.V., A.E. Gui, V.S. Mostovoi, A.E. Osadchuk. Model of Active Structural Monitoring and decision-making for Dynamic Identification of buildings, monuments and engineering facilities. KDS 2003, Varna 2003, pp. 97-102
3. Kondra M., I. Lebedich, S. Mostovoi, R. Pavlovsky, V. Rogozenko. Modern approaches to assurance of dynamic stability of the pillar type monument with an application of the wind tunnel assisted research and the site measuring of the dynamic characteristics. Eurodyn 2002, Swets & Zeitlinger, Lisse, 2002, pp. 1511-1515.
4. Mostovoi S., V. Mostovoi et al. Comprehensive aerodynamic and dynamic study of independence of Ukraine monument. Proceedings of the National Aviation University. 2' 2003, pp. 100-104.

## Authors' Information

**Sergey V. Mostovoi** – e-mail: [smost@i.com.ua](mailto:smost@i.com.ua); [most@igph.kiev.ua](mailto:most@igph.kiev.ua)

**Vasiliy S. Mostovoi** – e-mail: [vasmost@i.com.ua](mailto:vasmost@i.com.ua); [most@igph.kiev.ua](mailto:most@igph.kiev.ua)

Institute of Geophysics of the National Academy of Sciences, Kiev, Ukraine.

## TOWARDS THE PROBLEMS OF AN EVALUATION OF DATA UNCERTAINTY IN DECISION SUPPORT SYSTEMS

Victor Krissilov, Daria Shabadash

**Abstract:** The question of forming aim-oriented description of an object domain of decision support process is outlined. Two main problems of an estimation and evaluation of data and knowledge uncertainty in decision support systems – straight and reverse, are formulated. Three conditions being the formalized criteria of aim-oriented constructing of input, internal and output spaces of some decision support system are proposed. Definitions of appeared and hidden data uncertainties on some measuring scale are given.

**Keywords:** decision support systems, straight and reverse problems of data uncertainty, three conditions of aim-oriented object domain constructing, appeared and hidden uncertainties.

### Introduction

One of the most actual questions of decision making theory – is the question of forming aim-oriented description of an object domain, namely, description of input, internal and output spaces of decision support systems (DSS). Practically, any input data has uncertainty, sources of which can be: inaccuracy of measuring and inaccuracy of rounding-up, scale restrictions, impossibility of measuring or definition of values with needed precision, hidden semantic uncertainty of qualitative data, etc [1, 2]. In addition, uncertainty in DSS may be caused by methods, used for obtaining, storage and processing of knowledge. A great deal of uncertainty to the decision making process brings the subjective factor that appears when the person making a decision (PMD) formulates the set of alternatives decisions and the set of descriptive criteria for them.

Main known approaches to the evaluation of uncertainty in DSS are methods of the probability theory [3, 4] and methods of fuzzy logic [2, 5]. The first are used in that case, when the extensive statistical information about the decision making process is accessible. The second are applied for description of system behavior, when it is too expensive or practically impossible to construct precise mathematical models. However, frequently in real DSS there is a necessity of the composite approach for estimation and aim-oriented handling of input and output space uncertainty.

The given paper is devoted to the problems of an estimation and evaluation of data and knowledge uncertainty in DSS.

### Straight and Reverse Problems of Data Uncertainty in DSS

We will consider some DSS in the way of a "black box" (fig. 1).

On fig. 1. are represented:

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  - the set of input parameters

(dimensions);

$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  - the set of output parameters

(dimensions);

$Q = \{q_1, q_2, \dots, q_l\}$  - the set of internal

(intermediate) states (dimensions).

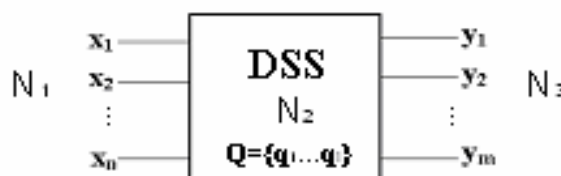


Fig. 1. Uncertainty in DSS

The representation form of results, to be exact – uncertainty that exists in them, we shall designate it  $N_3$ , essentially influences on a constructional usage of them in a particular problem of decision making, and it is characterized by the working conditions of DMS as a whole. Uncertainty of results  $N_3$ , is conditioned by uncertainty of input data ( $N_1$ ) and uncertainty of system ( $N_2$ ) (fig. 1.) [1].

Within the frameworks of such approach, let's formulate two main problems of estimation and evaluation of data and knowledge uncertainty in DMS – straight and reverse.

The straight problem consists of determination of result's limit accessible uncertainty  $N_3$ , on the base of known uncertainty of input data  $N_1$  and uncertainty of system functional  $N_2$ . Then making a comparison of received  $N_3$  with the value of a result's limit acceptable uncertainty  $N_{3max}$ , that is determined by PMD, on the base of solving tasks aim.

This problem arises when, on the base of already available data, for example, stored in some data warehouse [6, 7] and had some level of uncertainty, it is necessary to construct the definite rules for decision making.

The reverse problem consists of aim-oriented forming of internal and input dimensions so, that it can provide an uncertainty of output dimension  $N_3$  not bigger than top limit acceptable uncertainty  $N_{3max}$ . This problem arises at solving tasks of pattern recognition, cluster analysis, constructing of object domain of some DSS [6, 7].

Solving two main problems of estimation and evaluation of data and knowledge uncertainty in DMS makes possible to formulate three main conditions, being the formalized criteria of aim-oriented constructing of input, internal and output spaces of some DSS.

1. Condition of insufficient detailing (an excessive generality) of space:  $N_3 > N_{3max}$
2. Condition of redundant detailing of space:  $N_3 < N_{3min}$ .
3. Condition of constructive usage of space:  $N_{3max} \geq N_3 \geq N_{3min}$ .

where:

$N_3$  – uncertainty of result, calculated on the base of input data uncertainty ( $N_1$ ) and uncertainty of system ( $N_2$ )

$N_{3max}$ ,  $N_{3min}$  – respectively, top limit acceptable and low limit sufficient uncertainties, determined from the aim of decision support task

Surely, essential requirement is that -  $N_{3min} \leq N_{3max}$ .

---

### Concepts of Appeared and Hidden Data Uncertainties

---

In practice, usually, process of formation of DSS's input and output spaces has iterative character. At the same time, each iteration represents conversion between various types of scales, or transition to more or less detailed scale of the same type. So, the straight problem formulated above is, from this point of view, the process of sequential granulation. The reverse problem represents the process of sequential decomposition. Traditionally values  $N_1$ ,  $N_2$  and  $N_3$  characterize uncertainty of DSS on some final iteration [3, 4]. Hence, the big influence on the solving problem has type of the scale, which is used for display of input and output spaces. Depending on a required precision, measuring scales of various types are used: nominative, order, interval, relative and absolute [7].

Let's consider more in detail representing of some data on different scales.

First of all, in an explicit form, there is some set of values on a scale, the amount and form of which depends on the type of selected measuring scale. Up to the moment of measurement (observation), there is uncertainty of what value on a scale will be selected as a result of measurement. This uncertainty can be semantically compared to the entropy of the initial alphabet, known in information theory [3, 4]. Thus, the uncertainty of the measuring scale values set, described above, we shall name *the appeared uncertainty*, and designate as  $H_{np}$ .

Usually, during the characterizing of some measurement uncertainty only this uncertainty is taken into consideration.

However, on the other hand, data on a measuring scale are represented with some finite precision. It means, that each value on the scale hides in itself whole "cloud" of the real values. At that, distinguishing these values is impossible because of resolution limitation of measuring devices or inexpedience of this for the given task. Thus, some value on a scale represents analogue of concept of the granule, offered by L. A. Zadeh [2]. Therefore, takes place the uncertainty of the data, which is "hidden" in values of a measuring scale. We shall name it as hidden uncertainty, and designate as  $H_{ck}$ .

Let's choose the scale of absolute type and consider the limiting case, when only two values are located on it (for example, «0» and «1»). In this case, appeared uncertainty of the scale is minimal, as the possible quantity of values on it – is minimal. Hidden uncertainty, in this case, on the contrary – is maximal, as in two values, that lies

on the given scale, all variety of possible values of entrance data is contained. When increase in scale detailing, obviously, the quantity of values on the scale increases and the number of the "not distinguished" values decreases. Hence, appeared uncertainty of the scale increases, and hidden - decreases. At use of all possible values on the absolute scale, hidden uncertainty - is minimal and is defined only by inaccuracy of the received data. Appeared uncertainty, at the same time, - achieves its maximum.

As there is unique transformation from strong to weaker scales, the changing of appeared and hidden uncertainties values, described above, is valid for other types of scales - nominative, order, interval, and relative. Definitions of appeared and hidden uncertainties are given independently of measuring scales types.

---

## Conclusion

---

Choice of measuring scale type determines the form of data representation in DSS data domain. Then, the ratio of hidden and appeared uncertainties can characterize conversion between various measuring scales, on each iteration of forming DSS's input, internal and output spaces.

So, considering the straight problem from the point of view of appeared and hidden uncertainties, formulated above, we shall receive the following. At the known uncertainty of input data ( $N_1$ ) and uncertainty of the system ( $N_2$ ) the process of solving the straight problem represents the process of sequential granulation of input scales values up to obtaining the result with the uncertainty  $N_{3min} \leq N_3 \leq N_{3max}$ . Thus, it is expedient to estimate changing of appeared and hidden uncertainties on each iteration of this transformation, in order to check up conditions (1), (2), (3).

Similarly, at solving of the reverse problem, the basic carried out operation is – decomposition. At the known uncertainty of results  $N_3$ , it is expedient to characterize process of sequential decomposition from the result scale to the input space scales by changing of appeared and hidden uncertainty values on each iteration.

Real tasks often are the composition of these processes, i.e. demands iterative execution of both: granulation and decomposition. And exactly the analysis of appeared and hidden uncertainties changes on each iteration makes all process of solving straight and reverse problems aim-oriented. Hence, on the basis of the introduced concepts of appeared and hidden uncertainty, it becomes possible to characterize and manage the processes of decomposition and granulation at formation input and output spaces of DSS.

The further studies should be directed to the development of formalized methods of the quantitative evaluation of data and knowledge uncertainty, supplying a choice and/or developing of adequate means for decision making process.

---

## Bibliography

---

- [1] В.А. Крисилов, Д.В. Шабдаш. Неопределённость данных и знаний в системах поддержки принятия решений. In: Искусственный интеллект 1'2003. Наука і освіта, Донецк, 2003.
- [2] L. A. Zadeh. Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic. In: Fuzzy Sets Syst., Vol. 90, No. 2, 1997.
- [3] C. E. Shannon. Information Theory. In: Encyclopedia Britannica. IL, 14th Edition, Vol. 12, pp. 246B-249, Chicago, 1968.
- [4] A.N. Kolmogorov, A.N. Shirayev. Selected Works of A.N. Kolmogorov: Information Theory and the Theory of Algorithms (Mathematics and Its Applications). In: Kluwer Academic Pub, 1993.
- [5] R. R. Yager. On the measure of fuzziness and negation. II. Lattices. In: Information and Control, 44, 236 – 260, 1980.
- [6] Peter Jackson. Introduction to expert systems. In: West Group, Rochester, NY, 2001.
- [7] Nikolay G. Zagoruiko. Applied methods of data and knowledge analysis. In: Novosibirsk, 1999.

---

## Authors' Information

---

**Victor A. Krissilov** – ph. d., head of chair “System Programming”, computer department, Odessa national polytechnic university. Shevchenko Av.1, Odessa 65044, Ukraine, e-mail: [victorK@405.com.ua](mailto:victorK@405.com.ua)

**Daria V. Shabadash** – post-graduate student, chair “System Programming”, ONPU, e-mail: [dara\\_sh@mail.ru](mailto:dara_sh@mail.ru)

## 3.2. Decision Support Systems

### ПРИМЕНЕНИЕ КВАЛИМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

А. Крисилов, В. Степанов, И. Голяева, Б. Блюхер

**Аннотация:** В работе описано применение векторной модели, предложенной для оценки сложных объектов, в некоторых задачах социально-экономического мониторинга в Украинском Причерноморье.

**Ключевые слова:** уровень социально-экономического развития, совокупности признаков, векторная модель, пространство описания, весовые коэффициенты.

---

#### Введение

При решении задач управления постоянно возникает необходимость адекватно оценивать различные сложные объекты и процессы. К этой группе задач относятся, в частности, задачи оценки уровня социально-экономического развития территорий, уровня и качества жизни населения [1, 2 и др.] Применение для этих целей различных алгоритмических методов и средств является весьма актуальным.

В настоящее время средний уровень жизни (т. е. основные социальные характеристики) для большинства населения Украины является весьма низким. Это отмечают различные авторы, это видно из данных социальной статистики, это констатировано в различных выступлениях и публикациях на всех уровнях. Намечившиеся позитивные сдвиги в экономике еще не нашли отражения в социальной сфере. Мало того, целый ряд основных характеристик социальной жизни имеет тенденцию к ухудшению: продолжает расти поляризация населения по материально-финансовому и имущественному положению, увеличивается безработица, продолжают депрессивные процессы на селе и т. д. Указанные негативные явления (как и целый ряд других, например, ухудшающаяся экологическая ситуация) в значительной степени имеют место и на территории Украинского Причерноморья.

Таким образом, возникает насущная задача ведения социально-экономического мониторинга, то есть регулярного построения целой гаммы оценок, в агрегированном виде описывающих различные стороны социально-экономической действительности. В настоящей работе описано применение некоторых математических методов для оценки уровня социально-экономического развития областей Украинского Причерноморья и социального благополучия придунайских районов. Акцент сделан на применении для этих целей достаточно простой векторной оценочной модели, опирающейся на геометрическое описание оцениваемых объектов и ситуаций.

---

#### Построение интегрального показателя

Задачи получения обобщенной оценки на базе некоторого набора замеренных локальных показателей не являются новыми. В технике, в экологии, в социальных исследованиях, безусловно – в задачах квалиметрии (оценки качества), в десятках других прикладных областей имеется нужда в получении некой обобщенной интегральной характеристики.

Не вдаваясь детально в настоящее изложение в постановочные, технологические и математические вопросы, рассмотрим вкратце три варианта моделей, предлагаемых в настоящее время специалистами для оценки уровня жизни и использующих разные методологические подходы.

В ряде работ [3, 4, 5, и др.], посвященных количественной оценке уровня и качества жизни, используется техника факторного анализа, разработанного на стыке математики и системных исследований в 60-х – 70-х годах, в частности, такая разновидность факторного анализа, как метод главных компонент.

Факторный анализ был разработан, как известно, именно для решения задач сжатия информации (или извлечения наибольшей информации) при наличии большого числа локальных признаков, описывающих некую предметную область, и при отсутствии итогового, результирующего признака, адекватно описывающего данную область. «Факторами» и назывались определенные синтетические показатели, полученные комбинационными методами из имеющихся первичных локальных показателей, при этом одним из критериев построения и отбора такого комбинированного показателя служил максимум сохраняемой в нем информации обо всем анализируемом процессе или объекте.

В работах [3, 4] описан метод, основанный на построении и применении для оценки уровня и качества жизни на данной территории первой главной компоненты имеющегося (обрабатываемого) перечня частных (локальных) пронормированных показателей.

Процедура включает в себя построение трех непересекающихся множеств показателей: стимулянтов (увеличение которых повышает уровень жизни), дестимулянтов (повышение которых понижает уровень жизни) и множества эталонных показателей.

Далее, все показатели приводятся к диапазону [0, 1], для различных множеств – по-разному, затем происходит их нормирование, т. е. преобразование с учетом границ реального диапазона, минимальных и максимальных значений. После этого и производится свертка в интегральный показатель. Для этого среди всех скалярных переменных, описывающих уровень жизни, ищется такая, которая могла бы с наибольшей точностью (с наилучшей мерой приближения) восстановить значения всех локальных показателей уровня жизни. Таким свойством и обладает первая главная компонента (главный фактор), построенная на исходных локальных показателях.

Для получения по этой квалитетической модели (назовем ее  $M_y$ ) искомой главной компоненты выполняются достаточно сложные операции. Нужно по центрированным значениям локальных показателей подсчитать определенным образом элементы ковариационной матрицы, найти наибольшее собственное значение (НСЗ) этой матрицы, т. е. наибольший по величине корень соответствующего характеристического уравнения. Для выделенных множеств строится относительно НСЗ система уравнений, из которой находят компоненты собственного вектора. Для каждой из обследуемых территорий определяется значение 1-й главной компоненты и затем, с использованием наибольших и наименьших значений этой компоненты, вычисляется интегральный показатель качества или уровня жизни населения данной территории.

Описанная модель  $M_y$  была использована в [5] для сравнительного анализа 27 административных районов и городов Львовской области за 1997-1999 гг. В ней в качестве исходной использовалась матрица локальных показателей размерностью  $p=18$  (число показателей)  $\times$   $n=27$  (число единиц сравнения)  $\times$  3 (количество лет). Рассмотренные таким образом районы по результатам оценки были условно разбиты по величине уровня жизни на 4 класса: маргинальный класс (с оценкой на 20% ниже среднего значения интегрального индикатора для всех единиц сравнения); класс неудовлетворительных объектов (чья оценка оказались в границах от 20% до 10% ниже среднего значения); класс районов с удовлетворительным уровнем жизни ( $u_{cp} \pm 10\%$ ); класс условно хороших районов (их оценки  $u_i$  превышали уровень  $u_{cp}+10\%$ ).

Близкая к этому варианту модель, также использующая метод главных компонент, описана в [4]. Здесь в качестве обобщающего показателя уровня жизни используется линейная комбинация исходных локальных показателей  $x^{(j)}$ , также приведенных перед этим к сопоставимому виду. Эта линейная комбинация исчисляется как:

$$F_i = \sum_j^p a_{ij} \cdot x^{(j)} + \varepsilon_i$$

В этом выражении (назовем его моделью  $M_f$ ) фигурируют следующие величины:

$x^{(j)}$  –  $j$ -тый исходный показатель;

$a_{ij}$  – нагрузка  $i$ -того фактора на  $x^{(j)}$  (например, информационный или иной вес);

$\varepsilon_i$  – случайная компонента.

Так же, как и в модели  $M_y$ , в данной методике в качестве обобщающего показателя уровня жизни принимается один или два первых фактора, дающих наибольший вклад в суммарную дисперсию.

Содержательная интерпретация выделенных главных компонент определяется значениями факторных нагрузок  $a_{ij}$ , измеряющих корреляцию выделенного фактора  $F_i$  с исходными локальными показателями. Среди других синтетических показателей модели  $M_y$  и  $M_f$  могут считаться более полными и адекватными. Однако и они не свободны от ряда недостатков.

### Описание векторной модели

Настоящая модель (назовем ее «Модель  $M_E$ ») была разработана в свое время в Институте проблем рынка и экономико-экологических исследований НАН Украины и в Одесском политехническом институте для оценки сложных объектов, в частности, процессов социально-экономического развития. Задачи такого оценивания аналогичны описанным ранее: на базе набора локальных характеристик построить агрегированную оценку рассматриваемого объекта или процесса. При этом система должна быть построена так, чтобы наш обобщенный показатель адекватно учитывал вклад каждого из локальных параметров, отношения между ними, их свойства, тенденции изменения и др.

Эта модель была опробована при работе с различными социальными, социально-экономическими и социально-экологическими объектами: оценка уровня социально-экономического развития миллионных городов и приморских областей Украины [6], оценка социального благополучия районов Одесской области, эффективности работы промышленных предприятий [7, 8], различных хозяйственных проектов гидротехнического и экологического характера [10] и др.

По определенному несложному алгоритму была разработана программная экспертная система, рассчитанная на работу в диалоговом режиме с пользователем и предназначенная именно для обобщенной оценки сложных объектов, описываемых в норме набором локальных показателей.

На рис.1 приведено упрощенное изображение последовательности работы системы. Деятельность разработчика должна включать в себя следующие этапы:

- работа над системой показателей (совместно с экспертами);
- построение модели; собственно вычисление обобщенной оценки.

### СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ ЭКСПЕРТНОЙ СИСТЕМЫ

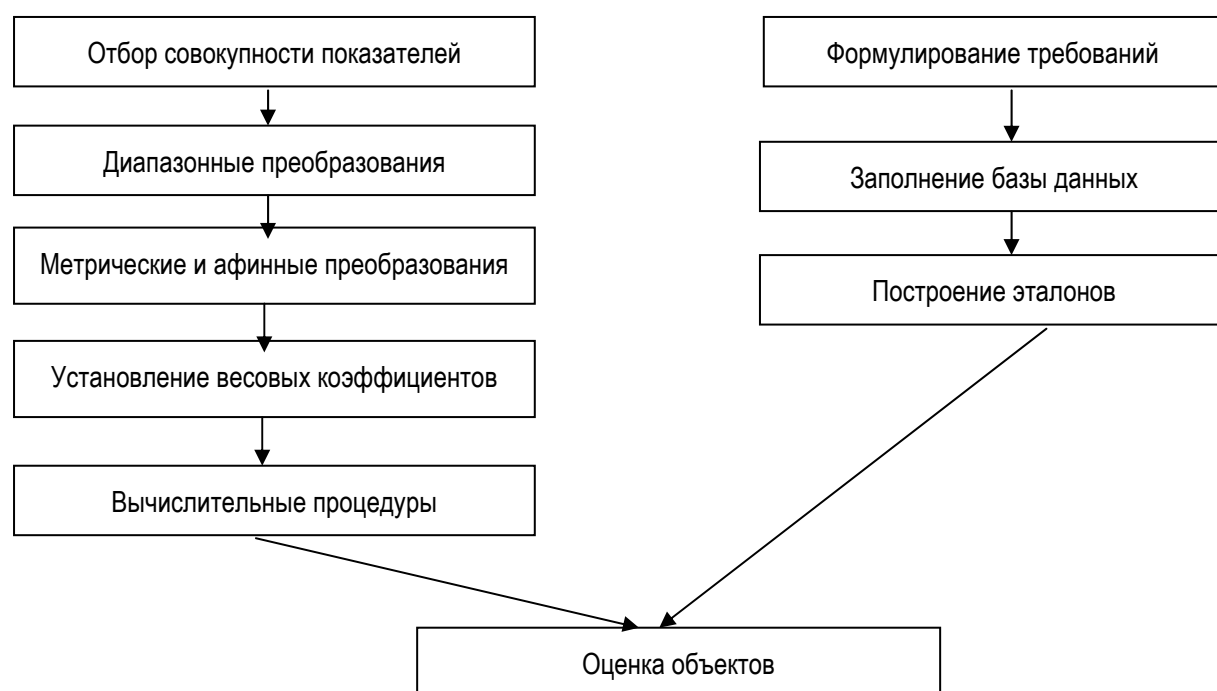


Рис. 1. Описание работы программной экспертной системы. Левый столбец – перечень предварительных действий с экспертами; правый столбец – работа с системой в диалоговом режиме.

При построении программной экспертной системы на первом этапе с участием специалистов в данной предметной области должен быть отобран и согласован перечень показателей, характеризующих данный социальный объект или ситуацию, проведено ранжирование этих признаков (взвешивание), определены и/или оценены отношения и зависимости между ними.

Как было указано выше, отбор системы показателей представляет собой самостоятельную задачу, и для разных постановок оценки уровня и качества жизни будет заканчиваться различными вариантами совокупности описывающих характеристик.

Обозначим знаком  $f_i$  объект (район, территорию, страну), уровень жизни населения которого нам нужно оценить обобщенным показателем. Как указывалось, для этого объекта должны быть определены (измерены) значения  $y_j$  различных отобранных показателей ( $j=1, \dots, n$ ), в достаточной мере описывающих данный объект с точки зрения интересующего нас качества:

$$E = \{y_1, \dots, y_j, \dots, y_n\}.$$

Воспользуемся для построения оценки нашего объекта определенным геометрическим представлением. Введем в рассмотрение пространство  $E$ , размерность которого определяется числом  $n$  показателей, отобранных для получения интегральной оценки. В этом  $n$ -мерном пространстве каждая из осей координат закреплена за определенным показателем (на рис. 2 представлен случай для  $n = 3$ ).

### АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ

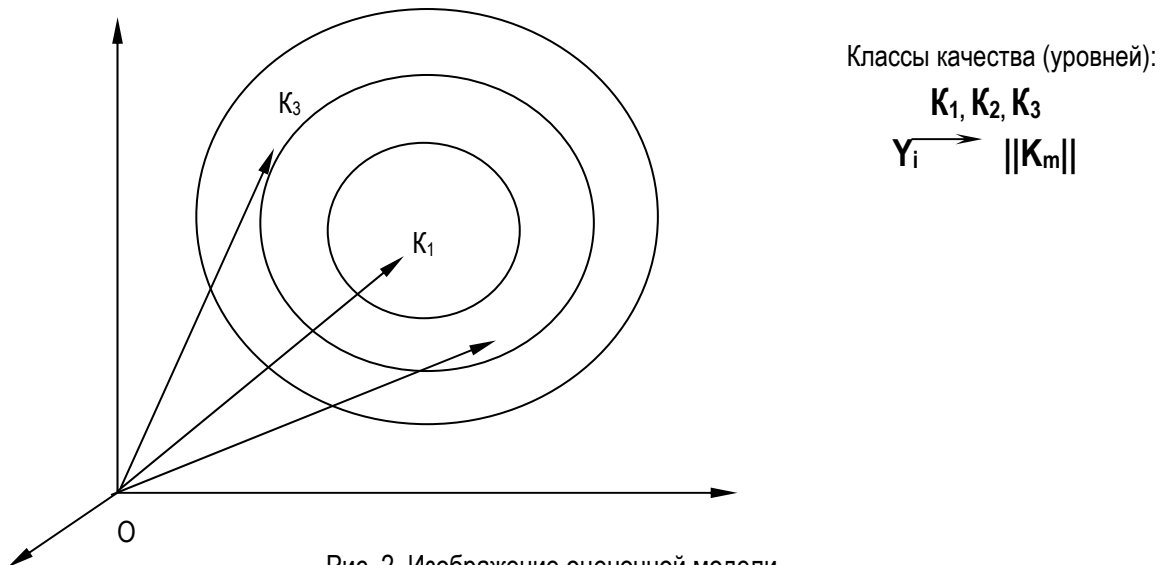


Рис. 2. Изображение оценочной модели  
 $K_1 - K_3$  - векторы-описания оцениваемых объектов

При непосредственной оценке уровня и качества жизни исследуемого объекта производится измерение величины показателей  $y_i$ , после чего эти значения нормируются, претерпевают определенные линейные преобразования (масштабирование и др.) и откладываются на осях в пространстве показателей. На этой базе строится векторная сумма измеренных локальных показателей.

Модуль суммарного многомерного вектора, представляющего собой некий обобщенный показатель оцениваемого объекта, и будем использовать для интегральной системной оценки  $Y_i$  данного объекта  $f_i$ , для количественного, формального описания уровня или качества жизни на данной территории:

$$Y_0 = \left\| \frac{1}{S} \sqrt{\sum (y_j)^2} \right\|$$

Это выражение представляет собою по сути дела уравнение состояния описываемой системы, т.е. это и есть интегральная оценка искомого уровня, построенная на локальных показателях. В математическом смысле она представляет собой векторную сумму исходных (преобразованных) локальных показателей.

При сопоставлении трех описанных моделей следует отметить, что при факторном анализе имеет место ряд ограничений: показатели считаются независимыми, что далеко не всегда верно; в построении



главных компонент участвуют не все показатели; нужна проверка на информативность, то есть полученная оценка содержит лишь часть информации об оцениваемом объекте.

Кроме того, и это очень важно, результаты измерений с помощью факторных моделей зависят от статистики, оценка будет меняться с изменением числа сравниваемых объектов и т. д.

Векторная модель в значительной мере свободна от этих недостатков. Она умеет работать с зависимыми признаками, используя направляющие косинусы при построении пространства показателей; в построении обобщенной оценки участвуют (со своими весами) все показатели и т. д. Очень важно, что при необходимости может быть моментально проведен внутренний анализ – за счет какого показателя произошло ухудшение или улучшение; система несравнимо более проста (например, не нужно строить и обрабатывать ковариационную матрицу, искать собственные значения компонент и т. д.). Может быть выполнен прогноз и классификация объектов и оценок [8, 10]. Но наиболее важно то, что здесь для оценки берутся не косвенные обобщенные характеристики из факторов, порой даже весьма остроумно построенных, а используется непосредственно **уравнение состояния системы**, написанное на языке ее прямых характеристик.

---

### Примеры применения

---

Ниже приведены примеры применения модели  $M_E$  при анализе различных сторон управления в задачах повышения уровня и качества жизни: оценка уровня социально-экономического развития южных областей Украины и оценка благосостояния нескольких административных районов Приднестровья.

Для получения интегральной оценки социально-экономического развития данной области целесообразно рассмотреть в совокупности (с учетом их вклада) различные важные сферы хозяйственного комплекса этой области, различные характеристики внешних (в основном - экономических) и внутренних (в основном - социальных) функций области как единого организма [6].

Как указывалось выше, в основу программной экспертной системы была положена достаточно простая математическая модель, использующая измерение расстояний в условном пространстве оценок. Ее применение дало возможность рассматривать отобранные социально-экономические показатели с точки зрения соответствия поставленным целям, различным СНИПам и "образцовым" ситуациям. Такой оптимизированный условный уровень и принимается за 100 баллов. Отметим, что по отношению к этому уровню усредненная оценка социально-экономического состояния южных областей Украины в середине 80-х годов составляла примерно 60-70 баллов.

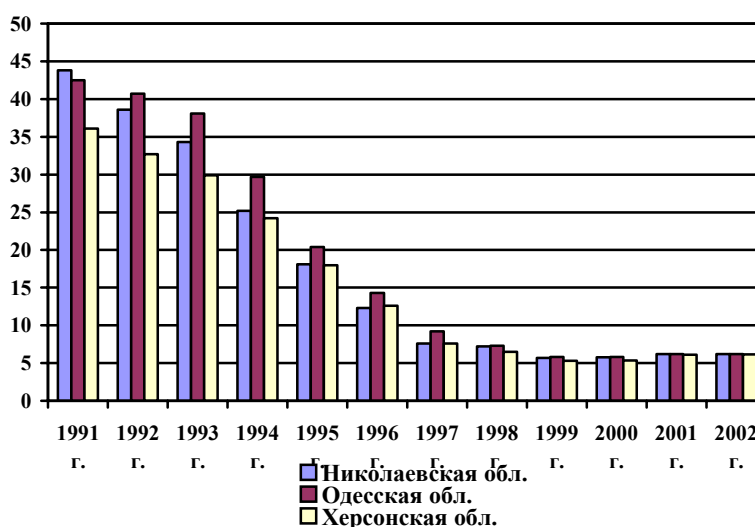
Основой для заполнения базы данных системы явились взятые из официальных статистических источников характеристики по областям региона (статистические ежегодники [9]).

Всего для построения обобщенной оценки было использовано около 70 показателей: группа социально-демографических характеристик (рождаемость, смертность, браки, разводы и т.п.), группа показателей здравоохранения (число врачей и среднего медперсонала, больничных коек и их оборота, пропускная способность амбулаторно-поликлинических учреждений и др.), показатели работы промышленности, транспорта, сельского хозяйства, капитального строительства, науки, состояния сферы образования, торговли, жилья, культуры и т.д. На основе этой информационной базы было сделано построение обобщенного агрегированного балльного показателя, характеризующего уровень социально-экономического развития данной территории.

Для учета содержательного вклада каждого показателя в выстраиваемую оценку уровня социально-экономического развития использовались весовые коэффициенты, назначаемые экспертами-специалистами с последующим усреднением и обработкой. Значения весов различных показателей отличались не более, чем на 30% - 40%. Так, весовая оценка вклада (значимость) 1 м<sup>2</sup> жилой площади была на 20% - 25% выше оценки вклада 1 м<sup>2</sup> торговых площадей, негативное значение от увеличения младенческой смертности превышало на 40% таковое от увеличения смертности вообще и т. д.

Большинство показателей было взято в удельном представлении – по отношению к численности населения данной области, к ее площади, величине полного прироста населения и т. д. Это дает возможность более корректно определить обобщенную оценку и производить сопоставление различных областей.

На рис. 3 показаны результаты модельного сравнения уровня социально-экономического развития трех причерноморских областей Украины (Одесской, Николаевской и Херсонской) с 1991г. по 2002 г.



	1991	1992	1994	1995	1997	1998	2000	2001	2002
Николаевская	43,8	38,6	25,2	18,1	7,6	7,2	5,75	6,2	6,2
Одесская	42,5	40,7	29,7	20,4	9,2	7,3	5,8	6,2	6,2
Херсонская	36,1	32,7	24,2	18,0	7,6	6,5	5,35	6,1	6,15

Рис. 3. Динамика уровня социально-экономического развития областей Украинского Причерноморья за 1991-2002 г.г., в баллах

Определенным примером локального социально-экономического мониторинга, посвященного наблюдению и контролю лишь части характеристик, описывающих уровень и качество жизни, является следующая работа.

В разрезе административных районов Одесской области нами за ряд лет были взяты такие показатели как: средние зарплаты и пенсии по району, доля приходящихся на одного жителя доходов и расходов в местных бюджетах, демографические показатели, характеристики безработицы (в структуре, т.е. отдельно женская безработица, молодежная), статистика правонарушений (также в структуре). Были также взяты некоторые показатели, которые имеют наиболее выраженный социальный характер: заболеваемость туберкулезом и смертность в связи с ним, детская анемия и др.

На этой информационной базе, с применением модели  $M_E$ , была построена обобщенная характеристика социального благополучия-неблагополучия в районах Одесской области за несколько лет. На рис. 4 приведена эта усредненная картина для придунайских районов Одесской области. На этом рисунке белым цветом показаны районы, интегральная оценка социального состояния которых находится в верхней части всего диапазона полученных оценок (т.е. в которых это социальное состояние лучше других районов); серым отмечены районы, находящиеся в средней части шкалы полученных оценок; черным показаны те районы, которые в данном году оказались в нижней части всего диапазона оценок. Из рисунка видно, в частности, что в 1997 г. среди обследованных районов не оказалось ни одного «черного», а Измаильский, Ренийский и Болградский районы получили более или менее приличную оценку; к концу же 1999 г. на этой территории не осталось ни одного «белого» района...

Помимо приведенных примеров, векторная модель построения интегрального показателя применялась для сравнения трех вариантов прокладки судоходного глубоководного хода Дунай – Черное море. Сравнение велось по набору из 50-ти показателей: экономических, технологических, социальных, экологических, эксплуатационных и т. д. Вариант по гирлу Быстрое, реализованный фирмой «Дельта - Лоцман» и проходящий через Дунайский биосферный заповедник, получил самую низкую оценку.

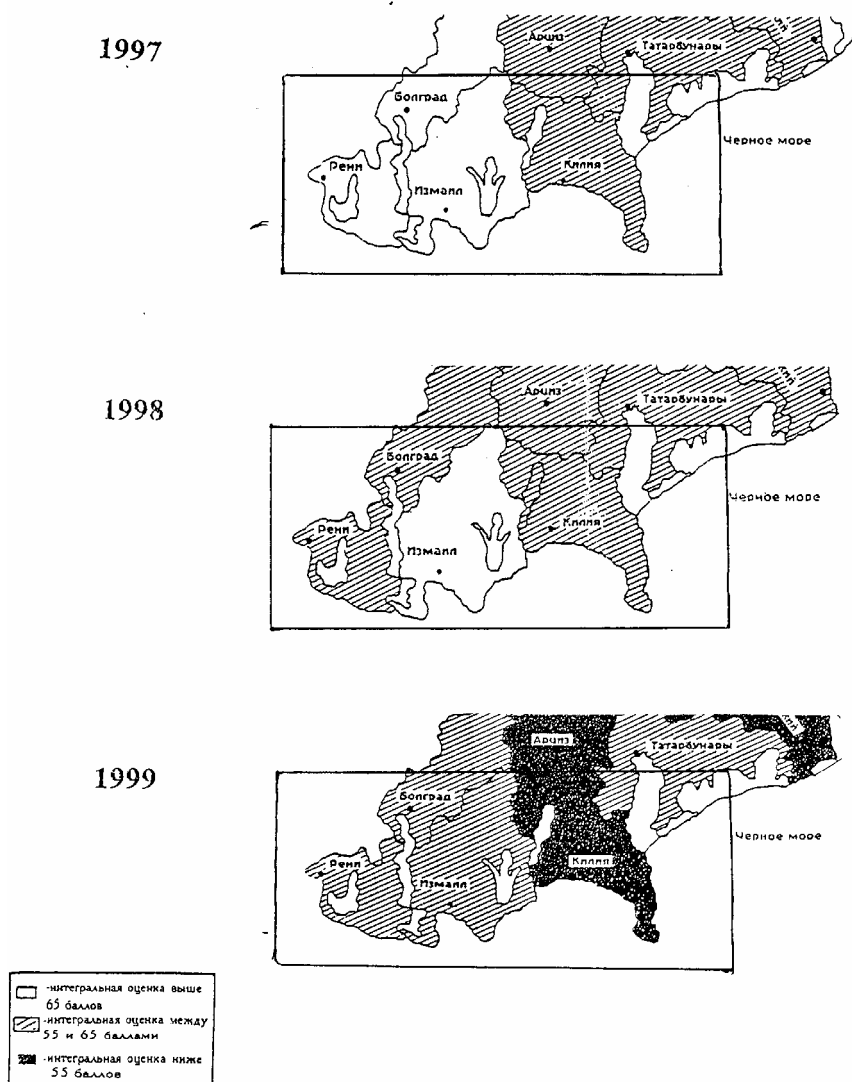


Рис.4. Обобщенная характеристика социального состояния Придунайских районов Украины в 1997–1999

## Литература

1. Симоненко В.К. Украинское Причерноморье: потенциальные возможности и перспективы развития.- К.: Вища школа, 1996.
2. Integrated and coordinated implementation and follow-up of major United Nations Conferences and Summits; A critical review of the development of indicators in the context of conferences follow-up (7 April 1999, United Nations, E/1999/11).
3. Айвазян С. А., Мхитарян В. С. Прикладная статистика и основы эконометрики. – М.: ЮНИТИ, 1998.
4. Социальная статистика. / Под ред. И. И. Елисейевой.- М., 1997.
5. Артеменко В. Б. Соціально-економічний моніторинг регіонів обласного рівня: концепція та методичний інструментарій. // Регіональна економіка. – 1998. №3.
6. Крисиллов А.Д. Интегральная оценка социально-экономического развития приморских областей Украины: ресурсы, ситуация, приоритеты // Національні і регіональні особливості реформування соціально-економічних відносин і регулювання екологічних процесів в Україні та Польщі.- Киев – Одесса – Варшава, 1997.
7. Крисиллов В. А. Оценка сложных объектов – основной механизм при решении задач количественного обоснования решений. // Труды Одесск. политехн. ун-та, вып. 1 (19). – Одесса, 2003.
8. Krissilov V. A., Krissilov A. D., Tarasenko R. A. Transformation of object feature space under the goal of evaluation. // Proc. of Confer. "IPMU'98". – Paris, 1998.
9. Сборники «Народное хозяйство Украины» и «Статистичні щорічники України», 1991-2003 гг., Киев.
10. Степанов В. Н., Крисиллов А.Д., Крисиллов В. А., Волошин Д. В., Ивахненко А. Г. и др Экономико-экологическое прогнозирование (методология, методы, приложения). Под ред. В. Н. Степанова. – Одесса, ИПРЭЭИ, 2004.

---

**Информация об авторах**

---

**Крисилов А. Д.** – Ин-т проблем рынка и экономико-экологических исследований НАН Украины, ст. н. с., Одесса-44, 65044, Французский бульв., 29, e-mail: [victork@405.com.ua](mailto:victork@405.com.ua)

**Степанов В.Н.** – Ин-т проблем рынка и экономико-экологических исследований НАН Украины, зам. директора по научной работе, проф., Одесса-44, 65044, Французский бульв., 29

**Голяева И. И.** – Региональное изд. «Одесские известия», обозреватель, Одесса-19, Канатная, 83.

**Блюхер Б.** – Indiana University, Chief of Public Health Dept., PhD, Prof., P.O.Box: 1125, Terrahaute-306, IN, USA.

## ANALOGOUS REASONING FOR INTELLIGENT DECISION SUPPORT SYSTEMS

**A.P. Eremeev, P.R. Varshavsky**

*Abstract: Methods of analogous reasoning for intelligent decision support systems are considered. Special attention is drawn to methods based on a structural analogy that use the analogy of properties, the analogy of relations, and take the context into account. This work was supported by RFBR (project 02-07-90042).*

---

### 1. Introduction

---

Investigation of mechanisms that are involved in the analogous reasoning process is an important problem both for psychologists and specialists in artificial intelligence (AI). The analogy can be used in various applications of AI and for solving various problems, e.g., for generation of hypotheses about an unknown subject domain or for generalizing experience in the form of an abstract scheme. Psychologists study mechanisms underlying analogies in order to understand how human beings learn and reason. In turn, AI experts model analogous reasoning by computers in order to develop more flexible models of search for solutions and learning. The great interest in this problem is caused by the necessity of modelling human reasoning (common sense reasoning) in AI systems and, in particular, in intelligent decision support systems (IDSS).

In this paper, we consider approaches and methods of search for solutions based on structural analogy, which are oriented to use in real-time (RT) IDSS. These systems are usually characterized by strict constraints on the duration of the search for the solution. One should note that, when involving models of analogous reasoning in IDSS, it is necessary to take into account a number of the following requirements to systems of this kind [1]:

- The necessity of obtaining a solution under time constraints defined by real controlled process;
- The necessity of taking into account time in describing the problem situation and in the course of the search for a solution;
- The impossibility of obtaining all objective information related to a decision and, in accordance with this, the use of subjective expert information;
- Multiple variants of a search, the necessity to apply methods of plausible (fuzzy) search for solutions with active participation of a decision making person (DMP);
- Nondeterminism, the possibility of correction and introduction of additional information in the knowledge base of the system.

The generalized structure of a real-time IDSS [2] is given in Fig. 1.

The search for an analogous solution may be applied in units of analysis of the problem situation, search for solutions, learning, adaptation and modification, modelling, and forecasting. The use of the respective methods in IDSS broadens the possibilities of IDSS and increases the efficiency of making decisions in various problem (abnormal) situations.

Special attention in this paper will be paid to the most efficient inference methods on the basis of structural analogy that take into account the context and rest on the structure mapping theory.

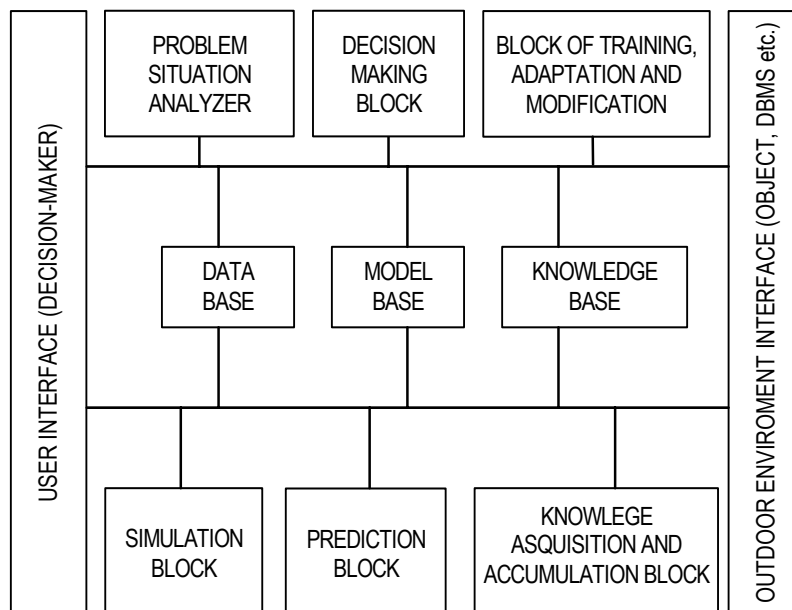


Fig. 1 Base RT IDSS structure

## 2. Analogous Reasoning

Questions about the nature of analogies, a formal definition, justification of reasoning by analogy, etc., arose in the time of epicureans and stoics. The attempts to answer these questions, starting from the first attempts of Leibniz to formalize this notion up to our time, have not received a final answer [3-4].

In encyclopedia the word analogy (analogia, Greek: correspondence, similarity, likeness, closeness) is defined as the similarity of objects (phenomena, processes) with respect to some properties. Reasoning by analogy is the transfer of knowledge obtained from an object to a less studied one, which is similar to the latter with respect to some essential properties or attributes. Thus, analogous reasoning can be defined as a method that allows one to understand a situation when compared with another one [4-5]. In other words, an analogy is an inference method that allows one to detect likeness between several given objects due to transfer of facts and knowledge valid for both objects, to other objects and to determine a means of problem solution or to forecast unknown properties. It is this type of inference that is used by a human in the first stages of solving a new problem.

Notwithstanding the fact that the method of analogy is intuitively clear to everyone and is actively used by humans in everyday life, the notion of analogy does not allow for complete formal definition and, hence one cannot uniquely describe the mechanism of reasoning by analogy. At the present time, there are a great number of various models, schemes, and methods that describe mechanisms of analogous reasoning [3-11].

### Analogy types

Analysis of the literature has shown that one can distinguish various types of analogies. In [6] it was proposed to distinguish two types: an analogy for solving problems and an analogy for forecasting.

The analogy for solving problems assumes applying reasoning by analogy for increasing the efficiency of the solution of problems, which, generally speaking, can be solved without analogy as well, as, e.g., in programming and proving theorems.

Analogy for prediction (forecasting) uses reasoning by analogy for obtaining new facts. Due to the transformation of knowledge based on the likeness of objects, one can make the conclusion that new facts probably hold. For example, if an analogy is applied to a system of axioms, the result may be certain theorems valid with respect to the system. Here, using the similarity between axiom systems, one can transform a theorem in a system to a logical formula in another system and make a conclusion that the latter is a theorem.

Depending on the nature of information transferred from an object of an analogy to the other one, the analogy of properties and that of relations can be distinguished.

The analogy of properties considers two single objects or a pair of sets (classes) of homogeneous objects, and the transferred attributes are properties of these objects, for example, an analogy between illness symptoms of

two persons or an analogy in the structure of the surfaces of Earth and Mars, etc.

The analogy of relations considers pairs of objects, where the objects can be absolutely different and the transferred attributes are properties of these relations. For example, using the analogy of relations, bionics studies processes in nature in order to use the obtained knowledge in modern technology.

According to plausibility degrees one can distinguish three types of analogies: strict scientific analogies, nonstrict scientific analogies, and nonscientific analogies.

A strict scientific analogy is applied to scientific studies and mathematical proofs. For example, the formulation of the attributes of the similarity of triangles is based on a strict analogy, which results in a deductive inference, i.e., which deduces a valid conclusion.

Unlike the strict analogy, a nonstrict scientific analogy results only in plausible (probable) reasoning. If the probability of a false statement is taken equal to 0 and that of the true statement is taken equal to 1, then the probability of inference by a nonstrict analogy lies in the interval from 0 to 1. To increase this probability, one needs to satisfy a number of requirements to the method of reasoning by analogy, otherwise, a nonstrict analogy may become nonscientific.

The probability of conclusions by a nonscientific analogy is not high and often is close to 0. A nonscientific analogy is often used deliberately to perplex the opponent. Sometimes, a nonscientific analogy is used unintentionally, by someone not knowing the rules of analogies or having no factual knowledge concerning the objects and their properties that underlie the inference. For example, nonscientific analogies underlie superstitions.

In what follows, we consider in detail the methods of search for a solution on the basis of structural analogy, which allows one to take into account the context and are based on the theory of structural mapping. We use semantic networks (SNs) as a model of knowledge representation.

### 3. Knowledge Representation in the Form of a Semantic Network for Analogous Reasoning

The choice of an SN for knowledge representation is due to an important advantage, which distinguishes it from other models, such as natural representation of structural information and fairly simple renewal in a relatively homogenous environment. The latter property is very important for RT IDSSs oriented to open and dynamical subject domains.

A **semantic network** is a graph  $\langle V, E \rangle$  with labelled vertices and arcs, where  $V$  and  $E$  are sets of vertices and arcs, respectively. The vertices can represent objects (concepts, events, actions, etc.) of the subject domain, and the arcs represent the relation between them.

We consider the structure of the SN in more detail using an example from power engineering -operation control of nuclear power unit (Fig. 3).

We give a semantic interpretation of the information given in the SN for Situation 1 (Fig. 3b):

- It is recommended to inject TH11B01 with boric concentrate 40 g/kg caused by switching off ACS 1 (automatic cooling system) due to closing the gates TH11S24 and TH11S25;
- ACS is switched off due to the closed gates TH12S24 and TH12S25;
- The upper setting T517B01 (pressure in the container of ACS 1) is equal to 63;
- The lower setting T517B01 (pressure in the container of ACS 1) is equal to 56;
- The upper setting TH11T500 (temperature in the frame of ACS 1) is equal to 60;
- The lower setting TH11T500 (temperature in the frame of ACS 1) is equal to 20.

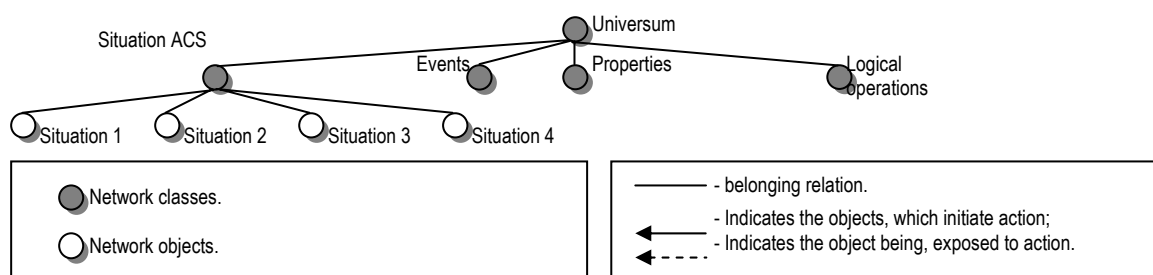


Fig. 3 (a) A fragment of the semantic network that represents the metalevel

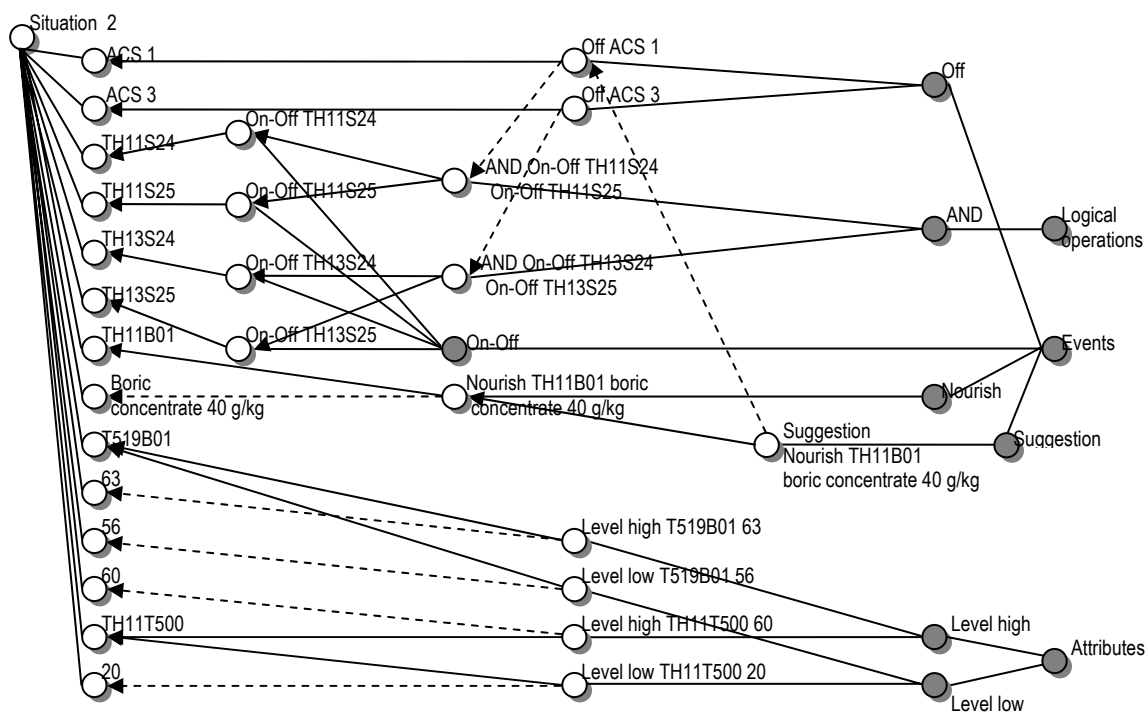
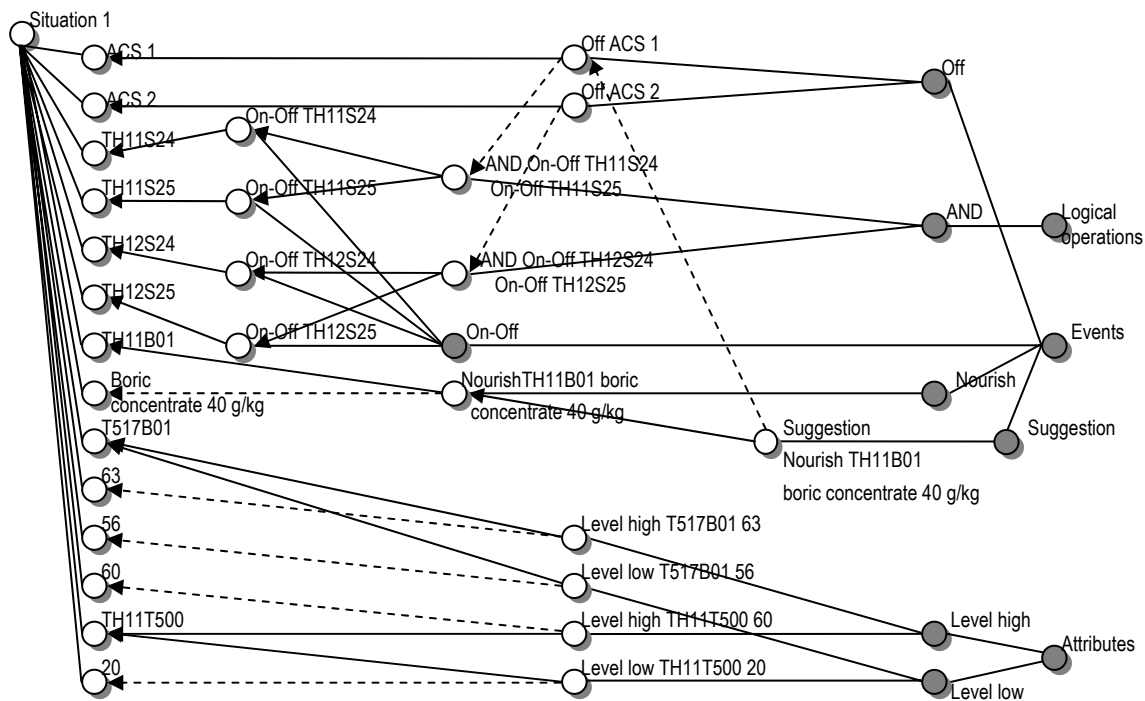


Fig. 3 (b) A fragment of the semantic network that represents the situations (Situation 1 and Situation 2) that were formed in the course of ACS functioning

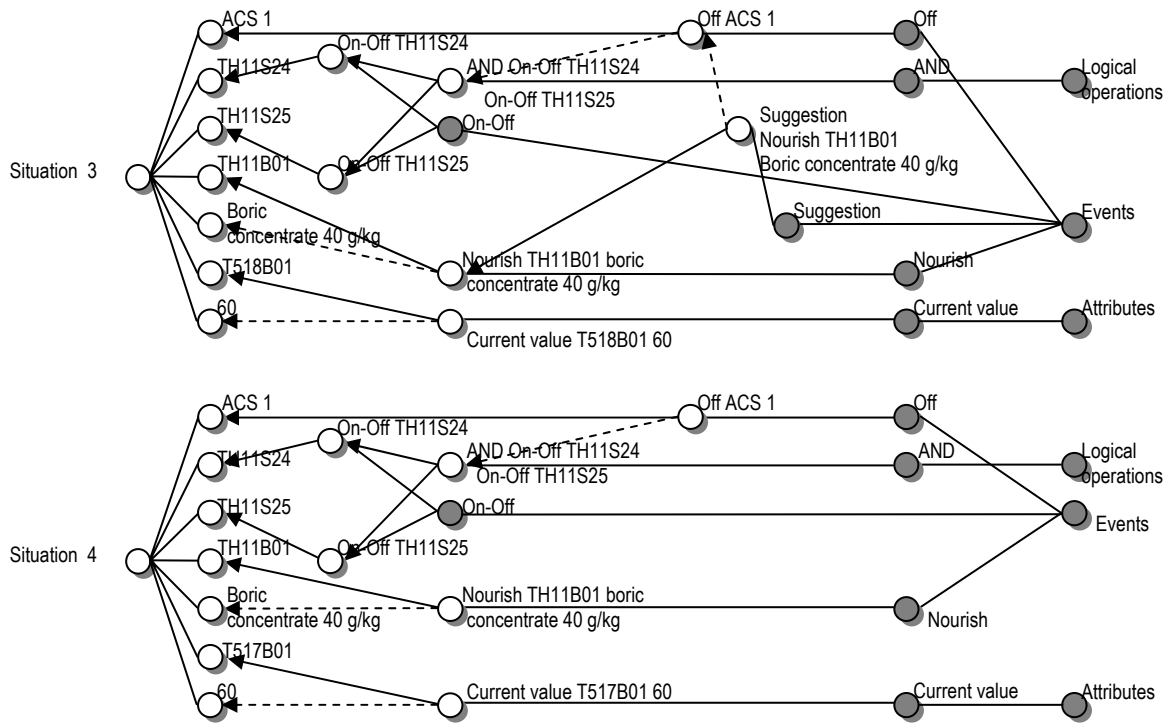


Fig. 3 (c) A fragment of the semantic network that represents the situations (Situation 3 and Situation 4) that were formed in the course of ACS functioning

**4. Search for a Solution on the Basis of Structural Analogy Taking into Account the Context**

In [7] it was proposed to consider an **analogy** as a quadruple  $A = \langle O, C, R, P \rangle$ , where **O** and **R** are the source object and the receiver object and **C** is the intersection object, i.e., the object that structurally intersects the object source and object receiver, which has a larger cardinality of the set of properties as compared with these objects. In other words, the analogy between the source object and receiver object is considered in the context of the intersection, and **P** is the property for definition of the original context. The structure of this analogy is represented in Fig. 4.

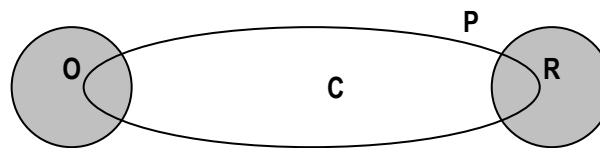


Fig. 4 Structure of analogy using the context

Using the described structure of the analogy, the authors of [7] propose an algorithm for the problem solution that is based on an analogy of the properties. An SN with information about the subject domain, a receiver **R**, and the property for defining the original context **P** provide input data for this algorithm.

**The algorithm for the problem solution on the basis of an analogy taking into account the context** consists of the following steps.

**Step 1.** Determine all objects of the SN, except for receiver **R**, that have property **P**. If there are no objects of this kind, then the search for a solution fails (without finding an analogy), otherwise, go to step 2.

**Step 2.** For the objects found in step 1, determine all possible intersections of **C** with **R** taking into account **P**. If there are no intersections of **C**, the first search for a solution fails, otherwise, go to step 3.



**Step 3.** From the objects extracted in step 1, determine all possible sources **O** for analogies with the receiver **R** and the intersection **C** taking into account **P**. In the case of success (possible analogies for **R** are defined), go to step 4, otherwise, the search for a solution fails.

**Step 4.** From the analogies extracted in step 3, choose the most appropriate (taking into account the requirements of the DMP). In the case of success, go to step 5; otherwise, the search for a solution fails.

**Step 5.** The analogies obtained in step 4 (which could be previously compared with each other taking into account the context) are given to the DMP, which means successful termination of the algorithm.

Having obtained analogies, the DMP may then make the final choice of the best ones. On the basis of these facts, the facts (properties) that hold for the source **O** are transferred to the receiver **R**.

Consider a modified algorithm for a problem solution that uses the structural analogy based on the modified structure of an analogy and the algorithm for the search of minimal intersections [5]. The modification consists in the fact that **P** is considered not as a unique property, but as a set of properties that determine the original context of the analogy.

As compared with the base variant, one of the main advantages of this modified algorithm is the possibility of realizing the search for a solution on the basis of an analogy without refining the original context, since in the result of the search for the minimal intersection, one can easily distinguish all possible contexts for the analogy. For example, if it is necessary to find analogues for Situation 4 (Fig. 3c), then, for the base algorithm, one should indicate property **P** to determine the original context (e.g., the property "Switch off ACS") since in the result analogues will be obtained in all possible contexts. Another important advantage of the modified algorithm is the possibility of a more detailed refinement of the original context for the determination of analogies; i.e., as **P**, one can choose several properties (e.g., "Switch off ACS" and "Switch off-Close TH11S24"). This is especially important in the work with a complex object, when one should operate with large amount of information, since the more detailed the original context, the faster the search for a solution on the basis of analogies will be realized and the more qualitative the solution obtained will be. Moreover, in the modified algorithm there is a possibility to construct an analogy taking into account the context between well-known objects, the source and the receiver.

Thus, in the execution of the modified algorithm the procedure of searching for minimal intersections is used. In turn, the minimal intersections determine the context for the analogy. At the second stage, depending on the fact whether an object source and a property or a set of properties are given, or there is no refinement of the original context from objects that are contained in the set of generators of minimal intersections, analogies are formed. In the case of successful termination of the search for a solution on the basis of analogies, new facts for the receiver object will be obtained.

---

## 5. Search for Solution on the Basis of an Analogy Based on the Structure Mapping Theory

---

Structure mapping theory (SMT) allows one to formalize the set of implicit constraints, which are used by the human who operates notions such as analogy and similarity [8]. This theory uses the fact that an analogy is a mapping of knowledge of one domain (base) in another domain (target) based on the system of relations between objects of the base domain, as well as the target domain. The main principle of SMT is that of a systematic character, which reflects the fact that humans (DMP) prefer to deal with a system of connected relations, not just with a set of facts or relations.

According to SMT, the inference process on the basis of analogies consists of the following stages.

**1) Definition of potential analogies.** Having the target situation (target), define another situation (base) that is analogous or similar to it.

**2) Mapping and inference.** Construct a mapping that consists of matches between the base and the target. This mapping can contain additional knowledge (facts) about the base that can be transferred to the target. These pieces of knowledge are called candidates of conclusions formed by an analogy.

**3) Estimate the match "quality."** Estimate the correspondence found using structural criteria such as the number of similarities and differences, the degree of structural correspondence, and the quantity and type of new knowledge synthesized by analogy from the conclusion candidates. We stress that the estimate of the "quality" of matching in SMT is based only on structural criteria that distinguish analogies from other types of inference.

Besides analogies, other types of likeness based on structurally compatible mapping can be represented in SMT. In the case of an analogy, only structures of relations are mapped, while the properties of objects that do not play

role in the structure of relations are ignored. In strict likeness both the structures of relations and the properties of objects are mapped. In purely external matching, object properties are mapped (e.g., as in the metaphor "The road is like a silver band"), and in abstract mapping the entities in the base domain are not objects, but some variables.

Consider the structure mapping engine (SME) which is based on SMT [8-9]. This mechanism is suited for modelling inference by an analogy providing the match of an estimate independent of the subject domain. The input data for the SME algorithm are structural representations of the base and target domains.

**Algorithm SME** consists of the following steps:

**Step 1.** Constructing local mappings. Determine the matches (mapping hypotheses) between separate elements in the base and target domains by means of the following rules:

(1) If two relations have the same name, then create a mapping hypothesis.

(2) For the mapping hypothesis between relations, test the arguments: if they are objects or functions, then create for them local mapping hypotheses. Determine the plausibility estimates for these local hypotheses using the following rules:

(a) increase the plausibility degree for the correspondence if the base and the target relations have the same names;

(b) increase the plausibility degree for the correspondence if it is known that the base relation has the parent relation.

Rule (a) prefers the identity of relations, and (b) reflects the principle of the systematic character of relations.

**Step 2.** Construction of global mappings. Form mapping systems that use compatible pairs of objects (Emaps). Unite them in systems of relation with compatible mapping of objects. With each global mapping of this kind (Gmap), relate the set of conclusion candidates.

**Step 3.** Construct conclusion candidates. For each mapping Gmap, construct a set of the facts (possibly empty) that occur in the base domain, which does not occur originally in the target domain.

**Step 4.** Estimate of global matches. The global matches receive a structural estimate that is formed taking into account the plausibility of local correspondence. Terminate.

Thus, as a result, the most systematic consistent mapping structure Gmap that includes the following components arises: matches is set of paired mappings between base and target domains; conclusion candidates is the set of new facts that presumably are contained in the target domain; structure estimate is a numeric equivalent of the match quality based on the structural properties of Gmap.

The main advantages of SME that are especially important for RT IDSS are the polynomiality of the considered SME-algorithm and the simplicity of importing the conclusion candidates in the target domain. Note that this mechanism is used in a number of research systems (in the domain of plausible inference on the basis of analogies), in particular, in the systems ACME, LISA, IAM, Sapper, CyclePad, PHINEAS [10].

---

## 6. Conclusion

---

Methods of the search for a solution on the basis of a structural analogy were considered from the aspect of their applications in modern IDSS, in particular, for a solution of problems of real-time diagnostics and forecasting. Methods based on analogies of properties and relations were described. An example of an algorithm for the search of a solution on the basis of an analogy of properties that takes into account the context was proposed. A more efficient algorithm, in the sense of the solution quality, is proposed. It uses a modified structure of an analogy that is capable of taking into account not one property (as in the base algorithm), but a set of properties. These properties determine the original context of the analogy and transfer from the source to the receiver only those facts that are relevant in the context of the constructed analogy.

We stress once again that analogous reasoning can be used both for solution of well-formalized problems and for the problems of search forecast (as is done, e.g., in the JSM-method of automated hypothesis generation [11]). In other words, analogous reasoning is an approximate inference rule based on heuristic mechanisms. Therefore, any solutions obtained with the use of it should be amplified by reliable methods of reasoning if their use is planned for making important decisions or actions.

The presented method was applied in realization of a prototype of a real-time IDSS on the basis of nonclassical logics for monitoring and control of complex objects like power units.

---

## References

---

1. Vagin V.N., Ereemeev A.P. Construction of real time intelligent decision support system. Intelligent control: new intelligent technologies for control problems (ICIT'99). Third. Intern. Conf., Pereyaslavl-Zalesskiy, Russia, -M.: Science, Phizmatlit, 1999.
2. Ereemeev A.P. On model integration in intelligent decision support systems. 9th National Conf. CAI-2004, in 3 vol., V.2. -M.: Phizmatlit, 2004, Russia, pp 815-823.
3. Pospelov D.A. Reasoning modelling. -M.: Radio and communication, 1989, Russia.
4. Uemov A.I. Logical basis of modelling method. -M.: "Idea", 1971, Russia..
5. Ereemeev A.P., Varshavsky P.R. Implementation of method of approximate reasoning based on analogues. Integrated models and flexible calculations in artificial intelligence. Collection of scientific papers of the second international science-practice seminar. – M.: Phizmatlit, 2003, Russia.
6. Varshavsky P.R. Analogy method and its applications to case-based reasoning in intelligent decision support systems. 9th National Conf. CAI-2004, in 3 vol., V.1. -M.: Phizmatlit, 2004, Russia, pp 218-226.
7. D. Long, R. Garigliano Reasoning by analogy and causality: a model and application. Ellis Horwood Series in Artificial Intelligence, 1994.
8. D. Gentner. Analogical inference and analogical access. In Analogica, Prieditis, A.(Ed.), Morgan Kaufmann, Los Altos, California US, 1988.
9. Varshavsky P.R. The use of structure mapping engine (SME) in analogous reasoning method. International informatization forum 2002: International conference reports «Informative devices and technologies», in 3 vol., V1. -M.: Yanus-K, 2003, Russia.
10. B. Falkenhainer, K. Forbus, D. Gentner The Structure-Mapping Engine. In Proceedings of AAAI-86 PA, Philadelphia, 1986.
11. Phinn V.K. Cognitive procedures generation and problem of induction. STI. SER. 2. № 1-2 1999, Russia.

---

## Authors' Information

---

A.P. Ereemeev – [eremeev@apmsun.mpei.ac.ru](mailto:eremeev@apmsun.mpei.ac.ru)

P.R. Varshavsky – [VarshavskyPR@mpei.ru](mailto:VarshavskyPR@mpei.ru)

Applied Mathematics Department of the Moscow Power Engineering Institute (Technical University)

## A MULTICRITERIA DECISION SUPPORT SYSTEM *MULTIDECISION-1*<sup>1</sup>

**Vassil Vassilev, Krasimira Genova, Mariyana Vassileva**

**Abstract:** *The present paper describes some basic elements of the software system developed (called MultiDecision-1), which consist of two separate parts (the systems MKA-1 and MKO-1) and which is designed to support decision makers in solving different multicriteria analysis and multicriteria optimization problems. The class of the problems solved, the system structure, the operation with the interface modules for input data entry and the information about DM's local preferences, the operation with the interface modules for visualization of the current and final solutions for the two systems MKA-1 and MKO-1 are discussed.*

**Keywords:** *multicriteria analysis, multicriteria optimization, multicriteria decision support system.*

---

## Introduction

---

Multicriteria decision making problems can be divided [Vincke, 1992] into two separate classes depending on their formal statement. In the first class of problems a finite number of alternatives are explicitly given in a tabular form. These problems are called discrete multicriteria decision making problems or multicriteria analysis

---

<sup>1</sup> This paper is partially supported by NSF of the MES, contract И-1401/04 "Interactive Algorithms and Software Systems Supporting Multicriteria Decision Making"

problems. In the second class, a finite number of explicitly set constraints in the form of functions define an infinite number of feasible alternatives. These problems are called continuous multicriteria decision making problems or multicriteria optimization problems

Different methods have been developed to solve multicriteria analysis problems, which can be divided into several groups. A great number of the methods developed up to now can be grouped in three separate classes: weighting methods, outranking methods and interactive methods. Each one of these methods has its advantages and shortcomings, connected mostly with the ways of deriving information by the decision-maker (DM) regarding his/her local and global preferences. The main element in the weighting methods is the way of determining the criteria weights, which reflect DM's preferences to the highest degree. Many methods for criteria weighting have been developed. A value tradeoff method is proposed in [Keeney and Raiffa, 1976]. Several versions of the analytic hierarchy process (AHP method) are developed in [Saaty, 1980], [Saaty, 1994], using pair-wise criteria comparison. A direct ranking and rating method is proposed in [Von Winterfeldt and Edwards, 1986], in which the DMs first rank all the criteria according to their importance. The weighting methods use a DM's preference model, which does not allow the existence of incomparable alternatives and the preference information obtained by the DM (different types of criteria comparison) is sufficient to determine whether one of the alternatives must be preferred or whether the two alternatives are equal for the DM. The outranking methods use a DM's preference model which allows the existence of incomparable alternatives and the preference information obtained by the DM may be insufficient to determine whether one of the alternatives is to be preferred or whether the two alternatives are equal for the DM. The criteria and the alternatives are not compared by the DM in these methods, but he/she has to provide the so-called inter- and intra-criteria information. Some of the more well-known representatives of the outranking methods are ELECTRE I-IV methods [Roy, 1991], PROMETHEE I-II methods [Brans and Mareschal, 1990], TACTIC method [Vansnick, 1986] and others. In order to solve multicriteria analysis problems with a large number of alternatives and a small number of criteria, the "optimizationally motivated" interactive methods have been suggested [Korhonen, 1988], [Sun and Steuer, 1996], [Narula et al., 2003].

One of the most developed and widespread methods for solving multicriteria optimization problems are the interactive methods [Gardiner and Vanderpooten, 1997], [Miettinen, 1999]. This is due to their basic advantages – a small part of the Pareto optimal solutions must be generated and evaluated by the DM; in the process of solving the multicriteria problem, the DM is able to learn with respect to the problem; the DM can change his/her preferences in the process of problem solution. The interactive methods of the reference point (direction) and the classification-oriented interactive methods [Miettinen, 1999] are the most widely spread interactive algorithms solving multicriteria optimization problems. Though the interactive methods of the reference point are still dominating, the classification-oriented interactive methods enable the better solution of some chief problems in the dialogue with the DM, relating to his/her preferences defining, and also concerning the time of waiting for new non-dominated solutions that are evaluated and selected.

The software systems supporting the solution of multicriteria analysis and multicriteria optimization problems can be divided in two classes – software systems with general purpose and problem-oriented software systems. The general-purpose software systems aid the solution of different multicriteria analysis and multicriteria optimization problems by different decision-makers. One method or several methods from one and the same group are usually realized in them for solving multicriteria analysis and multicriteria optimization problems. This is due to the following two reasons:

- in the methods from the different groups, different types of procedures are used to get information from the DM, which leads to considerable difficulties in the realization of appropriate user's interface modules in the software systems;
- the designers of the software systems are usually interested in the realization of their own method (methods) or have distinct preferences towards methods from one and the same group.

The problem-oriented multicriteria analysis systems are included in other information-control systems and serve to support the solution of one or several types of specific multicriteria analysis problems. Hence, some simplified user's interface modules are usually realized in them. That is why methods from different groups of multicriteria analysis methods are included in some of these systems.

Well-known general-purpose software systems supporting the solution of multicriteria analysis problem are the systems Expert Choice [Saaty, 1994], Web-HIPRE [Mustajoki and Hamaiaainen, 2000], HIVIEW [Peterson, 1994], ELECTRE III-IV [Roy, 1991], PROMCALC and GAIA [Brans and Mareschal, 1994], Decision Lab [Brans and

Mareschal, 2000], VIMDA [Korhonen, 1988]. One representative of the problem-oriented systems called Agland Decision Tool is discussed in [Parsons, 2002].

Some well-known general-purpose software systems, which solve problems of multicriteria optimization, are the systems VIG [Korhonen, 1987], NIMBUS [Miettinen and Makela, 2000], DIDAS [Lewandowski and Wierzbicki, 1989], CAMOS [Osyczka, 1988], LBS [Jaszkiewicz and Slowinski, 1994], DINAS [Ogryczak et al., 1992], MOLP-16 [Vassilev et al., 1993], MONP-16 [Vassilev et al., 1993], MOIP [Vassilev et al., 1997]. The first type comprises the interactive algorithms of the reference point and of the reference direction [Wierzbicki, 1980], [Korhonen, 1987]. These are systems such as DIDAS, VIG, CAMOS, DINAS and LBS. The second type of interactive algorithms includes the classification-oriented algorithms [Benayoun et al, 1971], [Miettinen, 1999], [Narula and Vassilev, 1994], [Vassileva et al., 2001]. These interactive algorithms are built in the systems NIMBUS, MOLP-16, MONP-16 and MOIP.

The present paper describes some basic elements of the software system developed (called MultiDecision-1), which consist of two separate parts (the systems MKA-1 and MKO-1) and which is designed to support decision makers in solving different multicriteria analysis and multicriteria optimization problems. The class of the problems solved, the system structure, the operation with the interface modules for input data entry and the information about DM's local preferences, the operation with the interface modules for visualization of the current and final solutions for the two systems MKA-1 and MKO-1 are discussed.

---

### Functions, Structure and User's Interface of MultiDecision-1 System

---

The system MKA-1, the first part of the system MultiDecision-1, is designed to support *decision-makers* in solving different multicriteria analysis problems. In MKA-1 system an attempt has been made to realize three methods – a weighting method, an outranking method and an interactive method. These methods are respectively AHP method [Saaty, 1994], PROMETHEE II method [Brans and Mareschal, 1990] and CBIM method [Narula et al., 2003]. They are the most often used methods in the three groups of methods. The interface modules in the system allow the successful realization of different types of procedures for obtaining information by the DM and also for the entry of different types of criteria – quantitative, qualitative and ranking criteria.

The system MKO-1, the second part of the system MultiDecision-1, is designed to support *decision-makers* in solving linear and linear integer problems of the multicriteria optimization. Three classification-oriented interactive algorithms [Vassilev et al., 2003], [Vassileva, 2004] are included in MKO-1 system, which enable the DM define not only desired and acceptable levels of the criteria (as in reference point interactive algorithms), but also desired and acceptable intervals and directions of alteration in the values of the separate criteria. The first interactive algorithm, called GAMMA-L is intended to solve linear problems of the multicriteria optimization: The second and the third algorithms, called GAMMA-I1 and GAMMA-I2 respectively, are designed to solve linear integer problems. In solving integer problems of the multicriteria optimization, the dialogue with the DM is influenced largely by the time, during which he/she is expecting new non-dominated solutions for evaluation and choice. This is so, because the single-criterion integer problems [Nemhauser and Wolsey, 1988], solved at a given iteration, are NP-problems and the time for their exact solution is an exponential function of their dimension. When the solution time proves to be much longer, the DM may lose patience and interrupt the dialogue, refusing to look for a new solution. The classification-oriented interactive algorithms GAMMA-I1 and GAMMA-I2 allow at each iteration the solving of single-criterion problems with two basic properties: a known initial feasible solution and a comparatively "narrow" feasible region. The properties of this type of single-criterion problems, above indicated, facilitate their solution, and also enable the use of approximate single-criterion algorithms. There exists at that high probability that the solutions found will be close to or coincide with the non-dominated solutions of the multicriteria problem.

The system MKA-1 consists of solving modules, interface modules and internal-system modules. This modularity enables greater flexibility when including new methods or new interface realizations. The MKA-1 system contains three solving modules. Every module encloses a software realization of one of the three methods - AHP method, PROMETHEE II method and CBIM method and help procedures for each method as well.

The system modules contain all global definitions of variables, functions and procedures of general purpose. The object possibilities of Visual Basic are utilized in MKA-1 system, creating several classes with respect to internal system structures. They are: a class for messages, which capsules the output of error messages, dynamic context help information and registering of events in the debug window; a class matrix with some specific

procedures, necessary for AHP method, a class for storing the information specific for the criteria in PROMETHEE method and a class for storing system site. The renewal function starts the installation procedure.

	Cost	Target	Duration	Efficiency	Manpower
News	60	900	22	Average(Fair)	8
Herald	30	520	31	Essential bad(low)	1
Panels	40	650	20	Good(High)	2
Mailing	92	750	60	Bad(Low)	3
CMM	52	780	58	Exceptionally good(high)	1
NCB	80	920	4	Very good(high)	6

**Legend**

- Min value(rating)
- Max value(rating)

**Quantitative's Scale**

1- Exceptionally bad(low)	6- Good(High)
2- Essential bad(low)	7- Very good(high)
3- Very bad(low)	8- Essential good(high)
4- Bad(Low)	9- Exceptionally good(high)
5- Average(Fair)	

Fig. 1. MKA-1 system PROMETHEE solving windows.

The interface modules ensure the interaction between MKA-1 system, the DM and the operating system. This interaction includes the entry of the data for the multicriteria problems, the entry of information specific for every method, information about DM's preferences, visualization of the current results and of the final result, graphical presentation of the solutions, print out, reading and storing of files, multi-language support, etc. Fig. 1 shows a window with DM's preferences in operation with PROMETHEE II method for one real multicriteria analysis problem, concerning the selection of an appropriate marketing action for advertising of bicycle manufacturing company products [Brans and Mareschal, 2000].

The interface with the DM is realized on the principle of an adviser – a sequence of windows (steps), each one with a distinctly expressed function, which considerably assists and facilitates DM's work. The DM has the possibility to move forward to a following step and also backward; returning for some corrections to the information already entered. The windows, which must be accessible in more than one stage of DM's operation with MKA-1 system, are included in the menu or in the instruments' band. MKA-1 system possesses dynamic context help information. It gives a brief description of every visual component just by dragging the mouse over it. In addition to this, a debug window is used, that outputs service information about the system internal processes. It can be printed out or stored in a text file. This allows the obtaining of exact debug information when an error occurs. MKA-1 enables the storing in a file of the input data for every multicriteria problem and of the data about the solution process. Thus the solution process of a multicriteria problem can be interrupted at any stage and activated from the place of its interruption at any time. MKA-1 system has comparatively rich printing functions – every piece of the data (entered or computed) may be printed. In this way the entire process of decision making is documented – you can review the input data of the multicriteria problem, the DM's preferences entered, the current values obtained, and the final result also, which on its turn can be printed out in the form of values or graphics.

MKA-1 system consists of the following three main parts: a control program, optimization modules and interface modules. The control program is an integrated software environment for creating, processing and saving of files associated with MKA-1 system (ending by ".mko" extension) and also for linking and executing different types of software modules. The basic functional possibilities of the control program can be divided in three groups. The first group includes possibilities to use the standard for MS Windows applications menus and system functions –

“File”, “Edit”, “View”, “Window”, “Help” and others in system own environment. The second group of control program facilities includes the control of the interaction between the modules realizing: creating, modification and saving of “.mko” files associated with MKO-1 system, which contain input data and data concerning the process and the results from solving multicriteria linear and linear integer problems; interactive solution of the multicriteria linear and linear integer problems which have been entered; localization and identification of the errors occurring during the system operation. The third group of the functional features of the control program includes possibilities for visualization of important information concerning the DM and the system operation as a whole.

The optimization modules realize three classifications oriented interactive algorithms GAMMA-L, GAMMA-I1 and GAMMA-I2, and also exact and approximate single-criterion algorithms solving problems of the linear and linear integer programming.

The interface modules realize the dialogue between the DM and MKO-1 system during the entry and correction of the input data necessary for the multicriteria problems during the interactive process of these problems solution, and also for the dynamic visualization of the main parameters of the process. An editing module serves to enter, alter and store the descriptions of the criteria, of the constraints, and also of the type and bounds of variables' alteration. Another interface module enables the setting of DM's local preferences for alteration in the values of the separate criteria. A third interface module realizes two types of graphic presentation of the information about the values of the criteria at different steps and the possibilities for comparison. Dynamic Help is provided, which outputs specific information about the purpose and way of use of the fields and radio buttons in a separate window.

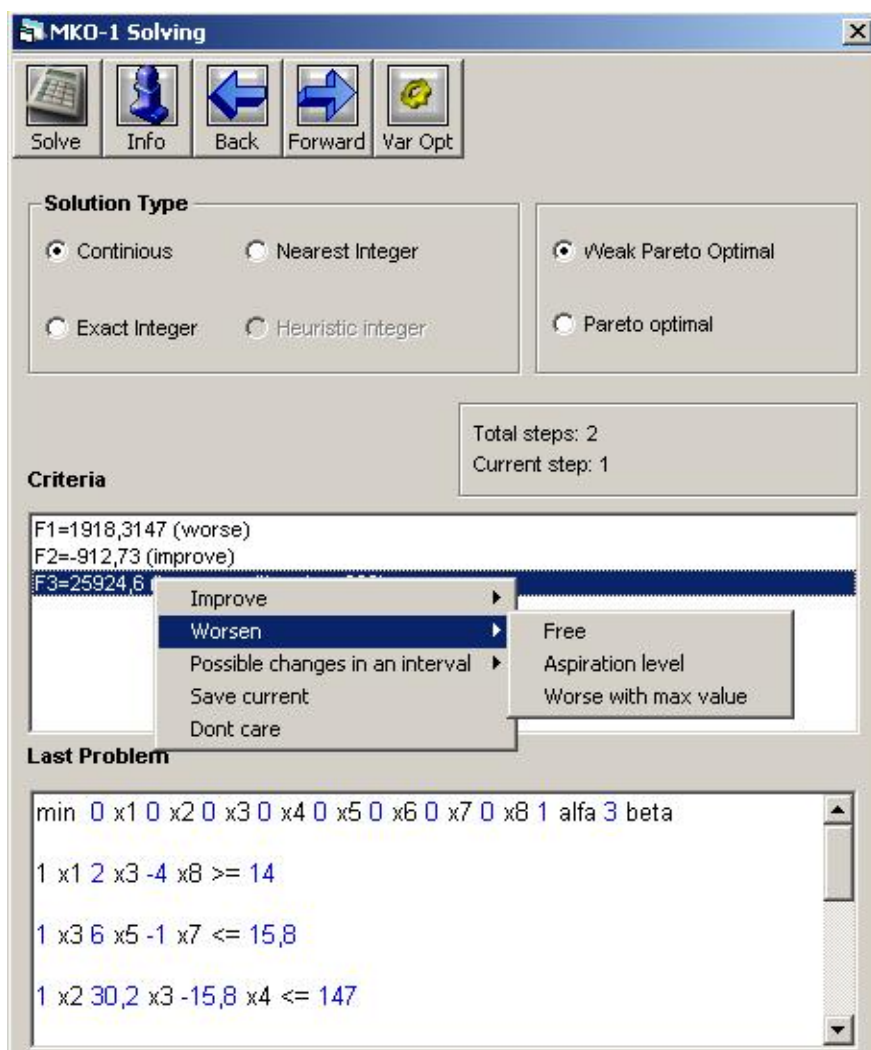


Fig. 2 MKO-1 Solving



MKO-1 system is working under MS Windows. It can be added to *Programs* group and/or with a *Desktop* icon, from where it is started. The system registers the “.mko” extension and associates it. Thus at double clicking on a valid “.mko” file, the system will be started and this file will be loaded. There is a menu in the main window with the standard for MS Windows drop-down menus and commands. With their help, the operation of a new file is started or an existing “.mko” file is loaded and the operation may continue with the information stored in it.

The entry and correction of the problem criteria and constraints is realized in “MKO-1 Editor” window. Every criterion and every constraint is entered separately in the respective text field for edition. Syntax check is accomplished when they are added to the data already entered. The syntax accepted is similar to the mathematical record of this class of optimization problems. The type of the optimum looked for is entered first – “min” or “max”. After that, the digital coefficient with its sign is entered, followed by the variable name it refers to. The variables names can be an arbitrary set of letters and numbers. Each one of these elements is separated by a space. The constraints have similar syntax – digital coefficients and variables names are successively entered. The type of the constraints is defined by some of the symbols “<=”, “>=” or “=”. By double clicking on the constraint or criterion already entered, they are transferred to the editing field again, if subsequent corrections are necessary.

The interactive problems' solution is realized in “MKO-1 Solving” window. “MKO-1 Solving” window is divided into several zones (Fig. 2). Its upper part contains a band with buttons that realize the main functions of the process for interactive solution of multicriteria linear and linear integer problems.

The next field of “MKO-1 Solver” window contains radio buttons for setup of the MKO-1 solution looked for: continuous, integer, approximate integer, the closest integer, as well as weak Pareto optimal or Pareto optimal. Below them information is found about the time of the system operation for the current problem in seconds, the number of the step being currently considered and the total number of the executed steps.

Two text fields follow. The first one outputs successively the values of the criteria obtained at the current step. It is an operating field where DM's preferences relating to the search of the next solution are set. After marking each one of the criteria, a context field is opened with the help of the mouse right button, where the DM sets the desired alteration in the value of this criterion at a following iteration. In case the selection is connected with the necessity to enter a particular value, MKO-1 system opens an additional dialogue window and waits for the entry of the corresponding digital information.

When interactive algorithms are used for multicriteria optimization problems solving, it is an advantage to present information not only about the last solution found, but also about the process of search, about all the previous steps. Given that some significant solutions are made on the basis of these results, it is important for the DM to be able to “testify” how he has reached this solution. That is why the information about the interactive process of multicriteria optimization problem considered, which consists of the problem input data, the solutions obtained at each step, the preferences set by the DM for a new search and the constructed scalarizing problems, saved in \*.mko files associated with MKO-1 system serve not only for restarting an interrupted solution process, but also for documentation. “Print” command from the main menu can be used for selective print of the type of information chosen by the DM.

---

## Conclusion

---

MultiDecision-1 system is designed to support DMs in solving different multicriteria analysis and multicriteria optimization problems. MKA-1 system is designed to support the DM in modelling and solving problems of multicriteria ranking and multicriteria choice. The integrating of three different types of methods expands DM's possibilities to set his/her preferences about the quality of the most preferred solution. MKO-1 system is designed to model and solve linear and linear integer problems of multicriteria optimization. The interactive classification-oriented algorithm included in the system offers the DMs wide possibilities to set his/her preferences about the qualities of the most preferred solution. The user-friendly interface of MKA-1 system and MKO-1 system facilitates the operation of DMs with different qualification level relating to the analysis and the optimization methods and software tools. MKA-1 and MKO-1 systems can be used for the purposes of education and for experimental and research problems solving as well.



---

**Bibliography**

---

- [Benayoun, et al.,1971] R. Benayoun, J. Montgolfier, J. Tergny, O. Laritchev. Linear Programming with Multiple Objective Functions: Step Method (STEM). *Mathematical Programming*, 1, 136-375. 1971
- [Brans and Mareschal, 1990] J. P. Brans, and B. Mareschal. The Promethee Methods for MCDM: the Promcale, Gaia and Bankadviser Software. In: *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*. Ed. C. A. Bana e Costa. Springer-Verlag, Berlin, 216-252. 1990.
- [Brans and Mareschal, 1994] J. P. Brans, and B. Mareschal. The PROMCALC & GAIA Decision Support System for Multicriteria Decision Aid. *Decision Support System*, 12, 297-310. 1994.
- [Brans and Mareschal, 2000] J. P. Brans, and B. Mareschal. How to Decide with PROMETHEE? <http://www.visualdecision.com>. 2000.
- [Gardiner and Vanderpooten, 1997] L. R. Gardiner and D. Vanderpooten. Interactive Multiple Criteria Procedures: Some Reflections. In: *Multicriteria Analysis*. Ed. J. Climaco. Springer-Verlag, Berlin, 290-301. 1997.
- [Jaszkievicz and Slowinski, 1994] A. Jaszkievicz and R. Slowinski. The Light Beam Search Over a Non-Dominated Surface of a Multiple-Objective Programming Problem, In: *Multiple Criteria Decision Making*. Eds G.H. Tzeng, H.F. Wang, U.P. Wen and P.L. Yu. Spinger-Verlag, Berlin, 87-99. 1994.
- [Keeney and Raiffa, 1976] R. Keeney, and H. Raiffa. Decisions with Multiple Objectives, Preferences and Value Trade Offs. *John Wiley & Sons*. New York. 1976.
- [Korhonen, 1988] P. Korhonen. A Visual Reference Direction Approach to Solving Discrete Multiple Criteria Problems. *European Journal of Operational Research*, 34, 152-159. 1988.
- [Korhonen, 1987] P. Korhonen. VIG - A Visual Interactive Support System for Multiple Criteria Decision Making. *Belgian Journal of Operations Research, Statistics and Computer Science* 27(1), 3-15. 1987.
- [Lewandowski and Wierzbicki, 1989] A. Lewandowski and A.P. Wierzbicki. Aspiration Based Decision Support Systems, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 331, Spinger – Verlag, Berlin. 1989.
- [Miettinen, 1999] K. Miettinen. Nonlinear Multiobjective Optimization. *Kluwer Academic Publishers*, Boston. 1999.
- [Miettinen and Makela, 2000] K. Miettinen and M. Makela. Interactive Multiobjective Optimization System WWW-NIMBUS on the Internet. *Computer and Operation Research*, 27, 709-723. 2000.
- [Mustajoki and Hamaiainen, 2000] J. Mustajoki and R. P. Hamalainen. Web-HIPRE: Global Decision Support by Value Tree and AHP Analysis. *INFOR*, 38, 208-220. 2000.
- [Narula et al., 2003] S.C.Narula, V. Vassilev, K. Genova, M. Vassileva. A Partition-Based Interactive Method to Solve Discrete Multicriteria Choice Problems, *Cybernetics and Information Technologies*, 2, 55-66. 2003.
- [Narula and Vassilev, 2003] S. C. Narula and V. Vassilev. An Interactive Algorithm for Solving Multiple Objective Integer Linear Programming Problems. *European Journal of Operational Research*, 79, 443-450. 1994.
- [Nemhauser and Wolsey, 1988] G. L. Nemhauser and L. Wolsey. Integer and Combinatorial Optimization. *Wiley*, New York. 1988.
- [Ogryczak et al., 1992] W. Ogryczak, K. Stuchinski, K. Zorychta. DINAS: A Computer-Assisted Analysis System for Multiobjective Transshipment Problems with Facility Location. *Computers and Operations Research* 19, 637-648. 1992.
- [Osyczka, 1988] A. Osyczka. Computer Aided Multicriterion Optimization System. In: *Discretization Methods and Structural Optimization – Procedures and Applications*. Eds. H. A. Eschenauer and G. Thierauf. Spinger-Verlag. 263-270. 1988.
- [Parsons, 2002] J. Parsons. Agland Decision Tool: A Multicriteria Decision Support System for Agricultural Property, *iEMSS 2002, Integrated Assessment and Decision Support*, Proceedings, Volume 3, 181-187, <http://www.iemss.org/iemss2002/>.
- [Peterson, 1994] C. R. Peterson. HIVIEW – Rate and Weight to Evaluate Options. *OR/MS Today*, April. 1994.
- [Roy, 1991] B. Roy. The Outranking Approach and the Foundations of ELECTRE Methods. *Theory and decision*, 31, 49-73. 1991.
- [Saaty, 1980] T. S. Saaty. The Analytic Hierarchy Process. *McGraw-Hill*, New York. 1980.
- [Saaty, 1994] T. S. Saaty. Highlights and Critical points in the Theory and Application of the Analytic Hierarchy Process. *European Journal of Operational Research*, 74, 426-447. 1994.
- [Sun and Steuer, 1996] M. Sun and R. Steuer. InterQuad: An Interactive Quad Free Based Procedure for Solving the Discrete Alternative Multiple Criteria Problem. *European Journal of Operational Research*, 89, 462-472. 1996.
- [Vansnick, 1986] J. C. Vansnick. On the Problem of Weights in Multiple Criteria Decision Making (the noncompensatory approach). *European Journal of Operational Research*, 24, 288-294. 1986.
- [Vassilev et al., 1993] V. Vassilev, A. Atanassov, V. Sgurev, M. Kichovitch, A. Deianov, L. Kirilov., Software Tools for Multi-Criteria Programming. In: *User-Oriented Methodology and Techniques of Decision Analysis and Support*. Eds. J. Wessels and A. Wierzbicki. Spinger- Verlag, Berlin, 247-257. 1993.
- [Vassilev et al., 1997] V. Vassilev, S. Narula, P. Vladimirov, V. Djambov. MOIP: A DSS for Multiple Objective Integer Programming Problems. In: *Multicriteria Analysis*, Ed. J. Climaco. Springer-Verlag, Berlin, 259-268. 1997.

- [Vassilev et al., 2003] V. Vassilev, K. Genova, M. Vassileva, S. Narula. Classification-Based Method of Linear Multicriteria Optimization. *International Journal on Information Theories and Applications*, vol.10, 3, 266-270. 2003.
- [Vassileva et al., 2001] M. Vassileva, K. Genova, V. Vassilev, A Classification based Interactive Algorithm of Multicriteria Linear Integer Programming. *Cybernetics and Information Technologies*, 1, 5 – 20. 2001.
- [Vassileva, 2004] M. Vassileva. A Learning-oriented Method of Linear Mixed Integer Multicriteria Optimization. *Cybernetic and Information Technologies*, 4, No 1, 13-25. 2004.
- [Vincke, 1992] P. Vincke. Multicriteria Decision-Aid. *John Wiley & Sons*, New York. 1992.
- [Von Winterfeldt and Edwards, 1986] D. Von Winterfeldt and W. Edwards. Decision Analysis and Behavioral Research, *Cambridge University Press*, London. 1986.
- [Wierzbicki, 1980] A. P. Wierzbicki. The Use of Reference Objectives in Multiobjective Optimization. In: *Multiple Criteria Decision Making Theory and Applications*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 177, Eds. G. Fandel and T. Gal. Springer-Verlag, Berlin, 468-486. 1980.
- 

### Author information

---

**Vassil Vassilev** – Institute of Information Technologies, BAS, Acad. G. Bonchev St., bl. 29A, Sofia 1113, Bulgaria; e-mail: [vvassilev@iinf.bas.bg](mailto:vvassilev@iinf.bas.bg)

**Krasimira Genova** – Institute of Information Technologies, BAS, Acad. G. Bonchev St., bl. 29A, Sofia 1113, Bulgaria; e-mail: [kgenova@iinf.bas.bg](mailto:kgenova@iinf.bas.bg)

**Mariyana Vassileva** – Institute of Information Technologies, BAS, Acad. G. Bonchev St., bl. 29A, Sofia 1113, Bulgaria; e-mail: [mvasileva@iinf.bas.bg](mailto:mvasileva@iinf.bas.bg)

## RECOGNITION ON FINITE SET OF EVENTS: BAYESIAN ANALYSIS OF STATISTICAL REGULARITY AND CLASSIFICATION TREE PRUNING

Vladimir B. Berikov

**Abstract:** *The problem of recognition on finite set of events is considered. The statistical regularity of decision functions for this problem is studied within the Bayesian approach. The results are applied in pruning of classification trees.*

**Keywords:** *statistical regularity, Bayesian learning, classification tree pruning.*

---

### Introduction

---

In the theory of statistical pattern recognition, an important problem is the statistical regularity of decision functions. This problem arises from the need to find a decision function having good generalization ability provided that the probability distribution is unknown, and learning sample has limited size.

A number of different approaches to the solution of the problem can be formulated: experimental approach (based on one-hold-out procedure and its modifications), probabilistic approach (based on preliminary evaluation of distribution law), the approach based on principles of multivariate statistical analysis, statistical learning theory, algorithmic approach, Bayesian learning theory.

Experimental approach is extremely labor-consuming; within the framework of the probabilistic approach asymptotic quality evaluations are received basically. In the next approaches, the finiteness of sample is taken into account; however multivariate analysis requires rather bounded classes of distributions and types of decision functions.

Statistical and algorithmic approaches are oriented basically on worst-case analysis. So the received performance estimates are powerfully lowered. Within the Bayesian approach, the average-case estimates are received, which, as was shown in [1], are more fit to volumes of samples available in practical tasks.

Regrettably, the expressions, received within the Bayesian approach, as a rule, have unclosed form, are cumbersome and labor-consuming in calculating. Thus, a problem of finding more effectively calculated evaluations (possibly, approximate) is actual. These evaluations are to be applied as a quality criterion in a learning step at the building of decision functions from the sample.

The study of statistical regularity undertaken in given work has the following particularities. Firstly, the Bayesian approach is applied. Secondly, the narrower class of recognition problems – the problems of recognition on finite set of events is considered. This type of problems is most suitable for analytical studies. On the other hand, the results can be extended on broadly used classes of decision functions – logical decision functions and decision trees.

---

### Main Definitions

---

Let us consider a pattern recognition problem with  $K \geq 2$  classes, input features  $X_1, X_2, \dots, X_n$  and output feature  $Y$  with domain  $D_Y = \{1, \dots, K\}$ . Denote  $D_i$  as a set of values of feature  $X_i$ ,  $i=1, \dots, n$ . Suppose that the examples from general sample are extracted by chance, therefore the features  $Y, X_i$  are casual. A function  $f: \prod_{i=1}^n D_i \rightarrow D_Y$  is

called the *decision function*. A special kind of the decision function is a *decision tree*  $T$ . Consider binary trees: each node  $t \in T$  of the tree can be branched out into two branches. Each internal node is labeled with a feature and each branch corresponds to a subdomain of definition of that feature. To each leaf we assigned the majority class of all examples of this leaf.

Decision function is built by the random sample of observations of  $X$  and  $Y$  («learning» sample). Let learning sample be divided on two parts. The first part is used to design decision tree  $T$ , and the second part to prune it. Let  $T_{pr}$  be a *pruned decision tree*. During the pruning process, one or more nodes of  $T$  can be pruned. By numbering the leaves of a tree, we can reduce the problem to one feature  $X$ . The values of this feature are coded by numbers  $1, \dots, j, \dots, M$ , where  $M$  is number of leaves. Let  $p_j^i$  be the probability of joint event “ $X=j, Y=i$ ”. Denote

a priori probability of the  $i$ -th class as  $p^i$ . It is evident that  $\sum_i p^i = 1$ ,  $\sum_j p_j^i = p^i$ . Let  $N$  be sample size,  $n_j^i$  be a frequency of falling the observations of  $i$ -th class into the  $j$ -th cell. Denote  $s = (n_1^1, n_1^2, \dots, n_1^K, n_2^1, \dots, n_M^K)$ . Let us consider the family of models of multinomial distributions with a set of parameters  $\Theta = \{\theta\}$ , where  $\theta = (p_1^1, p_1^2, \dots, p_1^K, p_2^1, \dots, p_M^K)$ ,  $p_j^i \geq 0$ ,  $\sum_{i,j} p_j^i = 1$ ,  $j=1 \dots M, i=1 \dots K$ . Let  $\tilde{N}$  be a number of errors on

learning sample for the given decision function.

The random vector of frequencies  $S$  belongs to the multinomial distribution with parameter vector  $\theta$ . In applied problems of recognition a vector  $\theta$  is usually unknown. We use the Bayesian approach: suppose that random vector  $\Theta = (P_1^1, \dots, P_1^K, P_2^1, \dots, P_M^K)$  with known priory distribution  $p(\theta)$  is defined on the set of parameters.

In the given work the case of uniform density  $p(\theta) = const$  is considered. This assumption is defensible if a priory vagueness in choice of model is available. Let  $Y=f(X)$  be a decision function which has been found on sample  $s$  with the help of some deterministic algorithm. The probability of misclassification for this function equals to  $P_f(\Theta) = 1 - \sum_j P_j^{f(j)}$ .

---

### Bayesian Estimate of Decision Function Performance and Decision Tree Pruning

---

The mean misclassification probability for decision function  $f$  is denoted as  $P_{f,s} = EP_f(\Theta)$ .

**Proposition 1:**  $P_{f,s} = \frac{\tilde{N} + (K-1)M}{N + KM}$ .

The value  $P_{f,s}$  will be called the Bayes estimate of misclassification probability for decision function  $f$  and sample  $s$ .

**Proposition 2.** The variance of misclassification probability equals: 
$$VP_{f,s} = \frac{P_{f,s}(1 - P_{f,s})}{N + KM + 1}.$$

The proofs are given in [2]. The mean and variance,  $P_{f,s}$  and  $VP_{f,s}$ , can be used for calculation of tolerance interval for the value of misclassification probability [2].

Let us suppose that there is an algorithm which can grow decision tree for classification of observations from first part of the sample. The parameters of the algorithm should be chosen in such a way to get a large number of leaves in the tree. Next, we classify the examples from the second part of the sample to define how many examples of each class are assigned to each node. Consider arbitrary subtree  $T$  of the initial tree ( $T$  and initial tree have the same root). The set of leaves of  $T$  can be considered as a set of values of feature  $X$ . The vector of the observed frequencies for all leaves can be considered as a vector of frequencies  $s$ . Note that subtree  $T$  does not depend on the vector  $s$ , because the observations from pruning part are not participated in the tree building.

For subtree  $T$ , we can compute the Bayesian estimate of misclassification probability  $P_{T,s}$ . This value can be used as criterion of quality for subtree. An optimization of the criterion gives optimization of the tree complexity (the number of leaves become optimal).

Let us suppose that vector  $\theta$  is fixed, but unknown parameter vector. In this case, the Bayesian estimate of misclassification probability for decision function is the approximation of the true unknown generalization error. It is possible to show that the Bayes estimate is asymptotically unbiased. In the same time the empirical error estimate ( $\tilde{N}/N$ ) is unbiased, however the variance of the Bayesian estimate is less than the variance of the empirical estimate. In this sense, the Bayes estimate is more stable.

---

### Numeric Simulation

---

For numeric experiments the breast cancer database [3] was used. For decision tree building was used standard algorithm C4.5 [4]. The algorithm grows a large tree from learning sample. Then this tree is pruned by second part of learning sample. The "greedy" algorithm of optimal pruning variant search is applied. After the pruning, obtained decision tree is evaluated by test data set.

Three different strategies of experiments were considered.

1. The data set is divided into three parts: for decision tree growing 50%, for pruning 30% and for testing 20%. Standard reduced error pruning method (REP) [4] was used for pruning.
2. The data set divided in the same way as in first strategy. We used the Bayesian estimate of error probability for pruning.
3. The data set is divided into two parts. The first one (80%) is used for decision tree growing and then for pruning and the second one (20%) is used for testing. The Bayesian estimate is used for pruning. It is known that if growing and pruning sets coincide, the effect of overtraining arises. The purpose of this experiment is to study the behavior of the decisions in this situation.

All experiments were repeated 200 times. Before each experiment, the observations in data set were randomly mixed.

The following results of computer modelling were obtained. For first and second strategy, the errors on test sample coincide (0.022 at average). For third strategy, REP could not prune the tree; the average error on test samples for the Bayesian pruning algorithm was 0,067.

For the next experiment, artificially generated data table was used. This table was unbalanced: the frequencies of classes differ in a large degree (first class represents 5% and second 95% of sample size of 1000 examples). The 10-fold cross-validation technique was applied for quality estimation. It turned out that the proposed method accuracy was 7% better than the accuracy of REP.

---

### Conclusion

---

Within the framework of the Bayesian learning theory, the problem of statistical regularity of decision functions for recognition on finite set of events was considered. It was shown that the obtained results can be applied for classification tree pruning. Numeric experiments showed that the Bayesian pruning has at least the same efficiency or better than standard reduced error pruning, and at the same time it is more resistant to overtraining.

---

## Acknowledgements

---

This work was supported by the Russian Foundation of Basic Research, grant 04-01-00858a

---

## Bibliography

---

- [1] Lbov, G.S., Startseva, N.G., *About statistical robustness of decision functions in pattern recognition problems*. Pattern Recognition and Image Analysis, 1994. Vol 4. No.3. pp.97-106.
- [2] Berikov V.B., Litvinenko A.G. *The influence of prior knowledge on the expected performance of a classifier*. Pattern Recognition Letters, Vol. 24/15, 2003, pp. 2537-2548.
- [3] UCI Machine Learning Database Repository. <http://www.ics.uci.edu/~mllearn/MLRepository.html>
- [4] Quinlan, J.R. *C4.5: Programs for Machine Learning*. Morgan Kaufmann, San Mateo, CA, 1989.

---

## Author's Information

---

**Vladimir Berikov** – Sobolev Institute of Mathematics SD RAS, Koptuyug pr.4, Novosibirsk, Russia, 630090; e-mail: [berikov@math.nsc.ru](mailto:berikov@math.nsc.ru)

# DECISION FOREST VERSUS DECISION TREE

**Vladimir Donskoy, Yuliya Dyulicheva**

**Abstract:** *A research and improvement of learning and recognition algorithms based on building up binary decision trees (BDT); to working out the rules for binary decision trees pruning on the basis of conjunctive regularities evaluation; to creating consistent decision tree family synthesis procedure (i.e. the empirical decision forest synthesis algorithm) and pruned decision trees family correction methods as a set of heuristic procedures for decision making are considered.*

**Keywords:** *empirical decision forest, conjunctive regularity, decision tree pruning criterion, overfitting, VCD of decision rules class*

---

## Introduction

---

A decision forest versus a decision tree problem is to compare the advantages and disadvantages of two inductive models. In this paper we discuss the following question. What are the possibilities that make the empirical decision forest more effective versus the decision tree?

*The advantages of the proposed empirical decision forest versus the decision tree are grounded a more effective mechanism of regularities reveal from data; the maximal employment possibility of all initial training information; insignificant complication of the decision making procedure; a possibility of accurate fitting on the correct classification of much more training objects number; insignificant complication of the decision rules class generated from the empirical decision forest compared to the decision rules class generated from the single decision tree.*

It is known that increase of the decision tree structure complexity facilitates to obtaining of a correct recognition algorithm according to the initial training sample, i.e. precisely fitted on the training sample. If the decision tree structure complexity is not restricted, it is always possible to build up the non-unique precisely fitted on the training sample (correct according to the initial training sample) learning algorithm with the decision tree structure. Based on Vapnik-Chervonenkis' statistical learning theory the decisions (the required recognition algorithms) will be found in the class of unbounded capacity that one makes a learning ability with the given guaranteed accuracy

impossible. A theoretically grounded undesirability of the decision tree structure complication in the synthesis (learning) process finds a confirmation in an overfitting effect discovered in the numerous experiments.

The decision trees complexity is naturally restricted based on the decision trees branches pruning or the leaves number reduction. The well-known approaches [Breiman, 2001; Breslow, Aha, 1997; Frank, 2000; Ho, 1995; Ho, 1998; Malerba, Esposito, Semeraro, 1996; Murphy, Pazzani, 1994; Schaffer, 1993] aimed to the restriction of the decision trees structure complexity were dedicated to a compromise searching for the redundant complication of the decision tree structure and the obtaining of quality evaluation of the constructed decision tree as high as possible.

Saving the ability to the classification quality increase on control the pruning usually leads to the incorrect decision tree synthesis according to the training sample. However pruning process can lead to *the classification rules errors according to the reliable training sample* in case of the incorrect decision tree precisely fitted on the sample.

It is arisen a following new “subtle” problem statement. Is it possible (and if possible then how) to obtain the decrease of the decision tree structure complexity saving the requirement of its correction according to the reliable training sample? Exactly in this context the investigations were carried out directed to the dilemma resolving: to fit the decision tree precisely on the reliable training sample or to restrict the decision rules complexity for saving the high capability to generalization of the initial training sample properties on the basis of the empirical induction principle.

## 1. Decision Trees Pruning Criterion Reasoning

Since it is undesirable to complicate the decision trees in connection with their overfitting on the training sample, the decision tree complexity ground problem is becoming especially important. For binary decision tree structure this problem is connected with decision tree pruning. Unfortunately most acknowledged decision tree pruning algorithms have no any grounding. We propose a grounded decision tree pruning strategy on the basis of a conjunctive regularity notion.

Let  $T_{mn}$  be an initial training sample that is given as an empirical training table, where  $m$  be the objects number or the table's rows number;  $n$  be the attributes number or the table's columns number and a goal column is not separated from the training table columns. Let  $T_{mn\ell}$  be a standard training table with separated goal column where  $\ell$  the number of classes and the goal column consists of the classes' labels. Suppose that the classes' label values are Boolean and if  $(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) = \tilde{x} \in T_{mn\ell}$  then  $x_i \in \{0, 1\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Whereas the training sample size is bounded compared to a universe size the regularities reveal process from the empirical training table has a hypothesis character. We specify a notion of a conjunctive regularity of rank  $r$  according to the training table  $T_{mn}$ .

**Definition 1.1** A conjunction of rank  $r$   $K_r = x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \& x_{i_2}^{\sigma_{i_2}} \& \dots \& x_{i_r}^{\sigma_{i_r}}$  is called the **conjunctive regularity of rank  $r$  according to the empirical training table  $T_{mn}$**  if there exists  $r$  columns with numbers  $i_1, i_2, \dots, i_r$  and column with number  $k \notin \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$  such that the variable  $x_k$  takes on the same value  $\gamma_{\tilde{\sigma}}$  for all rows  $\tilde{x} \in T_{mn}$  with a property  $x_{i_1} = \sigma_{i_1}, x_{i_2} = \sigma_{i_2}, \dots, x_{i_r} = \sigma_{i_r}$ . In addition the sets  $\{\tilde{x} : x_{i_1} = \sigma_{i_1}, x_{i_2} = \sigma_{i_2}, \dots, x_{i_r} = \sigma_{i_r}\} \cap T_{mn} = T_1$  and  $T_{mn} \setminus T_1$  are not empty.

Let  $BDT_{\mu, m, n}$  be a binary decision tree (BDT) with  $\mu$  leaves being built up according to the training table  $T_{mn}$ . Based on the conjunctive regularity notion BDT defines the conjunctive regularities set  $K_{r_1}, K_{r_2}, \dots, K_{r_\mu}$  ensuring the decisions derivation. These conjunctions are orthogonal by pairs since they correspond to different branches of the decision tree.

**Theorem 1.1** A probability  $P_{BDT}(\mu, m, n)$  of a random derivation of property  $x_k$  for an arbitrary object  $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$  being uniformly selected from Boolean vectors set with length  $n-1$  based on the correct binary decision tree with  $\mu$  leaves being built up according to the empirical training table is evaluated by the following inequality

$$P_{BDT}(\mu, m, n) < \sum_{j=1}^{\mu} (n - r_j) C_n^{r_j} 2^{-\left(m+r_j-2^{r_j}\right)} \quad (1.1)$$

where  $r_1, r_2, \dots, r_{\mu}$  are the decision tree branches' ranks.

**Remark 1.1** If the decision tree being built up according to the standard training table with  $n$  Boolean attributes then the probability of the random finding of this decision tree is evaluated by the following inequality

$$P_{BDT}^*(\mu, m, n) < \sum_{j=1}^{\mu} C_n^{r_j} 2^{-\left(m+r_j-2^{r_j}\right)} \quad (1.2),$$

where  $r_1, r_2, \dots, r_{\mu}$  be the ranks of conjunctions that correspond to BDT's branches; and  $\mu$  be the number of leaves.

The conjunctive regularity of rank  $r$  defines an implicative rule of the decision making  $\left(x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \& x_{i_2}^{\sigma_{i_2}} \& \dots \& x_{i_r}^{\sigma_{i_r}}\right) \rightarrow x_k^{\gamma_{\tilde{\sigma}}}$  (1.3), i.e. this rule allows to compute a value of the goal variable  $x_k$  if a vector  $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  belongs to the interval  $N_{K_r}$  corresponding to the conjunction  $K_r$  from the left part of the implicative rule (1.3).

Based on Kolmogorov' approach which considers regularity as non-randomness, the remark 1.1 result and the implicative rule (1.3) a "non-random" decision will be derived from the training sample with probability less than

$$1 - \sum_{j=1}^{\mu} C_n^{r_j} 2^{-\left(m+r_j-2^{r_j}\right)}.$$

Let  $D_{\mu, m, n}$  be a class of all possible correct decision trees with  $\mu$  leaves being built up according to the standard empirical training table  $T_{mnl}$ . On the basis of evaluation (1.2) it is defined a quality functional  $\varphi: D_{\mu, m, n} \rightarrow R$  as follows

$$\varphi(d) = \max_{1 \leq j \leq \mu} \left( C_n^{r_j} 2^{-\left(m+r_j-2^{r_j}\right)} \right) \quad (1.4)$$

The quality functional  $\varphi(d)$  is the evaluation of "worse" case, i.e. decision making is accomplished the decision tree branch of maximal rank. It is grounded by the following lemma.

**Lemma 1.1** A value  $h(n, m, r) = C_n^r 2^{-\left(m+r-2^r\right)}$  is growing monotonously along with the growth of BDT branches' rank  $r$ , if  $r \geq 2$  and  $n \geq r + 1$ .

Hence it is naturally arisen the quality functional minimization problem. The result of lemma 1.2 is the optimal decision tree structure.

**Lemma 1.2** The quality functional  $\varphi(d)$  minimum defined on the set  $D_{\mu, m, n}$  of the binary decision trees

$$\varphi(d^*) = \min_{d \in D_{\mu, m, n}} \max_{1 \leq j \leq \mu} \left( C_n^{r_j} 2^{-\left(m+r_j-2^{r_j}\right)} \right)$$

is reached if  $\mu = 2^k, k \in N$ , i.e.  $d^*$  be the complete decision tree or if  $\mu \neq 2^k$  and the decision tree  $d^*$  satisfies to condition  $\max_{1 \leq j < q \leq \mu} |r_j - r_q| \leq 1$ , where  $r_1, r_2, \dots, r_\mu$  be conjunctions' ranks corresponding to the branches of BDT  $d^*$ .

**Definition 1.2** The binary decision tree is named uniform if its branches' rank differ at most one.

**Theorem 1.2** The uniform trees have the minimum evaluation (1.4) of the probability of random decision derivation in the empirical decision trees class  $D_{\mu, m, n}$ .

Theorem 1.2 result is the theoretical grounding of the decision tree branches pruning that maximize the quality functional value (1.4), i.e. the decision tree branches criterion. The pruning process directs to the decision tree structure simplification for obtaining the decision tree structure which is as close as possible to the uniform decision tree structure.

---

## 2. Decision Forest and Decision Rules Synthesis Algorithms

---

A new proposed synthesis algorithm of an empirical decision forest inductive model is the prepruning strategy with a special mechanism of the attributes review. The empirical decision forest (EDF) synthesis is aimed at searching for such forest's branch system that would give a correct classification for all objects of the no contradictory training sample based on the conjunctive regularity of the predetermined admissible rank.

**Definition 2.1** An interval  $N_{K_j}$  corresponding to the decision tree branch with rank  $r_j > r$  ( $r$  be the predetermined admissible rank) is named a *binary decision tree rejection set*.

It is supposed that the empirical binary decision tree rejection set contains objects influencing on the binary decision tree structure complication, i.e. the leaves number increase or the branches' ranks increase.

**Definition 2.2** A pointer on the decision tree  $d_2$  root node placed in every leaf of the decision tree  $d_1$  corresponding to the rejection set is called a *reference  $c_{12}$  from the decision tree  $d_1$  to the decision tree  $d_2$* .

**Definition 2.3** An ordered set of the empirical decision trees  $D_r = (d_1, d_2, \dots, d_q)$  with the references  $c_{12}, c_{23}, \dots, c_{q-1q}$  is named the *empirical decision forest*.

Define two types of the empirical decision forest depending on the capability to recognize correctly objects from the initial training sample, i.e. the capability to fit precisely on the training sample without the overfitting effect appearance.

**Definition 2.4** The empirical decision forest is called *r-correct* according to the standard training table  $T_{mn\ell}$  if all its trees  $(d_1, d_2, \dots, d_q)$  have branches' rank values no more than predetermined admissible rank  $r$  value, the last in order decision tree  $d_q$  has no branches corresponding to the rejection sets and decision rules being generated from the empirical decision forest allow to compute precisely the classes' label for all objects from the training table  $T_{mn\ell}$ . The empirical decision forest is called *r-incorrect* according to the training table  $T_{mn\ell}$  if there exists at least one training object incorrectly classified by the empirical decision forest.

The main idea of the decision rules synthesis so called *decision making procedure with references switching* based on the empirical decision forest that is made up by the decision tree family  $(d_1, d_2, \dots, d_q)$  is as follows.

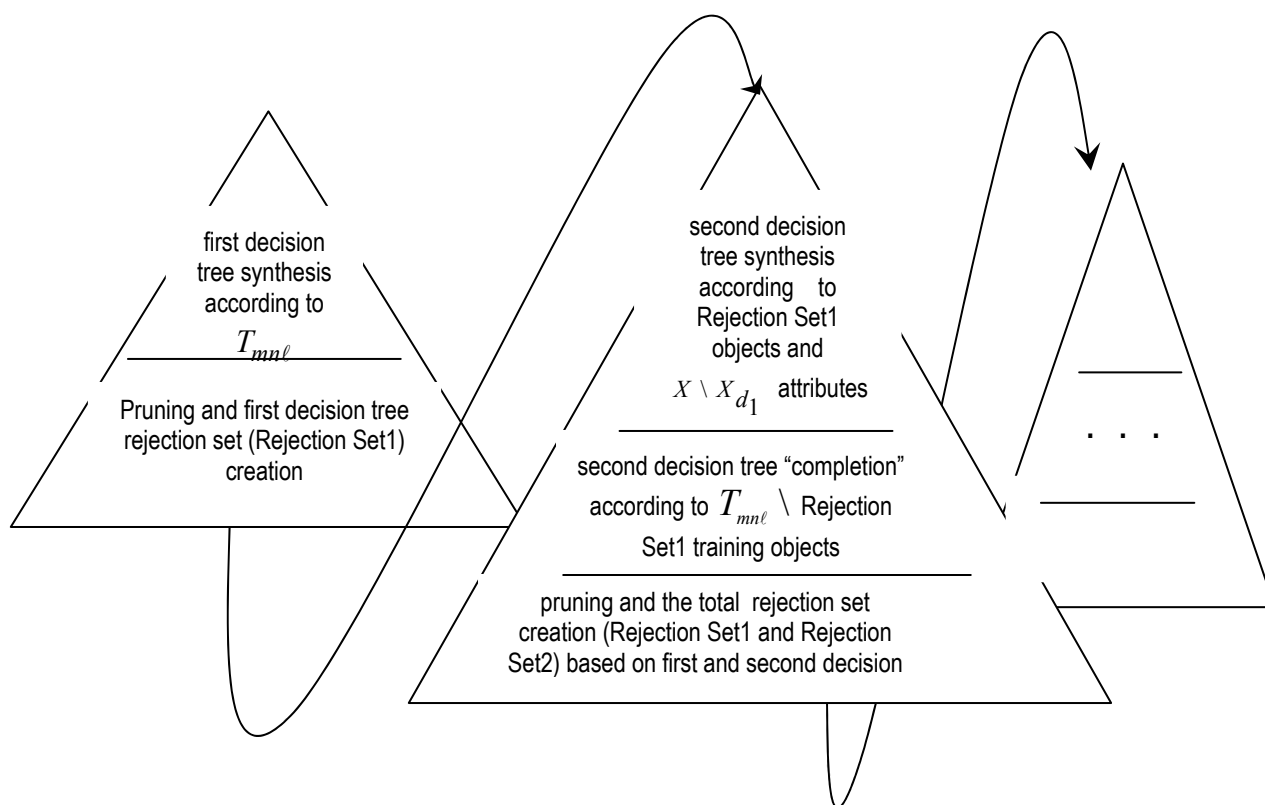
In case there is no conjunctive regularity in  $d_1$  decision tree with the rank admissible for the classification of the object that is not a part of training, its classification is to be performed by another decision tree  $d_2$ . If there is no conjunctive regularity in  $d_1$  decision tree with the predetermined admissible rank, the object is to be "transferred" to the next decision tree that is defined by the order of the empirical decision forest tree synthesis.

**The synthesis algorithm of the r-pruned empirical decision forest**



1<sup>0</sup>. The decision tree  $d_1$  is built up based on one of the synthesis strategies proposed in [Донской В.И., Башта А.И., 1992; Cremilleux, Robert, 2000]. If it is correct according to the standard training table  $T_{mn\ell}$  and its branches' ranks do not exceed the predetermined admissible rank  $r$  then the empirical decision forest synthesis is complete and the algorithm result is the forest composed of one decision tree  $D_r = (d_1)$ . Otherwise go to 2<sup>0</sup>.

2<sup>0</sup>. Let  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  be an initial attributes set,  $X_{d_1}$  be an attributes set used in the first decision tree  $d_1$  synthesis process. If there exists at least one branch of the first decision tree  $d_1$  which rank value exceeds the predetermined admissible rank value then this branch is pruned and the reference from the first decision tree  $d_1$  to the second decision tree  $d_2$  is placed. The decision tree branch pruning is to replace internal node with number  $(r+1)$  by a special terminal node named the reference. The rejection set is defined as interval corresponding to the decision tree pruned branch. The decision tree with the references, i.e. not empty rejection sets, is named  $r$ -pruned decision tree. The references to the decision tree  $d_2$  are placed for all decision tree  $d_1$  rejection sets. The decision tree  $d_2$  is built up first of all on the attributes from  $X \setminus X_{d_1}$  set if the set is not empty and it has enough training objects for the decision tree  $d_2$  synthesis. If  $X \setminus X_{d_1} = \emptyset$  then the attributes choice order is changed compared to the decision tree  $d_1$  attributes choice order. Let  $N_{K_{j1}}$  be the decision tree  $d_1$  united rejection set;  $T_2 = T_{mn\ell} \cap N_{K_{j1}}$  be a set of the training objects from different classes that belong to the rejection set  $N_{K_{j1}}$ . The decision tree  $d_2$  is built up according to the training table  $T_2$  and then is rebuilt up according to the training table  $T_{mn\ell} \setminus T_2$ . The result of two algorithm steps is as a matter of fact the  $r$ -incorrect decision tree  $d_2$  and therefore the  $r$ -incorrect empirical decision forest  $D_r = (d_1, d_2)$ . If the  $r$ -correct empirical decision forest is obtained then the decision forest synthesis algorithm is complete, otherwise it is necessary to construct a decision tree  $d_3$  with reiteration all main stages of step 2<sup>0</sup>.



Picture 2.1 The main stages of the empirical decision forest synthesis algorithm

The possible stopping criteria of the empirical decision forest synthesis process are

1.  $r$ -correct empirical decision forest has been built up;
2. the attempts of new decision trees synthesis have been performed more than given repeats number;
3. Computer resources needed for decision forest trees location have been limited.

The picture 2.1 illustrates the main stages of the empirical decision forest synthesis process.

The decision trees as components of the constructed empirical decision forest contain two types of the terminal nodes: the terminal node with class label typically named leaf and the terminal node corresponding to the rejection set named cut (pruned node) or reference.

The empirical decision forest correctness condition will be met if some conjunctive regularity of the predetermined admissible rank is found for each object from the noncontradictory training table.

**Theorem 2.1** The  $r$ -correct empirical decision forest according to the training table  $T_{mn\ell}$  exists if and only if there exists the interval  $N_{\tilde{x}}^r$  with rank value that does not exceed the predetermined admissible rank value such that  $\tilde{x} \in N_{\tilde{x}}^r$  and the set  $N_{\tilde{x}}^r \cap T_{mn\ell}$  contains the training objects belonging to only one class.

***The decision rules (disjunctive normal forms) synthesis algorithm  
generated from the empirical decision forest***

<sup>10</sup>. The conjunctions corresponding to the all branches of first decision tree as forest component with classes' label are "written out" and the disjunctive normal form  $D_1(\omega_j)$  is formed for each class  $\omega_j$ ,  $j = \overline{1, \ell}$  as the logical description of the class with number  $j$ .

<sup>10</sup>. Let  $D_{i-1}(\omega_j)$ ,  $R_{i-1}$  have been built up (let  $R_{i-1}, i \neq 1$  be the rejection sets intersection as the logical description of all  $i-1$  decision trees generated from the empirical decision forest). For the decision tree  $d_i$  the logical description construction for class with number  $j$  is given as recursive procedure  $D_i(\omega_j) = D_{i-1}(\omega_j) \vee (R_{i-1} \wedge D_i(\omega_j))$ .

The decision derived from the empirical decision forest according to the recognition algorithm with references switching out is made on the basis of only one conjunction of the bounded rank but possibly in condition when all previous decision trees from the empirical decision forest are rejected to decide. The main property of each such conjunction is its correctness according to the training table  $T_{mn\ell}$ , i.e. it is implemented only for one class objects.

The appropriateness of further recognition rules complication for building up decision making correction procedures is grounded on the basis of VCD evaluations for recognitions class algorithms that are defined by the empirical decision forest, i.e. the decision trees family using special pruning procedure.

Compared VCD evaluation for decision rules class generated from the decision tree with Simon's bounded rank [Simon, 1991; Дюличева Ю.Ю., 2003]  $VCD(rDT_n) = \Theta(n^r)$  with VCD evaluation for the decision rules class generated from the decision tree with bounded leaves number  $VCD(BDT(\mu, n)) = \Theta(\log_2 n)$  it is valid to say that the decision tree structure optimization on the basis of leaves number is more effective than the decision tree structure optimization on the basis of Simon's bounded rank. The conclusion novelty concludes in grounding of the decision tree structure optimization on the leaves number according to Vapnik-Chervonenkis' theory.

The evaluations of VCD of the decision rules class generating from the empirical decision forest were derived:

$$\max(\mu q, \log_2 n) < VCD(BDF(n, \mu, r, q)) < r \mu q \log_2 n - \mu q \log_2 \frac{\mu q}{2}$$

$$VCD(BDF(n, \mu, r, q)) = \Theta(\log_2 n) \text{ where } r, \mu, q = const, n \rightarrow \infty$$

The evaluations show that the recognition algorithms class based on the empirical decision forest synthesis has the same degree of complexity as the class of algorithms that are based on the single decision tree use and is equal to  $\Theta(\log_2 n)$  where  $n$  be the attributes space dimension.

### 3. Decision Forest Based Technology. Some Experiments Result

The worked out program software so called *Forest Based Learning (FBL) system* is intended to solve the training and recognition problems based on the single decision tree and the empirical decision forest synthesis according to the same attributes choice principle with using the new decision tree branches pruning strategy.

FBL system allows users to compare the quality characteristics of the single decision tree and the correct empirical decision forest. In particular it is possible to obtain information about the number of control objects that are correctly classified by the single decision tree and the empirical decision forest, the number of objects in the rejection sets formed in each synthesis stage of the decision tree as next component of the empirical decision forest, the number of leaves in each decision tree as forest's component, the decision tree branches' rank values that lead to "error" in recognition process, i.e. the redundant branches' rank values and to obtain the logical description of classes as disjunctive normal forms.

The table demonstrates that 6-correct (the branches' ranks are not more 6) empirical decision forest facilitates to significant decrease of the recognition errors percent compared to the single correct BDT (the average branches' ranks are not more than 8 and the average number of leaves are 20).

	the average errors percent on the control sample
correct BDT	6,1
EDF with rank 5	6,18
EDF with rank 6	5,5

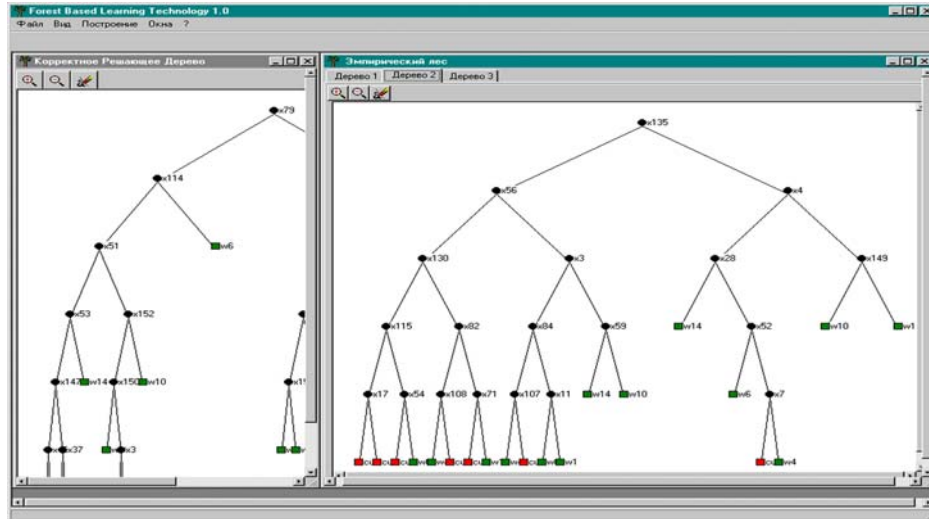
The practical confirmation of the theoretically grounded results was obtained in the recognition problem solving process of the pathogenic vibrios and aeromonads that provoke the different gastrointestinal sicknesses. The experiments that allow to evaluate the reliability of the constructed empirical decision forest were carried out on the training samples with size  $m = 310$  selected randomly and independently from real database of size 465. The correct decision tree and the  $r$ -correct empirical decision forest were built up according to these randomly selected training samples. In each such experiment BDT and EDF were evaluated on control set of size 55. The experiment were repeated  $n=100$  times. As the experiments result such outcomes as events  $A$ ,  $B$ ,  $C$  were considered. Let  $A$  was the event that EDF performed less errors on control than BDT;  $B$  was the event that EDF and BDT performed equal number of errors on control;  $C$  was the event that BDT performed less error on control than EDF. The event  $A$  was appeared  $m_A = 24$  times in 100 experiments; the event  $C$  was appeared  $m_B = 5$  times in the same 100 experiments. The frequencies  $\frac{m_A}{n} = \nu(A)$  and  $\frac{m_B}{n} = \nu(B)$  were corresponded to the probability evaluations  $P(A)$  and  $P(B)$  of the recognition accuracies on the arbitrary control set for EDF and BDT accordingly.

Based on the criterion [Гмурман В.Е., 2001] a hypothesis  $H_1: P(A) > P(B)$  was checked versus a competitive hypothesis  $H_0: P(A) = P(B)$

$$U_H = \frac{m_A/n - m_B/n}{\sqrt{\frac{m_A + m_B}{n + n} \left(1 - \frac{m_A + m_B}{n + n}\right) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)}} \approx 3,7$$

The evaluations  $(1 - 2\alpha)/2 = 0,49$ ;  $\Phi(U_{kp}) = 0,49$ ;  $U_{kp} = 2,32$ ;  $U_{kp} = 2,32 < 3,7 = U_H$  (3.1) were obtained on the basis of the significance level  $\alpha = 0,01$ . Based on the obtained inequality (3.1) the hypothesis  $H_1$  was taken up. Thus, it is valid to say that on the significance level 0.01 the empirical decision forest will make less recognition errors on control than the binary decision tree in average.

The picture illustrates the synthesis fragment of the single correct decision tree and the correct empirical decision forest with branches' rank 5 on the basis of *Forest Based Learning Technology*.



## Conclusion

The major results of the paper done are as follows. The probabilistic decision tree pruning criterion was worked out which applies to the branches with the number of internal nodes exceeding the predetermined admissible value of  $r$  rank. The grounding for the pruning as viewed as non-randomness of detecting  $r$  rank conjunctive regularity in the empirical training sample is suggested in the paper. The methods for building up a correct decision tree family so called *empirical decision forest* were worked out which offers a possibility for accurate fitting on the training sample, with the restriction applying to BDT rank branches being observed. The appropriateness of further complication of recognition rules for building up decision making correction procedures is grounded on the basis of VCD (with the decision rules complexity according to Vapnik-Chervonenkis theory [Вапник В.Н., 1979]) evaluation for recognition class algorithms that are defined by the binary decision tree with the pruning applying to the number of nodes. The algebraic correction model of the incorrect empirical decision trees family was worked out which gives way to more accurate classification [Журавлев, 1978, Донской В.И., 1986]. The software was created to implement the algorithms introduced in the paper, and experiments had been carried out with real data involved that justified the theoretical results reached.

The procedural technique of pruned BDT correction so called empirical decision forest that is introduced in the paper enables one to achieve a much more recognition algorithm compared to the algorithms that are realized by the single correct BDTs. Along with that the EDF is still available for logical description of objects as disjunctive normal forms. The appropriateness of applying the empirical decision forest in modern intellectualized informational systems is justified by Forest Based Learning - the program realization that was tested and approved in the paper.

## Bibliography

- [Вапник В.Н., 1979] Вапник В.Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. – М.: Наука, 1979. – 448 с.  
 [Гмурман В.Е., 2001] Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2001. 479с.  
 [Донской В.И., Дюличева Ю.Ю., 2002] Донской В.И., Дюличева Ю.Ю. Индуктивная модель  $r$ -корректного эмпирического леса // Труды международной конференции по индуктивному моделированию: Львов. – 2002. – С.54-58.  
 [Донской В.И., Башта А.И., 1992] Донской В.И., Башта А.И. Дискретные модели принятия решений при неполной информации. – Симферополь: Таврия, 1992. – 166 с.  
 [Донской В.И., 1986] Донской В.И. О корректности линейного замыкания множества алгоритмов распознавания типа решающих деревьев // Динамические системы. Вып.5. Киев: Вища школа. 1986. – С.91-94.  
 [Дюличева Ю.Ю., 2003] Дюличева Ю.Ю. Оценка VCD  $r$ -редуцированного эмпирического леса // Таврический вестник информатики и информатики. – 2003. - №1. – С. 31-42.  
 [Журавлев, 1978] Ю.И. Журавлёв Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Проблемы кибернетики. Вып.3. – М.: Наука, 1978. – С.5-68.  
 [Breiman, 2001] L. Breiman Random Forests CA 94720: Technical Report / Statistics Department University of California, Berkley, 2001.

- 
- [Breslow, Aha, 1997] L.A. Breslow, D.W. Aha Simplifying Decision Trees: A Survey In: Knowledge Engineering Review 12, 1997.
- [Cremilleux, Robert, 2000] B. Cremilleux, C.Robert Use of Attribute Selection Criteria in Decision Trees in Uncertain Domains In: Uncertainty in Intelligent and Information Systems, Advances in Fuzzy Systems, Application and Theory, World Scientific, Vol. 20, 2000.
- [Frank, 2000] E. Frank Pruning Decision Trees and Lists In: Ph. D. Thesis. University of Waikato. Department of Computer Science. Hamilton, New Zealand, 2000.
- [Ho, 1998] T.K. Ho C4.5 Decision Forests In: Proceedings of the 14<sup>th</sup> International Conference of Pattern Recognition, Brisbane, Australia, 1998.
- [Ho, 1995] T.K. Ho Random Decision Forests In: Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Conference on Document Analysis and Recognition, Montreal, Canada, 1995.
- [Ho, 1998] T.K. Ho The Random Subspace Method for Constructing Decision Forests In: IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol.20, №8, 1998.
- [Malerba, Esposito, Semeraro, 1996] D. Malerba, F. Esposito, G. Semeraro A Further Comparison Methods of Decision Tree Induction In: Learning From Data: Artificial Intelligence and Statistics V, D. Fisher and H.Lenz, eds., Lecture Notes in Statistics. Berlin: Springer, No.112, 1996.
- [Murphy, Pazzani, 1994] P.M. Murphy, M.J. Pazzani Exploring the Decision Forest: An Empirical Investigation of Occam's Razor in Decision Tree Induction In: Journal of Artificial Intelligence Research, Vol.1, 1994.
- [Schaffer, 1993] C. Schaffer Overfitting Avoidance as Bias In: Machine Learning, 10, 1993.
- [Simon, 1991] H.U. Simon The Vapnik-Chervonenkis Dimension of Decision Trees with Bounded Rank In: Information Processing Letters, 39, 1991.
- 

### Authors' Information

---

**Vladimir Donskoy** – Vernadskiy Taurida National University; P.O.Box: Vernadskiy Avenue 4, Simferopol, Ukraine, 95007; e-mail: [donskoy@ccssu.crimea.ua](mailto:donskoy@ccssu.crimea.ua)

**Yuliya Dyulichева** – Vernadskiy Taurida National University; P.O.Box: Vernadskiy Avenue 4, Simferopol, Ukraine, 95007; e-mail: [dyulichева@mail.ru](mailto:dyulichева@mail.ru)

## GENERALIZED SCALARIZING PROBLEMS *GENS* AND *GENSLEX* OF MULTICRITERIA OPTIMIZATION<sup>1</sup>

Mariyana Vassileva

**Abstract:** *Generalized scalarizing problems, called GENS and GENSLEX, for obtaining Pareto optimal solutions of multicriteria optimization problems are presented in the paper. The basic properties of these scalarizing problems are described. The existence of single-criterion problems with differentiable objective functions and constraints, which are equivalent to GENS and GENSLEX scalarizing problems, are pointed out.*

**Keywords:** *multicriteria optimization, interactive methods, decision support systems.*

---

### Introduction

---

Various real problems can be modelled as multicriteria optimization problems. In multicriteria optimization problems, several criteria are simultaneously optimized in the feasible set of alternatives. In the general case, there does not exist one alternative, which optimizes all the criteria. There is a set of alternatives however, characterized by the following: each improvement in the value of one criterion leads to deterioration in the value of at least one other criterion. This set of alternatives is called a set of the Pareto optimal alternatives (solutions).

---

<sup>1</sup> This paper is partially supported by the National Science Fund of Bulgarian Ministry of Education and Science under contract № I – 1401\2004.

Each alternative in this set could be a solution of the multicriteria optimization problem. In order to select one alternative, it is necessary to have additional information set by the so-called decision-maker (DM). The information that the DM provides reflects his/her global preferences with respect to the quality of the most preferred alternative.

The general problem of multicriteria optimization (MO) can be represented in the following way:

$$\text{"max"} \{ f_k(x), k \in K \}$$

subject to  $x \in X$ ,

where:

- $f_k(x)$ ,  $k \in K = \{1, 2, \dots, p\}$  are different criteria (objective functions) of the type  $f_k: R^n \rightarrow R$ , which must be simultaneously maximized;
- $x = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$  is the vector of variables, belonging to the non-empty feasible set  $X \subset R^n$ ;
- $Z = f(X) \subset R^p$  is the feasible set of the criteria values.

The scalarizing approach is one of the main approaches in solving MO problems. The basic representatives of the scalarizing approach ([Wierzbicki, 1980], [Sawaragi, Nakayama and Tanino, 1985], [Steuer, 1986], [Narula and Vassilev, 1994], [Buchanan, 1997], [Miettinen, 1999], [Vassileva, 2004], [Ehrgott and Wiecek, 2004]) are the interactive algorithms. The MO problem in these algorithms is treated as a decision-making problem and the emphasis is placed on the real participation of the DM in the process of its solution. Each interactive algorithm consists of two procedures in the general case – an optimization one and an evaluating one, which are cyclically repeated until the stopping conditions are satisfied. During the evaluating procedure the DM estimates the current Pareto optimal solution obtained, either approving it as the final (the most preferred) one, or setting his/her preferences in the search for a new solution. On the basis of these preferences a scalarizing problem is formed and solved in the optimization procedure and a new Pareto optimal solution is obtained with its help, which is presented to the DM for evaluation and choice. The main feature of each scalarizing problem is that every optimal solution is a Pareto optimal solution of the corresponding MO problem. The scalarizing problem is a single-criterion optimization problem, which allows the application of the theory and methods of single-criterion optimization. A number of scalarizing problems and a set of interactive algorithms developed on their basis have been proposed up to now. The different algorithms offer different possibilities to the DM in the control or in stopping the process of the final solution finding. On its hand, this searching process can be divided into two phases. In the first phase (the learning phase), the DM usually defines the region, in which he expects to find the most preferred solution, whereas in the second phase (the concluding phase) he is looking for this solution namely in this region.

The present paper describes generalized scalarizing problems, called GENS and GENSLex. They are extensions of the generalized scalarizing problem GENWS [Vassilev, 2004] and enables the obtaining of Pareto optimal solutions. Almost all scalarizing problems known up to now can be obtained from GENS and GENSLex problems, as well as new scalarizing problems with different properties can be generated from these problems.

---

### Generalized Scalarizing Problems GENS and GENSLex

---

For easier description of the topic further on, the following definitions will be introduced:

**Definition 1:** The solution  $x \in X$  is called a Pareto optimal solution of the multicriteria optimization problem, if there does not exist another solution  $\bar{x} \in X$ , satisfying the following conditions:

$$f_k(\bar{x}) \geq f_k(x), k \in K \text{ and } f_k(\bar{x}) > f_k(x) \text{ for at least one index } k \in K.$$

**Definition 2:** The vector  $z = f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))^T \in Z$  is called a Pareto optimal solution in the criteria space, if  $x \in X$  is a Pareto optimal solution in the variables' space.

**Definition 3:** The current preferred solution  $z = (f_1, \dots, f_k, \dots, f_p) \in Z$  is a Pareto optimal solution in the criteria space, selected by the DM at the current iteration.

**Definition 4:** The most preferred solution is the current preferred solution, which satisfies the DM to the highest extent.

**Definition 5:** The criteria classification is called the implicit division of the criteria into classes, depending on the alterations in the criteria values at the current solution, which the DM wishes to obtain.

In order to obtain Pareto optimal solutions starting from the current preferred solution, GENS scalarizing problem is proposed. It has the following type:

Minimize

$$(1) T(x) = \max_{k \in K^{\geq}} (F_k^1 - f_k(x)) G_k^1 R_1 \max_{k \in K^{\leq}} (F_k^2 - f_k(x)) G_k^2 R_2 \max_{k \in K^{<}} (F_k^3 - f_k(x)) G_k^3 \\ R_3 \max_{k \in K^{>}} (F_k^4 - f_k(x)) G_k^4 + \sum_{k \in K^0} (F_k^5 - f_k(x)) G_k^5 + \\ + \rho \left( \sum_{k \in K^{\geq}} (F_k^1 - f_k(x)) G_k^1 + \sum_{k \in K^{\leq}} (F_k^2 - f_k(x)) G_k^2 + \sum_{k \in K^{<}} (F_k^3 - f_k(x)) G_k^3 + \right. \\ \left. + \sum_{k \in K^{>}} (F_k^4 - f_k(x)) G_k^4 - \sum_{k \in K^= \cup K^{><}} f_k(x) G_k^6 \right),$$

subject to:

$$(2) f_k(x) \geq f_k, k \in K^{>} \cup K^=$$

$$(3) f_k(x) \geq f_k - D_k, k \in K^{\leq}$$

$$(4) f_k(x) \geq f_k - t_k^-, k \in K^{><}$$

$$(5) f_k(x) \leq f_k + t_k^+, k \in K^{><}$$

$$(6) x \in X$$

where:

- $G_k^1, G_k^2, G_k^3, G_k^4, G_k^5$  are scaling, normalizing or weighting positive coefficients;
- $F_k^1, F_k^2, F_k^3, F_k^4, F_k^5$  are parameters, connected with aspiration, current or other levels of the criteria values;
- $R_1, R_2, R_3$  are equal to the arithmetic "+" or to a separator " , ";
- $D_k$  is the value, by which the DM agrees the criterion with an index  $k \in K^{\leq}$  to be deteriorated ( $D_k > 0$ );
- $t_k^-$  and  $t_k^+$  are the lower and upper bound of the feasible for the DM interval of alteration of the criterion with an index  $k \in K^{><}$  ( $t_k^- > 0$ ;  $t_k^+ > 0$ );
- $f_k$  is the value of the criterion with an index  $k \in K$  in the current solution obtained;
- $K$  is the set of all the criteria;
- $K^{\geq}$  is the set of criteria, the current values of which the DM wishes to be improved up to desired by him/her levels  $F_k^1$ ;
- $K^{>}$  is the set of the criteria, the current values of which the DM wishes to be improved;
- $K^{\leq}$  is the set of the criteria, for which the DM agrees their current values to be deteriorated up to set by him/her feasible levels  $F_k^2$ , but not more than certain values  $D_k$  ( $D_k > 0$ );
- $K^{<}$  is the set of criteria, for which the DM agrees their current values to be deteriorated;
- $K^=$  is the set of criteria, for which the DM agrees their current values not to be deteriorated;

- $K^{>}$  is the set of the criteria, for which the DM agrees their values to alter in defined intervals;
- $K^0$  is the set of criteria, for which the DM does not set explicit preferences concerning the change of their values;
- $\rho$  is a small positive number.

The constraints (2) - (6) define a subset of  $X$ , containing Pareto optimal solutions.

**Theorem 1:** *The optimal solution of GENS scalarizing problem is a Pareto optimal solution of the multicriteria optimization problem.*

**Proof:**

Let  $K^{\geq} \neq \emptyset$  and/or  $K^{>} \neq \emptyset$ , or  $K^0 = K$  and let  $x^* \in X$  be an optimal solution of GENS scalarizing problem. Then the constraints (2) - (6) are satisfied for  $x^* \in X$ , together with the following condition:

$$(7) \quad T(x^*) \leq T(x), \quad x \in X.$$

Let us assume that  $x^* \in X$  is not a Pareto optimal solution of the multicriteria optimization problem. Then there must exist another  $x' \in X$ , for which the constraints (2) - (6) are satisfied, as well as the conditions given below:

$$(8) \quad f_k(x') \geq f_k(x^*), \quad k \in K \quad \text{and} \quad f_k(x') > f_k(x^*) \quad \text{for at least one index } k \in K.$$

Inequality (8) follows from the definition of a Pareto optimal solution.

Using constraint (8) and the definitions of  $R_1, R_2, R_3$ , the objective function  $T(x)$  of scalarizing problem GENS can be transformed, obtaining the following inequality:

$$\begin{aligned}
 (9) \quad T(x') &= \max_{k \in K^{\geq}} (F_k^1 - f_k(x')) G_k^1 R_1 \max_{k \in K^{\leq}} (F_k^2 - f_k(x')) G_k^2 R_2 \\
 &\quad \max_{k \in K^{<}} (F_k^3 - f_k(x')) G_k^3 R_3 \max_{k \in K^{>}} (F_k^4 - f_k(x')) G_k^4 + \\
 &\quad + \sum_{k \in K^0} (F_k^5 - f_k(x')) G_k^5 + \\
 &\quad + \rho \left( \sum_{k \in K^{\geq}} (F_k^1 - f_k(x')) G_k^1 + \sum_{k \in K^{\leq}} (F_k^2 - f_k(x')) G_k^2 + \sum_{k \in K^{<}} (F_k^3 - f_k(x')) G_k^3 + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k \in K^{>}} (F_k^4 - f_k(x')) G_k^4 - \sum_{k \in K^{\geq} \cup K^{>}} f_k(x') G_k^6 \right) = \\
 &= \max_{k \in K^{\geq}} \left( (F_k^1 - f_k(x^*)) + (f_k(x^*) - f_k(x')) \right) G_k^1 R_1 \\
 &\quad \max_{k \in K^{\leq}} \left( (F_k^2 - f_k(x^*)) + (f_k(x^*) - f_k(x')) \right) G_k^2 R_2 \\
 &\quad \max_{k \in K^{<}} \left( (F_k^3 - f_k(x^*)) + (f_k(x^*) - f_k(x')) \right) G_k^3 R_3 \\
 &\quad \max_{k \in K^{>}} \left( (F_k^4 - f_k(x^*)) + (f_k(x^*) - f_k(x')) \right) G_k^4 + \\
 &\quad + \sum_{k \in K^0} \left( (F_k^5 - f_k(x^*)) + (f_k(x^*) - f_k(x')) \right) G_k^5 + \\
 &\quad + \rho \left( \sum_{k \in K^{\geq}} \left( (F_k^1 - f_k(x^*)) + (f_k(x^*) - f_k(x')) \right) G_k^1 + \right. \\
 &\quad + \sum_{k \in K^{\leq}} \left( (F_k^2 - f_k(x^*)) + (f_k(x^*) - f_k(x')) \right) G_k^2 + \\
 &\quad + \sum_{k \in K^{<}} \left( (F_k^3 - f_k(x^*)) + (f_k(x^*) - f_k(x')) \right) G_k^3 + \\
 &\quad \left. + \sum_{k \in K^{>}} \left( (F_k^4 - f_k(x^*)) + (f_k(x^*) - f_k(x')) \right) G_k^4 - \right.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \sum_{k \in K^= \cup K^{><}} (f_k(x^*) + (f_k(x') - f_k(x^*))) G_k^6 < \\
& < \max_{k \in K^{\geq}} (\max_{k \in K^{\geq}} (F_k^1 - f_k(x^*)) G_k^1 R_1 \max_{k \in K^{\leq}} (F_k^2 - f_k(x^*)) G_k^2 \\
& \quad R_2 \max_{k \in K^{<}} (F_k^3 - f_k(x^*)) G_k^3 R_3 \max_{k \in K^{>}} (F_k^4 - f_k(x^*)) G_k^4) + \\
& \quad + \sum_{k \in K^0} (F_k^5 - f_k(x^*)) G_k^5 + \\
& \quad + \rho (\sum_{k \in K^{\geq}} (F_k^1 - f_k(x^*)) G_k^1 + \sum_{k \in K^{\leq}} (F_k^2 - f_k(x^*)) G_k^2 + \sum_{k \in K^{<}} (F_k^3 - f_k(x^*)) G_k^3 + \\
& \quad + \sum_{k \in K^{>}} (F_k^4 - f_k(x^*)) G_k^4 - \sum_{k \in K^= \cup K^{><}} f_k(x^*) G_k^6) = \\
& = T(x^*).
\end{aligned}$$

It follows from (9) that  $T(x') < T(x^*)$ , which contradicts to (7). Hence,  $x^* \in X$  is a Pareto optimal solution of the multicriteria optimization problem.

The scalarizing problem GENS guarantees that Pareto optimal solutions are generated. The common drawback [Miettinen, 1999] is how to select the coefficient  $\rho$ . An alternative way is to use a lexicographic approach. The following GENSLex problem in two phases is a lexicographic variant of scalarizing problem GENS.

The first problem GENSLex1 to be solved is the following:

Minimize

$$(10) \quad T_1(x) = \max_{k \in K^{\geq}} (\max_{k \in K^{\geq}} (F_k^1 - f_k(x)) G_k^1 R_1 \max_{k \in K^{\leq}} (F_k^2 - f_k(x)) G_k^2 R_2 \max_{k \in K^{<}} (F_k^3 - f_k(x)) G_k^3 \\
R_3 \max_{k \in K^{>}} (F_k^4 - f_k(x)) G_k^4) + \sum_{k \in K^0} (F_k^5 - f_k(x)) G_k^5$$

subject to:

$$(11) \quad f_k(x) \geq f_k, k \in K^{>} \cup K^=$$

$$(12) \quad f_k(x) \geq f_k - D_k, k \in K^{\leq}$$

$$(13) \quad f_k(x) \geq f_k - t_k^-, k \in K^{><}$$

$$(14) \quad f_k(x) \leq f_k + t_k^+, k \in K^{><}$$

$$(15) \quad x \in X$$

Let us denote the optimal objective function value of (10) by  $T_1^*$ . The final solution is obtained by solving the following problem GENSLex2:

Minimize

$$(16) \quad T_2(x) = \sum_{k \in K^{\geq}} (F_k^1 - f_k(x)) G_k^1 + \sum_{k \in K^{\leq}} (F_k^2 - f_k(x)) G_k^2 + \sum_{k \in K^{<}} (F_k^3 - f_k(x)) G_k^3 + \\
+ \sum_{k \in K^{>}} (F_k^4 - f_k(x)) G_k^4 - \sum_{k \in K^= \cup K^{><}} f_k(x) G_k^6$$

subject to

$$(17) \quad T_1(x) = \max_{k \in K^{\geq}} (\max_{k \in K^{\geq}} (F_k^1 - f_k(x)) G_k^1 R_1 \max_{k \in K^{\leq}} (F_k^2 - f_k(x)) G_k^2 R_2 \max_{k \in K^{<}} (F_k^3 - f_k(x)) G_k^3 \\
R_3 \max_{k \in K^{>}} (F_k^4 - f_k(x)) G_k^4) + \sum_{k \in K^0} (F_k^5 - f_k(x)) G_k^5 \leq T_1^*$$

and constraints (11) - (15).

**Theorem 2:** The optimal solution of GENSLex scalarizing problem is a Pareto optimal solution of the multicriteria optimization problem.

**Proof:**

Let  $K^{\geq} \neq \emptyset$  and/or  $K^> \neq \emptyset$ , or  $K^0 = K$  and let  $x^* \in X$  be an optimal solution of GENLex scalarizing problem. Then the constraints (11) - (15) are satisfied for  $x^* \in X$ , together with the following conditions:

$$T_1(x^*) \leq T_1(x) \text{ and } T_2(x^*) \leq T_2(x), x \in X.$$

Let us assume that  $x^* \in X$  is not a Pareto optimal solution of the multicriteria optimization problem. Then there must exist another  $x' \in X$ , for which the constraints (11) – (15) are satisfied, as well as the condition given below:

$$(18) \quad f_k(x') \geq f_k(x^*), k \in K$$

and  $f_k(x') > f_k(x^*)$  for at least one index  $k \in K$ .

It is clear that independently of defined values of  $R_1, R_2, R_3$  and from (18) and (10 - 17) follows that:

$$T_1(x') \leq T_1(x^*) \text{ and } T_2(x') < T_2(x^*)$$

or

$$T_1(x') < T_1(x^*) \text{ and } T_2(x') \leq T_2(x^*),$$

which contradicts with  $x^*$  being an optimal solution of GENLex scalarizing problem.

Scalarizing problem GENS is in the general case an optimization problem with a non-differentiable objective function. Every GENS scalarizing problem (defined values of  $R_1, R_2, R_3$ ) can be reduced to an equivalent optimization problem with a differentiable objective function on the account of additional variables and constraints. The equivalency of each pair of optimization problems is in relation to the obtained values of the objective functions (criteria) and the main variables. Different types of equivalent problems are obtained at different values of  $R_1, R_2, R_3$ .

Each equivalent problem can be presented as follows:

$$\min \left( \mu + \sum_{k \in K^0} y_k + \rho \sum_{k \in K \setminus K^0} y_k \right)$$

and satisfies two groups of constraints.

The first group of constraints is equal for all types of equivalent problems and has the following form:

$$(19) \quad \alpha \geq (F_k^1 - f_k(x))G_k^1, k \in K^{\geq}$$

$$(20) \quad \beta \geq (F_k^2 - f_k(x))G_k^2, k \in K^{\leq}$$

$$(21) \quad \gamma \geq (F_k^3 - f_k(x))G_k^3, k \in K^{<}$$

$$(22) \quad \Omega \geq (F_k^4 - f_k(x))G_k^4, k \in K^{>}$$

$$(23) \quad (F_k^1 - f_k(x))G_k^1 = y_k, k \in K^{\geq}$$

$$(24) \quad (F_k^2 - f_k(x))G_k^2 = y_k, k \in K^{\leq}$$

$$(25) \quad (F_k^3 - f_k(x))G_k^3 = y_k, k \in K^{<}$$

$$(26) \quad (F_k^4 - f_k(x))G_k^4 = y_k, k \in K^{>}$$

$$(27) \quad (F_k^5 - f_k(x))G_k^5 = y_k, k \in K^0$$

$$(28) \quad -f_k(x)G_k^6 = y_k, k \in K^= \cup K^{\times}$$

$$(29) \quad f_k(x) \geq f_k, k \in K^{>} \cup K^=$$

$$(30) \quad f_k(x) \geq f_k - D_k, k \in K^{\leq}$$

$$(31) \quad f_k(x) \geq f_k - t_k^-, k \in K^{\times}$$

$$(32) \quad f_k(x) \leq f_k + t_k^+, k \in K^{><}$$

$$(33) \quad x \in X$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \Omega, y_k / k \in K \text{ - arbitrary}$$

The second group of constraints has different type and number of constraints depending on the values of  $R_1, R_2, R_3$ . The constraints from the second group for one equivalent problem of scalarizing problem GENS, which is obtained when  $R_1$  is equal to the separator “,”,  $R_2$  and  $R_3$  are equal to the arithmetic operation “+”, have the following form:

$$(34) \quad \mu \geq \alpha$$

$$(35) \quad \mu \geq \beta + \gamma + \Omega$$

$$\mu \text{ - arbitrary}$$

The constraints from the second group in the other equivalent problems can be stated in a similar way.

Scalarizing problems GENSLex1 and GENSLex2 are in the general case optimization problems with a non-differentiable objective functions and constraints. Every scalarizing problem of both types GENSLex1 and GENSLex2 (defined values of  $R_1, R_2, R_3$ ) can be reduced to an equivalent optimization problems with a differentiable objective functions and constraints on the account of additional variables and constraints.

Different types of equivalent problems of scalarizing problem GENSLex1 are obtained at different values of  $R_1, R_2, R_3$ . Each equivalent problem can be presented as follows:

$$(36) \quad \min \left( \mu + \sum_{k \in K^0} y_k \right),$$

satisfying two groups of constraints. The first group of constraints is equal for all types of equivalent problems and has the following form:

$$(37) \quad \alpha \geq (F_k^1 - f_k(x))G_k^1, k \in K^{\geq}$$

$$(38) \quad \beta \geq (F_k^2 - f_k(x))G_k^2, k \in K^{\leq}$$

$$(39) \quad \gamma \geq (F_k^3 - f_k(x))G_k^3, k \in K^{<}$$

$$(40) \quad \Omega \geq (F_k^4 - f_k(x))G_k^4, k \in K^{>}$$

$$(41) \quad (F_k^5 - f_k(x))G_k^5 = y_k, k \in K^0$$

$$(42) \quad f_k(x) \geq f_k, k \in K^{>} \cup K^{=}$$

$$(43) \quad f_k(x) \geq f_k - D_k, k \in K^{\leq}$$

$$(44) \quad f_k(x) \geq f_k - t_k^-, k \in K^{><}$$

$$(45) \quad f_k(x) \leq f_k + t_k^+, k \in K^{><}$$

$$(46) \quad x \in X$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \Omega, y_k / k \in K^0 \text{ - arbitrary.}$$

The second group of constraints has different type and number of constraints depending on the values of  $R_1, R_2, R_3$ . The constraints from the second group for one equivalent problem of scalarizing problem GENSLex1, which is obtained when  $R_1$  is equal to the separator “,”,  $R_2$  and  $R_3$  are equal to the arithmetic operation “+”, have the following form:

$$(47) \quad \mu \geq \alpha$$

$$(48) \quad \mu \geq \beta + \gamma + \Omega$$

$$\mu \text{ - arbitrary}$$

Different types of equivalent problems of scalarizing problem GENSLex2 are obtained at different values of  $R_1, R_2, R_3$ . Each equivalent problem can be presented as follows:

$$(49) \quad \min \left( \sum_{k \in K \setminus K^0} y_k \right)$$

and satisfies two groups of constraints.

The first group of constraints is equal for all types of equivalent problems and has the following form:

$$(50) \quad (F_k^1 - f_k(x))G_k^1 = y_k, k \in K^{\geq}$$

$$(51) \quad (F_k^2 - f_k(x))G_k^2 = y_k, k \in K^{\leq}$$

$$(52) \quad (F_k^3 - f_k(x))G_k^3 = y_k, k \in K^{<}$$

$$(53) \quad (F_k^4 - f_k(x))G_k^4 = y_k, k \in K^{>}$$

$$(54) \quad -f_k(x)G_k^6 = y_k, k \in K^= \cup K^{\times}$$

$$(55) \quad f_k(x) \geq f_k, k \in K^{>} \cup K^=$$

$$(56) \quad f_k(x) \geq f_k - D_k, k \in K^{\leq}$$

$$(57) \quad f_k(x) \geq f_k - t_k^-, k \in K^{\times}$$

$$(58) \quad f_k(x) \leq f_k + t_k^+, k \in K^{\times}$$

$$(59) \quad x \in X$$

$$y_k / k \in K \setminus K^0 - \text{arbitrary}$$

The second group of constraints has different type and number of constraints depending on the values of  $R_1, R_2, R_3$ . The constraints from the second group for one equivalent problem of scalarizing problem GENSLex2, which is obtained when  $R_1$  is equal to the separator “,”,  $R_2$  and  $R_3$  are equal to the arithmetic operation “+”, have the following form:

$$(60) \quad \alpha \geq (F_k^1 - f_k(x))G_k^1, k \in K^{\geq}$$

$$(61) \quad \beta \geq (F_k^2 - f_k(x))G_k^2, k \in K^{\leq}$$

$$(62) \quad \gamma \geq (F_k^3 - f_k(x))G_k^3, k \in K^{<}$$

$$(63) \quad \Omega \geq (F_k^4 - f_k(x))G_k^4, k \in K^{>}$$

$$(64) \quad (F_k^5 - f_k(x))G_k^5 = y_k, k \in K^0$$

$$(65) \quad \mu \geq \alpha$$

$$(66) \quad \mu \geq \beta + \gamma + \Omega$$

$$(67) \quad \left( \mu + \sum_{k \in K^0} y_k \right) \leq T_1^*$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \Omega, \mu, y_k / k \in K^0 - \text{arbitrary.}$$

---

## Conclusion

The interactive algorithms solving different types of multicriteria optimization problems use different scalarizing problems. The features of each scalarizing problem are defined by the possibilities offered to the decision-maker to set his/her preferences, as well as by the quality of the Pareto optimal solutions obtained. Altering the parameters of the generalized scalarizing problems GENS and GENSLex, a great part of the already known scalarizing problems can be obtained and also new scalarizing problems can be generated. In connection with this, generalized interactive algorithms with alterable scalarization and parameterization can be designed, which expand to a great extent the possibilities of the decision-maker in describing his/her preferences.

---

## Bibliography

---

- [Buchanan, 1997] J.T. Buchanan. A Naive Approach for Solving MCDM Problems: The GUESS Method. Journal of the Operational Research Society, 48, pp.202 – 206, 1997.
- [Ehrgott and Wiecek,2004] M. Ehrgott and M. Wiecek. Multiobjective Programming. In: Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys. Eds. J. Figueira, S. Greco and M. Ehrgott. Springer Verlag, London, 2004.
- [Miettinen, 1999] K.Miettinen. Nonlinear Multiobjective Optimization. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999.
- [Narula and Vassilev, 1994] S.Narula and V.Vassilev. An Interactive Algorithm for Solving Multiple Objective Integer Linear Programming Problems. European Journal of Operational Research, 79, pp. 443–450, 1994.
- [Sawaragi, Nakayama and Tanino, 1985] Y.Sawaragi, H.Nakayama and T.Tanino. Theory of Multiobjective Optimization. Academic Press, Inc., Orlando, Florida, 1985.
- [Steuer, 1986] R.E.Steuer. Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Applications. John Wiley & Sons, Inc., 1986.
- [Vassilev, 2004] V.Vassilev. A Generalized Scalarizing Problem of Multicriteria Optimization. Working papers of IIT-BAS, IIT/ WP-187B, 2004.
- [Vassileva, 2004] M.Vassileva. A Learning-oriented Method of Linear Mixed Integer Multicriteria Optimization. Cybernetic and Information Technologies, vol.4, No 1, pp. 13-25, 2004.
- [Wierzbicki, 1980] A.P.Wierzbicki. The Use of Reference Objectives in Multiobjective Optimization. In: Multiple Criteria Decision Making Theory and Applications, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 177, pp. 468-486. Ed. G.Fandel and T.Gal. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1980.
- 

## Author's Information

---

**Mariyana Vassileva – Ivanova, PhD** – Research Associate, Institute of Information Technologies, BAS; Acad. G. Bonchev Str., bl. 29A, Sofia 1113, Bulgaria; e-mail: [mvassileva@iinf.bas.bg](mailto:mvassileva@iinf.bas.bg).

## INFORMATION SYSTEM FOR SITUATIONAL DESIGN

**T. Goyvaerts, A. Kuzemin, V. Levikin**

### **Extended Abstract:**

From the standpoint of the system analysis the quantitative simulation of the information-technological complex (a situational center – SC) as an object of simulation and management requires consideration of a simulation object as a complex multilevel stochastic and self-developing system; its current state imitative modelling also requires the use of the fuzzy media description.

To build an informational model of a “situation” development and to manage it there is a good reason to use the informational technology of integration of aerospace monitoring and ground contact measurements by the minimization criterion of expenditures of time  $T$  and material resources  $S$ .

Equipment of different type for information recording through remote sounding can be placed on the mobile platforms (space, flying, aerostat vehicles). With the initial information obtained with these methods it is possible to solve various problems of monitoring and prompt detection of important abnormal events on the earth surface.

In the general case time  $t_{recogn}$  for recording and recognition of the sought objects necessary for practice can vary from a month to fractions of a minute. In this case

$$t_{recogn} = t_k + t_c + t_n + t_e$$

where:

$t_k$  – is “Camera” time, i.e. time of the launch-control command to an approach to the object mapping photography

$t_c$  – is “Mapping photography” time, i.e. time of the object image recording process duration;

$t_n$  – is “Post” time, i.e. duration of time from the moment of the recording end to the moment of transmission to the user;

$t_e$  – is “Experiment” time, i.e. duration of time from the moment of reception of the picture by the user to the moment of its recognition by experts and identification of presence or absence of the sought information parameters on it.

In case of detection of the pictures necessary for the recognition problems the so-called time of search  $t_s$  of the needed picture should be distinguished in the already existing distributed data bases with the results of remote sounding. In this case the recognition time will be calculated in the following way:

$$t_{\text{recogn}} = \min \{t_k + t_c; t_s\} + t_n + t_e .$$

The decision-making system is a methodology for a complex solution of the problem making it possible to simulate problematic situations of unlimited complexity and therewith providing a high quality of the made decision. In other words, this system is the main direction in complex decision-making; it performs one of the main functions of the situational center (SC).

Making of the right decision is realized using many parameters being measured with corresponding sensors. SC realizes the decision making in the automatic regime when indeterminate parameters and features appear. Moreover, it is necessary to make a decision in the real time with a high probability that this decision will be made right. This decision is defined by the ratio of the measured values to the standard ones. As the information being obtained represents clear and fuzzy set then such a set is the universal one and it can be presented as:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ where } x_i \text{ are the parameters being measured.}$$

In this universal set there are both clear  $A_i$  and fuzzy  $B_k$  sets,  $\mu_{A_i}(x)$  and  $\mu_{B_k}(x)$  are membership functions.

$$A_i = \{x \in X \mid \mu_{A_i}(x) = 1\},$$

$$B_k = \{x \in X \mid \mu_{B_k}(x) \neq 1\}.$$

The system performs polling of all sensors and analyses the obtained values comparing them with the standard. Initially the polling is carried out using the clear set features and then it is performed with the fuzzy set. The fuzzy set should be divided into a number of fuzzy sets each of them having their own features. This will make it possible to take a decision close to a real time and increase the probability of the right decision making as the probability of a right decision-making is equal to the sum of probabilities obtained with all clear and fuzzy sets.

Decision-making with a clear set is performed by comparison of the obtained value with the standard.

With a mutual action of separate elements of the system on each other uncertainty in a right decision-making concerning a particular parameter arises. A totality of such uncertain parameters comprises a fuzzy set  $B_k$ . A complicated situation arises as a membership function in addition to the interval  $[0, 1]$  can assume its values in the interval  $[-1, 1]$ . With  $\mu(x) > 0$  there is a possibility to make a right decision. If  $-1 \leq \mu(x) < 0$  then a false decision is made. A right decision-making by fuzzy sets is defined by  $\alpha$ -cut, i.e.  $B_k = \{x \in X \mid \mu_{B_k}(x) = \alpha\}$ .

To build a membership function for a right decision-making three approaches should be taken: the objective, subjective and statistical ones.

---

### Authors' Information

**Thierry Goyvaerts** – ICT co-ordinator Brusselsesteenweg 64/5 3080 Tervuren (near Brussels) Belgium

**Kuzemin A.Ya.** – Prof. of Information Department, Kharkov National University of Radio Electronics, Head of IMD, (Ukraine), [kuzy@kture.kharkov.ua](mailto:kuzy@kture.kharkov.ua)

**Levikin V.** – Prof. of Kharkov National University of Radio Electronics, Head of IMD, (Ukraine),

## IMPLEMENTATION OF THE SYSTEM APPROACH IN DESIGNING INFORMATION SYSTEM FOR ENSURING ECOLOGICAL SAFETY OF MUDFLOW AND CREEP PHENOMENAE

E. Petrov, A. Kuzemin, N.Gusar, D. Fastova, I. Starikova, O. Dytshenko

**Abstract:** *In this assignment pit into practice the researching of language identification of the information analytic system of the situation center for the region energy safety. This method proposes the creating of the scientific grounded and economically sound information system to control situations that are built on the base of wide application new information technologies. Also, there are given foundation of choice of the context-sensitive language for the simulation of the system and instrument application of fuzzy logic. And has developed the mathematics model of the system that reflect main point of manage process especially tariff manage for energy safety.*

### 1. Introduction

The creating of situation centers is one of the most relevant effectiveness increase problem of the management. There are few hundred situation centers in the world, but the quantity is growing up. Organs of government, first-rate corporations, Enterprises of oil-gas field, power engineering, machine building, airplane building, atomic industry need in the creating of such centers.

Most important factors, that guaranteeing the inculcation of the situation centers into practice, are:

- Need in the perfection of the managerial procedures by force of including the management not only on the stage of decision, but also on the stage of making of the decision;
- The possible optimization of the decisions by force of expert valuation and modelling situation by using modern information technologies;
- The possible improving of the information and output decision pilot analysis by force of using modern information technologies that guaranteeing agglomeration of communications facilities, analytical treatment and visualization of information;
- Need in providing persons firsthand and full information about this problem;
- The possibility of surgical approach first persons to all information

So, situation center is the aggregate of the technical software tools, scientific-and-engineering methods and engineering decisions for the automation of the representation, modelling, analysis of situation and management processes.

There are a lot of problems for each region that can change living conditions and the development of inhabitants, provoke different conflicts and crises. We could put to such problems next problems: the problem of peace conservation, impoverishment, demographic, energy, and ecological problems.

Keeping of energy safety should view as one of primary object in regional energy politics.

Experience study of application situation centers permit to claim that situation centers can be used as instrument of energy control, on the state level and on the regional level. Prerequisites of such application are:

- High importance of power engineering for the economics of the country and life sustenance;
- Complexity of achievement of the balance between consumer interests and concern of producers, when actually producer is monopolist;
- Using of the situation center technology to manage in the power engineering, especially in tariff manage, can help to develop decisions taking into account next changing in economics;
- Big quantity of subjects, that take a part on the energy market, generates corresponding size of technical, economic and lawful information.

Tools of the situation center permit to analyze this information and make it available for all interested persons.

The object of research automation is building information analysis system, which can used for effective decision in the managing of power engineering. In the base of this system lying the problem of the building expert model that can imitate the specialist behavior upon he decide practice tasks. This method could help to safe knowledge of the specialist and could help specialist to work in different fields.

## 2. Target Setting

We have to build information analysis system to achieve the target:

- To gather information about all energy safety organizations, industry buyer and population;
- Monitoring of this information
- Automation of formalized part of the calculation process
- Approval in decision-making when tariffs are changed (attraction of interested persons)
- The defense of approved tariffs
- Composition of report

For the creating of such systems, first you have to decide few tasks, which are primary:

- To organize input data's: creating of knowledge base, rules of deduction;
- The choice of system description language;
- Description of the system and the building of mathematics model;
- The choice of decision devise;
- Data analysis and decision

After this, we receive tools for the regulation of the control process in power engineering, which guarantee stability of the market and development of the region.

## 3. Model of the System

The main target when you plan the system of automatic manage is making of optimal decision for very short period. Let's view next task, the task of guaranteeing of region energy safety and the process of making-decision, which we could put into the base of the system. Let's make the diagram 1:

In the diagram 1 you can see next symbols:

- Guaranteeing of energy safety (GES)
- Safety criteria (SC)
- Information about energy market (IFM)
- Tariff valuation (TV)
- Human resource (HR)
- data domain (DD)
- Region administration (RA)
- Economic objects (EO)
- Producers of energy (PE)

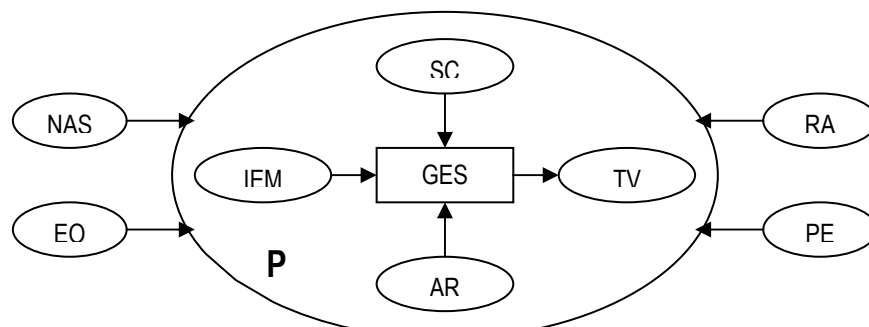


Diagram 1

From diagram we can image model system in the following way:  $S = F(U, V, K, R, G, S)$

Manage system is the interaction function of all components:

- U – information about energy safety organizations, industry buyers and population, region budget;
- V – decision about control of tariff;



K – Set manage criteria's: the dynamics of energy production; energy intensity; diversification of energy carrier export; social and politics stability in the regions; national financing of research engineering; structure of energy using and stocks of basic fuel kinds etc;

R – customers, suppliers, service personnel;

G – producers of energy, inhabitants, region administration, economic objects; S – collection, treatment and keeping of information; analysis of information; making-decision.

---

#### 4. Representation and Description Language of the System

---

We should mark very important detail on this step. As you know, manage system are lying on the making, structuring and exchanging of information. So, How we should present the information in manage system. The main feature of these systems is that most information for the mathematics description exists in the form of presentations and wishes of experts. But on the language of traditional mathematics, we don't have those objects, which could adequately describe fuzziness of expert's presentation.

Representation and description language of the system, language of management is prime characteristics, from which depends valuation of the level of approach to the contact with the system. Context-free language it is description of the system using the standard mathematics methods, therefore it is most suitable for the closed systems that don't change in time and where the final result is predefined. In our case, we have system that has constant cooperation with outward things and she always change in time. At that we don't know the kind of this changing, their character and result.

The main character of concerned system it is that intelligence about object of management, criteria of management and set possible decisions could be submission in the form of pronouncement on usual natural language. These systems are open and the process of their management training never ends by creating of formalize model.

The classic method is unacceptable for management in conditions of impossibility of creating certain mathematics, algorithmic and other model object. So we have to go aside from apparatus of context-free languages to the side of searching waives improvement of making-decision quality. This improvement can be reach only thanks to context-dependent language.

Context-dependent language (natural human language) we will present like language, in which meaning of certain pronouncement depends from previous pronouncements on this language, i.e. we have logic chain of inferences.

So, we proceed to real system in their outside circle. We can present them using languages, which represent semantics of cooperation this system with outside world.

As a result of these remarks, we choose language of fuzzy logic in the role of context-dependent language. This method has three distinguishing features:

1. we use fuzzy values and "linguistic" variables instead of or further to numerical variables
2. simple ratios between variables are presented with the help of fuzzy pronouncements – predicates;
3. Difficult ratios are described by fuzzy procedures.

This language give us possibility to reflect adequate the main point of the making-decision process in fuzzy conditions for multilevel system, operate with fuzzy limitations and targets, and to specify them using linguistic variables. Therefore, the mathematics apparatus of the fuzzy set theory can be viewed like basic description apparatus of multistage hierarchy system, of making-decision process and of engineering procedure control. So, we will think that all input sets are fuzzy.

---

#### 5. System Description

---

Let's do the decomposition of our task, divide it on two subgoals. They are part of the making-decision process. The decomposition will be in functional meaning, because main interest for our investigation presents in examination like functional object. Each function is built using the principle of gradual refinement of information. It permits to localize all deflection from normal work.

As a result we'd receive components of the system, which will maintain the functionality, integrity and also will represent functional objects lower level of decomposition.

The system could be represented like  $S = \cup S_i, i = 1, 2, \dots$  where  $S_i$  – set of elements that could be composed.

For description of cooperation of the system components, we use next apparatus.

We have three algebras: operation algebra (AO), condition algebra (AU), connection algebra (AS). Like we know, concept of algebra involves concept of set and operation fixed on it.

Thus we have operation algebra  $AO = \{O, \wedge, \vee\}$ , where  $\{O\}$  – set of operations,  $O_i$  and  $O_j$  – elements of this set – operations;  $O_i \wedge O_j$  – operation of conjunctive,  $O_i \vee O_j$  – operation of disjunctive.

Thus we have condition algebra  $AU = \{E, \wedge, \vee, \bar{E}\}$ , where  $\{E\}$  – set of conditions,  $E_i$  and  $E_j$  – elements of this set – conditions;  $E_i \wedge E_j$  – operation of conjunctive,  $E_i \vee E_j$  – operation of disjunctive,  $\bar{E}$  – operation of negation.

Connection algebra  $AS = \{T, \wedge, \vee, \bar{T}\}$ , where  $\{T\}$  – set of connections,  $T_i$  and  $T_j$  – elements of this  $\{T\}$  set – connections;  $T_i \wedge T_j$  – operation of conjunctive,  $T_i \vee T_j$  – operation of disjunctive,  $\bar{T}$  – operation of negation.

Connections between elements and elements of the system can be expressed like aggregate of operations, conditions and connections.

Element of the system can be expressed next way:  $S_i = (E_i T_i) O_k (E_j T_j)$ , where  $(E_i T_i)$  – input data,  $(E_j T_j)$  – output data,  $O_k$  – operation.

So, system S can be expressed like composition of owns elements and connections between they self, i.e.  $S = \{S_i O_l S_l \dots O_m S_m O_n S_n\} = S_i \wedge S_l \wedge \dots \wedge S_m \wedge S_n$ , where  $S_i, S_l, \dots, S_m, S_n$  correspond next element  $S_i = (E_i T_i) O_k (E_j T_j)$ .

Otherwise, this we can show by next pronouncement: if  $S_i$  and  $S_l$  and ... and  $S_m$  and  $S_n$ , so DECISION.

Decomposing further all elements and analyzing them, as a result we receive set of elementary components of the system next form  $S_i = (E_i T_i) O_k (E_j T_j)$ , suitable for pronouncements IF "inputs", THEN "outputs".

Then producing this expressions, beginning from elementary parts to larger we will receive full description of the system on natural language, mathematically shown by combination  $S_i = (E_i T_i) O_k (E_j T_j)$

At that time, we will use these axioms:

1. Idempotentive  $S_i \wedge S_i = S_i$ ,  $S_i \vee S_i = S_i$ .
2. Commutative  $S_i \wedge S_j = S_j \wedge S_i$ ,  $S_i \vee S_j = S_j \vee S_i$ .
3. Associative  $(S_i \wedge S_j) \wedge S_k = S_i \wedge (S_j \wedge S_k)$ ,  $(S_i \vee S_j) \vee S_k = S_i \vee (S_j \vee S_k)$ .
4. Distributive  $(S_i \vee S_j) \wedge S_k = S_i \wedge S_k \vee S_j \wedge S_k$ ,  $(S_i \wedge S_j) \vee S_k = (S_i \vee S_k) \wedge (S_j \vee S_k)$ .
5. Elimination(absorption)  $S_i \vee S_i \wedge S_j = S_i$ ,  $S_i \wedge (S_i \vee S_j) = S_i$ .
6. Folding  $S_i \vee S_j \bar{S}_j = S_i$ ,  $S_i (S_j \vee \bar{S}_j) = S_i$ .
7. Double negation.  $\bar{\bar{S}}_i = S_i$ .

---

## 6. Fuzzy Logic

---

So, this model of the system would be present as set of the elements like  $S_i = (E_i T_i) O_k (E_j T_j)$ , where  $(E_i T_i)$  – input data and  $(E_j T_j)$  – output (transformation) data.

Let's do some comments. This expression means, that every element of the system  $S_i$  would be present like predicate – pronouncement, which shows some element state of the system  $S_i = P((E_i T_i), (E_j T_j))$

Let's look next statement. Increasing of quantity energy sellers entailed to decreasing of energy price. We see that this pronouncement could be divided on two earthier sentences: "Quantity of energy sellers increases" and

“Energy price decreases”, which are predicates too, but they have lower order. However, we will be think that components of the system present predicates of first order, i.e.  $(E_i T_i) = P(E_i, T_i)$  correspond to: “Quantity of energy sellers increases” and  $(E_j T_j) = P(E_j, T_j)$  - “Energy price decreases”.

As a result, we could say, that the system would be present like predicate same order. We should to mark, that there are some properties for every predicate:

Reflexivity:  $P((E_i T_i), (E_i T_i)) = 1$

Symmetry  $P((E_i T_i), (E_j T_j)) = 1 \Rightarrow P((E_j T_j), (E_i T_i)) = 1$ ;

Transitivity:  $P((E_i T_i), (E_j T_j)) = 1$  and  $P((E_j T_j), (E_m T_m)) = 1$ , so  $P((E_i T_i), (E_m T_m)) = 1$

Reflexivity means, that equal inputs entail equal outputs.

Symmetry of predicate means that after input data change their place, then result will be same.

Transitivity means that if results of the first and second pronouncements are equal, and result of the second and third pronouncements are equal too, then result of the first and third pronouncements will be equal.

We should to mark that every predicate will be given on data domain - DD, i.e. for example, arguments  $E_i, T_i$  of  $P(E_i, T_i)$  predicate are given on  $\{E\}$  and  $\{T\}$  sets corresponding to  $E_i \in E$  и  $T_i \in T$

How we said earlier, these sets are fuzzy, every variable (for example  $E_i, T_i$ ) is as linguistic. In this case, DD presents fuzzy set, which rounds all problem area.

For fuzzy subset, we bringing not functional, but characteristic function on object's dimension  $A = \{a\}$ , which gets for all elements degree of presence some property by this property they are belong to  $B$  subset. This characteristic function is membership function for fuzzy subset.

Fuzzy subset  $B$  of the  $A$  described by membership function  $\mu: A \rightarrow B$ , which put into accordance to every element  $a \in A$  number  $\mu(a)$  from interval  $[0,1]$ . This number defines degree of membership element  $a$  to  $B$  subset. At that, 0 and 1 correspond to the lowest and the highest degree of element membership to some subset. Numerical value of membership function describes degree of element membership to some fuzzy set. This fuzzy set is elementary characteristic of event on natural language.

Form of membership function defines according to concrete problem. It would be next:

1.  $\mu^j(a_i) = 1/C$ , where  $C^{-1} = 1 + ((a_i - b_j)/c_j)^2$ ,  $j = 1, \dots, m; i = 1, \dots, n$ .

where  $b_j, c_j$  - parameters of the function, which we have to attune,  $m$  - quantity of terms in system.

2.  $\mu_{ij}(a_i) = e^{-k}$ , where  $k = -(a_i - \alpha_{ij})^2 / \sigma_{ij}^2$ ,  $\alpha$  - Midline,  $\sigma$  - dispersion

and other.

Thus,  $P_1, P_2, \dots, P_n$  are elements of the system, which realizing some predicate  $P(E_j, T_j)$ ,  $n$  - quantity of elements,  $E_j, T_j$  - arguments of predicate.

From experimental study elements behavior  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , we are concluding their characteristic properties, which are system of logic equations:

$$F_1(P_1, P_2, \dots, P_n) = 1;$$

$$F_2(P_1, P_2, \dots, P_n) = 1;$$

.....

$$F_r(P_1, P_2, \dots, P_n) = 1;$$

$r$  - quantity of equations,  $F_1, F_2, \dots, F_r$  - predicates from predicates. This logic conditions are axioms of elements...

Aggregate of true pronouncements about objects  $P_1, P_2, \dots, P_n$  is T theory of these elements. Aggregate of any pronouncements of the T theory, from which we can logically conclude any true pronouncement of the T theory we will identify as system of axioms T theory.

Composition of the concrete (individual, fixed) predicates  $(P_1^*, P_2^*, \dots, P_n^*)$ , which satisfy the axiom of T theory, we will identify as model of T theory.

General model form we received as a result of system decision of the logical equations.

---

### Conclusion

---

Presented method, which suppose organization and mechanism of the representation language choice and description of the system for energy safety of the region, permit to accelerate the process of modelling of this system. It unifies next ideas: the modelling of the system based into apparatus of fuzzy logic; the system is open and always changed.

Scientific novelty of received results concludes in special point of view to the building of the system and to the creating of unified language area, in which all elements are cooperating.

Practice significance of developed system exceeds on 35% per-existing systems. In case of full evolution of the situation center tariff policy will be agree with higher echelon. And the region will receive active instrument to control the power engineering, which ensure the stability of energy market and development of region economics as a whole.

In future, we see sense in deeper investigations for improvement of this method and potential realization it in different areas of local, regional and national management.

---

### Authors' Information

---

**Petrov E.** – Prof., Manager by faculty of system engineering of Information Department, Kharkov National University of Radio Electronics, (Ukraine), [kuzy@kture.kharkov.ua](mailto:kuzy@kture.kharkov.ua)

**Kuzemin A.Ya.** – Prof. of Information Department, Kharkov National University of Radio Electronics, Head of IMD, (Ukraine), [kuzy@kture.kharkov.ua](mailto:kuzy@kture.kharkov.ua)

**Fastova D., Starikova I.** – Aspirant, Kharkov National University of Radio Electronics, (Ukraine), [kuzy@kture.kharkov.ua](mailto:kuzy@kture.kharkov.ua)

**Dytshenko N., Gusar N.** – Magistrate, Kharkov National University of Radio Electronics, (Ukraine), [kuzy@kture.kharkov.ua](mailto:kuzy@kture.kharkov.ua)

---

## A METHOD OF THE SPEAKER IDENTIFICATION ON BASIS OF THE INDIVIDUAL SPEECH CODE

**M.F. Bondarenko, A.V. Rabotyagov, M.I. Sliptshenko**

**Abstract:** *A new method for speaker identification is being offered. The base of the method lies in new theoretical statements and non-traditional views on the questions of formal voice signals transformation and voice objects classification. These views rest upon the concept of heuristic simulation. The novelty of the method is that the identification is carried out on basis of the individual speech code, which is assigned to each voice code during the classification of voice objects adaptive search for informative signs. The digital code pattern of a personal voice code as an informative signs combination represents a set of elements with significant functions.*

---

### Introduction

---

It is generally accepted by the scientists that among the numerous scientific problems of today, one of the leading roles is played by the automated speech processing, and, in particular, the development of effective methods for the speaker identification on basis of the acoustic-phonetic analysis. During the last 15 years, there's been a tendency for more speech researches. Most of the researches are based on the *spectral* ideology [1]. However, the progress in this branch was not as rapid as expected. What caused this situation? Analyzing the speech research, the famous linguist scientist R.K. Potapova concludes, "The main complication for both speech identification and its understanding is the definition of durable signs on the acoustic-phonetic level" [1, p. 295].

## Objective

The work is directed to the development of a new speaker identification method based on the new knowledge about speech signals, ways of their transformation, and further processing.

The method will allow the identification research of extremely limited and distorted speech material.

To solve the problem, two hypotheses are introduced. The first hypothesis involves the possibility to perform the speaker identification on basis of so called *structural signs of vowel elementary segments* [2] as a set of primary informative differentiation signs defining the individual quality of the speaker. The second hypothesis lies in the possibility of speaker identification on basis of so called *individual speech code* as a set of secondary (global) informative differentiation signs defining the individual quality of the speaker.

## Problem definition

The research problems directly follow the introduced hypotheses:

- research the identification ability of structural signs of vowel elementary segments;
- research the identification ability of an individual speech code;
- if the introduced hypotheses are proved to be true, develop a method for the speaker identification based on limited and distorted speech material.

## Content

In special literature concerning the field of applied linguistics, it is stressed that the problem of informative signs definition appears when the researcher faces “difficult” vocal signals during, for instance, an identification research. This category of speech objects (signals) includes objects characterized in particular by little voice information (for example, 1 to 3 seconds), various range of distortion (for example, the objects are recorded from different transmitting channels). The inefficiency of the “traditional” *spectral* signs base causes the search for new, non-trivial signs.

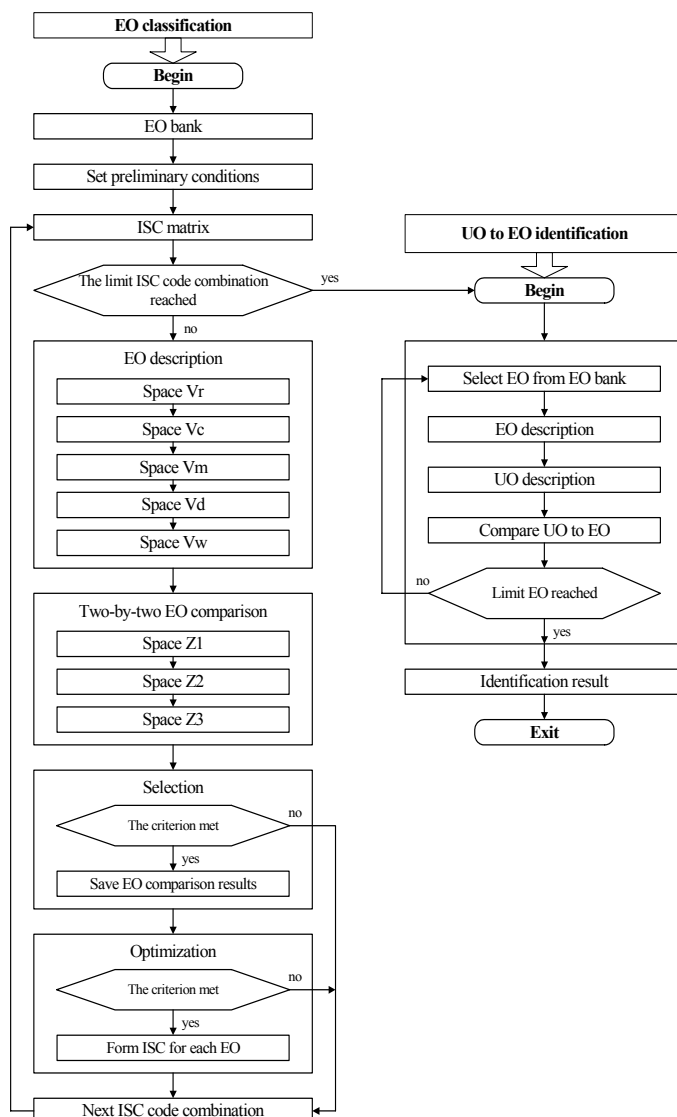
Table 1 Functional description of ISC digits

Space	Digit #	Digit function	Digit value						
			0	1	2	3	4	5	6
Vr	0	constructive line k1 position	"0"	"2"	"4"	-	-	-	-
	1	constructive line k2 position	"0"	"2"	"4"	"-2"	"-4"	-	-
	2	constructive line k3 position	"0"	"2"	"4"	-	-	-	-
	3	constructive line h1 position	"0"	"2"	"4"	-	-	-	-
	4	constructive line h2 position	"0"	"2"	"4"	"-2"	"-4"	-	-
	5	constructive line h3 position	"0"	"2"	"4"	-	-	-	-
	6	number of windows in constructive part	"2"	"4"	"6"	"8"	-	-	-
Vc	7	exclusion of constructive part	"A"	"B"	"C"	"D"	"E"	"F"	-
	8	exclusion of constructive part signs	"I"	"S"	"JS"	-	-	-	-
Vm	9	signs transformation ("a" – by rows, "b" – by columns)	"a"	"b"	"ab"	-	-	-	-
	10	transformation rule ("s" – subtraction, "d" – division)	"s"	"d"	"sd"	-	-	-	-
Vd	11	normalization rule ("l" – "by length", "h" – "by height")	"l"	"h"	"lh"	-	-	-	-
	12	value of normalization coefficient "l"	"4"	"6"	"8"	"10"	"15"	"20"	"25"
	13	value of normalization coefficient "h"	"2"	"4"	"6"	"8"	"10"	"15"	-
Vw	14	signs transformation rule (subtraction min, ranking) ("s" – subtraction, "d" – division)	"s"	"d"	"sd"	-	-	-	-
Z1	15	setting sound fragment for comparison	"1"	"1/2"	-	-	-	-	-
	16	value of closeness measure $\epsilon^1$	"10"	"20"	"30"	"40"	"50"	-	-
Z2	17	value of closeness measure $\epsilon^2$	"10"	"20"	"30"	"40"	"50"	-	-
Z3	18	value of closeness measure $\epsilon^3$	"10"	"20"	"30"	"40"	"50"	-	-

The "-" mark means that "the value is not used in the code combination digit".

What is the novelty and peculiarity of our signs? According to their quality the introduced identification signs are characterized as multilevel interconnected signs that make a so called (according to the accepted terminology) *individual speech code* (ISC). We fill the ISC notion with the following meaning:

1. ISC represents an information structure complementary to the voice signal properties, which define the individual vocal features of the speaker.
2. ISC is the basis for the classification of etalon speech objects and speaker identification.
3. A digital decimal combination of ISC code is assigned to a particular etalon object during the adaptation, optimization, and selection procedure.
4. ISC is a code with its every digit representing a pointer to the type of specified speech processing procedures and the conditions of their implementation. From the factual point of view, the procedure types and the conditions of their implementation are realized as separate *subprograms* having their mathematical and logical ground in simple mathematical equations and logical functions (predicates) of mathematical logic.



Pic. 1. Structure functional model scheme.

Thus, to authenticate speech objects as differentiation identification signs, there are individual processing *rules* (*procedures*) that correspond to a specified speech object during the adaptive search; i.e. the identification is not carried out according to the primary signs as accepted in existing identification methods, but is based on the set of individual *optimal rules* selected from a large initial set for each object.

According to the classification accepted in the coding theory, ISC is characterized as a 19-bit uniform code (see table 1).

To prove experimentally the consistency of the introduced hypotheses, we set the following problem: when the identification signs are not exactly, but partly, known a priori, develop an adaptive model able to find the *optimal* identification signs and the rules ensuring the EO set classification between a finite number of classes and identification.

The formalization of an adaptive modelling problem lies in mathematico-logical description of the model stages and uniting them into a single system whole on basis of pattern recognition theory, heuristic analysis, and some ideas of neurophysiology. The model consists of two basic stages: 1) etalon objects classification and 2) identification of the unknown object with the etalon ones. Each stage includes substages involving the execution of specified subprograms (see pic.1)

The EO classification stage is oriented to the definition of the optimal identification signs and rules ensuring the classification

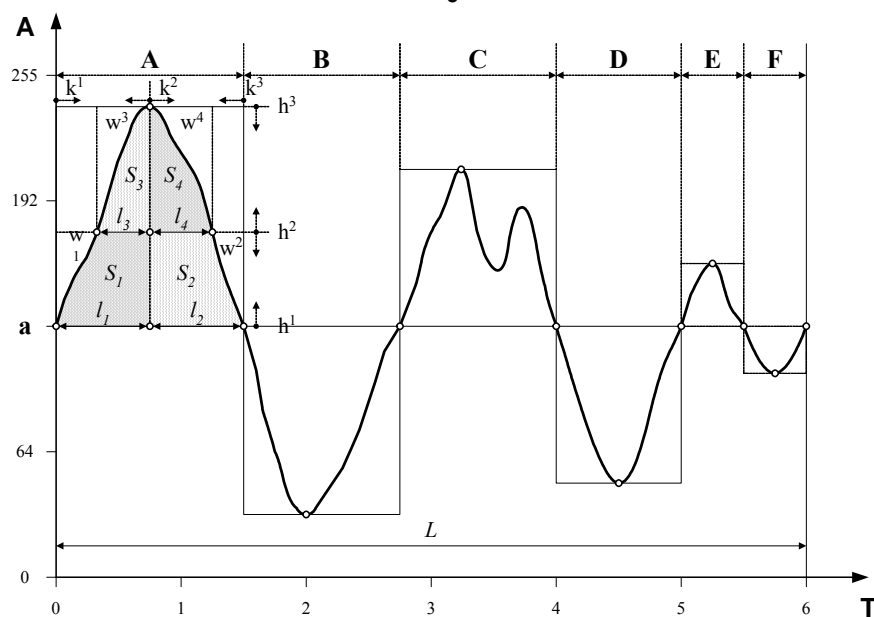
of an EO set. An object is called etalon, because the researcher and, therefore, the model, know beforehand which class the object belongs to. Each EO is an audio file of a special format containing a vowel pronounced by a specific announcer.

To realize the adaptive-coding concept, an *ISC matrix* is introduced. The code matrix is a table of digits and possible digital values of code combinations, among which a specific ISC code combination is selected during the adaptive search.

ISC code combination digits are denoted as  $FG_r(x)$ , where the  $r$  subscript represents the number of the digit,  $x$  – the numerical value of the digit. For example,  $FG_2(3)$  says, “the value of the 2<sup>nd</sup> digit is 3”. The full number of code combinations  $N$  is defined by the following formula:  $N = \prod n(FG_r)$ , where  $n(FG_r)$  is the base of digit  $r$ .

On the EO description stage, the images of all EO are formed. EO description is carried out due to a uniform algorithm and includes several stages (in spaces Vr, Vc, Vm, Vd, Vw), during which the ISC digit functions are realized (see table 1).

In space Vr, the primary description objects are *vowel elementary segments* (VES) [2]. VES is represented as a *geometric* object (see pic. 2). On the acoustic level, we agreed to take analytic geometry elements as primary signs: straight line (chord) and complex plain figure. Such representation (“speech geometry” in a way) and signs definition appeals to the researcher’s intuition and is guided not only by linguistic knowledge, but also by other sciences, like neurophysiology. Forming the primary image means changing the values of *length* and *area* for the mentioned geometric elements that make the *vector* of sign values.



Pic.2. primary VES description in the model.

The abscissa axis (T) shows the time scale (milliseconds). The ordinate axis (A) shows the scale of digital speech signal amplitudes. VES duration (L) is 6 milliseconds.

As shown in pic. 2, VES structure consists of 6 constructive parts: A, B, C, D, E and F. Each of the parts is “divided” into several constructively simpler elements. The “dividing” element is a rectangular window limited by horizontal  $h$  and vertical  $k$  constructive lines. Each window has two geometric structural elements: a complex figure and a horizontal straight line (chord) created by the window dimensions and the VES form. For instance, in constructive part A, four windows are marked:  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  and  $w_4$ ; in window  $w_1$ , the complex figure area  $S_1$  and the chord length  $l_1$  are defined.

In space Vr, the adaptation is realized through the repositioning of constructive lines  $l$  and  $h$ , which directly affects the window dimensions and, therefore, the primary signs [3]. The position of constructive lines is “managed” by the specified ISC digits. Contentwise, the “management” is carried out due to the fact that some of the ISC digital values (see table 1) call corresponding subprograms ensuring adaptive properties of the computer model.

For example,  $FG_3$  executes adaptive function “constructive line h1 position”, its numerical value defines a particular position of this line for corresponding windows of all constructive parts of VES: by  $FG_3(1)$ , constructive line  $h1$  moves 2 units up. The “centerline” value is calculated as maximal number of situations when the speech signal crosses “0” in a “noisy” section.

Since each EO is represented with one vowel formed by a VES sequence, then the description of an EO as a whole is reduced to the description of all VES. As the result of primary description, a square matrix is formed, its rows are the VES vectors, and its columns are the vector coordinates. Considering the  $FG_6$  values, the dimension of each VES is 24 to 96.

During the next modelling stages, there appears a necessity to perform some mathematico-logic operations over the acquired values of primary signs. It depends on the existing values of ISC digits (see table 1):

- in each vector of space  $Vc$ , particular VES constructive parts and  $Vr$  vector coordinates are excluded;
- in space  $Vm$ , according to some rule, the minimal value of the matrix column (row) coordinate is subtracted from (divided by) all coordinates of the same type located in the matrix row (column) in space  $Vc$ ;
- in space  $Vd$ , the  $Vm$  vectors are normalized according to some rule;
- in space  $Vw$ , according to some rules, in each vector of space  $Vd$ , the minimal coordinate value is calculated considering the VES constructive part and the type of structural signs (“S” and “I”); coordinate values are ranked.

EO classification on basis of decision rules is carried out in so called *state spaces*  $Z1$ ,  $Z2$  and  $Z3$ . The classification is carried out due to the two-by-two comparison of all EOs according to the “all-to-all” rule on basis of distance  $d^z$  defined in the normalized metric space, and the values of closeness measures. Distance  $d^z$  between two EOs is calculated according to the following algorithm:

1. Each EO vector of a greater *facility* is in turn compared to all EO vectors of less facility. During the two-by-two EO comparison, each pair of coordinates is threshold confronted: if the distance between coordinates is less than the closeness measure  $\varepsilon^1$ , then the result is assigned logical value “1”, otherwise it is “0”. As a result of one comparison, vector  $Z^1$  is formed, the values of its coordinates belong to the binary set of {0, 1}. As a result of comparing an EO vector of greater facility to all EO vectors of less facility, the  $Z_{\max}$  vector is found (vector  $Z^1$  with the maximal number of “1”s). Comparing all the vectors results in a set of  $Z_{\max}$  vectors.
2. Grounding on the number of “1” coordinates in vectors  $Z_{\max}$ , the dimension and number of vectors  $Z_{\max}$ , one vector  $Z$  is formed. The values of its coordinates belong to the binary set of {0, 1}.  $Z$  coordinates are defined by a threshold comparison of the number of “1” coordinates in vector  $Z_{\max}$  with the dimension of vector  $Z_{\max}$ : if the distance between them is less than the  $\varepsilon^2$  closeness measure, then the result (a  $Z$  coordinate) is assigned a value of “1”, otherwise it is “0”. The dimension of vector  $Z$  is equal to the number of vectors  $Z_{\max}$ .
3. Distance  $d^z$  between two compared EOs is calculated as the result of threshold comparison of the number of “1”  $Z$  vector coordinates and the dimension of vector  $Z$ : if the distance between them is less than the  $\varepsilon^3$  closeness measure, then the result (distance  $d^z$ ) is assigned a value of “1”, otherwise, it is “0”.

Two compared EOs are regarded as *identical*, i.e. belonging to the same EO class, if distance  $d^z$  between them is “1”; if it is “0”, then the EOs are *not identical*.

The objective of the “Selection” stage is finding the *selective* code combinations, i.e. the ISC code combinations containing no classification errors: I and II type errors [2] (in a different interpretation, they are “target omission” and “decoy lock-on”). If an EO classification provides only the EO identities, then the model saves the results of EO two-by-two comparisons in a table.



The "Optimization" stage is oriented to finding the *optimal* ISC code combinations in the set of *selective* code combinations, and assigning them to the EOs. Code combinations are regarded as *optimal* if they provide the minimal value of optimization criterion for each EO pair.

The model supports various ways of solving the EO classification problem. The adaptive search for optimal solutions is carried out automatically due to the step-by-step modification of the ISC code combination values, and the current model state analysis on basis of the selection and optimization criteria. Within the "EO classification" stage,  $N = 124.002.900.000$  iterations can be carried out. After all the iterations have been carried out, the adaptive search defines the final form of the *optimal* code combination for each EO. This combination makes the EO *individual speech code (ISC)*.

EO characterized by its individual ISC code combination has the following symbolic notation in the model:  $O_i^k (FG_0(x), FG_1(x), \dots, FG_{18}(x))$  or  $O_i^k (x_0, x_1, \dots, x_{18})$ , where  $O$  is the symbolic notation of the object,  $k$  is the EO class number,  $i$  is the EO number,  $x_r$  is the numerical value of digit  $r$ . For example,  $O_{29}^6 (1, 0, 2, 2, 0, 1, 0, 5, 1, 0, 0, 0, 3, 3, 1, 1, 3, 2, 1)$ .

In this model, the identification is carried out according to the "classic" scheme - the "one-to-all" rule. The unknown object (UO) is compared to all EOs in turn. The identification includes 3 essential stages: 1) EO description, 2) UO description and 3) comparing UO with EO by the "one-to-all" rule. The description and comparison on the stage of "Identification" are similar to those of the "EO classification" with the only difference: the comparison and identification of UO with EO is carried out due to the rules that correspond to the values of the ISC code combination digits for etalon objects.

For the experimental check up of the model, 190 EOs were selected from the EO bank. Each EO was represented by the only vowel, for example,  $o$  surrounded by  $cl$  in word *cold*. Every fourth vowel was purposely pronounced in a distorted way. Every four vowels were recorded from a different transmitting channel and under different conditions. The identification result was in advance known to the researcher: the researcher knew which class the "unknown" object belonged to. This object was called a *testing object (TO)*. One testing class of objects was represented by 8 TOs. Identification results were the following: the model identified the testing objects as objects that belonged to the corresponding (known in advance) EO classes. When establishing the identity (non-identity) of the UO and EO, no II type errors occurred on the whole EO set.

The method has the following limitations:

1. vowel segmentation to VES is organoleptic (manual);
2. the number of experimental objects is not large;
3. the whole identification process requires much time.

---

## Conclusion

---

The work presents a new solution to the scientific problem of speaker identification relying on the speech parameters. The solution is based on the new knowledge about speech signals, ways of their transformation and further processing. The work shows an empiric research of communicative properties of speech signals and the development complementary ways of analysis.

To complete identification, the speech signal is separated into special relevant fragments, so called vowel *elementary segments*, which are the minimal functional vowel units, objective and regular acoustic micro events.

The primary informative signs are accepted to be the *structural signs* of elementary segments, which are the best to represent regular features of the speaker's speech. The structural signs are defined by the smoothing effect in hearing. This allows refusing the spectral methods of speech description and using the methods describing elementary areas under the signal curve, which completely correspond to the processing method applied in the auditory analyzer.

The ISC-based identification method makes it possible to perform identification research, first, on an extremely limited and distorted speech material and, second, on a set of objects. This raised the reliability and effectiveness of the method, and expanded the area of its application.

---

**References**

---

- [1] *Potapova R.K.* Speech: communication, information, cybernetics. Teaching aid. 3<sup>rd</sup> edition, stereotype. – M.: Editorial USSR, 2003. – 568p.
  - [2] *Bondarenko M.F., Druchenko A.Ya., Shabanov-Kushnarenko Yu.P.* Vowels in theory and experiment. – Kharkov: KNURE, 2002. – 348 p.
  - [3] *Rabotyagov A.V.* Solving the problem of speaker identification by speech parameters on basis of the adaptation and optimization principles // Automated control systems and automatics equipment. Ukrainian interdepartmental scientific and technical collection. Edition 121. – Kharkov: KNURE, 2002. – P. 80-87.
- 

**Authors' Information**

---

**Bondarenko M.F.** – Prof., Rector of Kharkov National University of Radio Electronics  
**Slipchenko M.I.** – Prof., Prorector of Kharkov National University of Radio Electronics  
**Rabotyagov A.V.** – Aspirant of Kharkov National University of Radio Electronics

## MATHEMATICAL MODEL FOR SITUATIONAL CENTER DEVELOPMENT TECHNOLOGY

**V.M. Levykin**

**Extended Abstract:**

As the experience shows there are general systems problems emerging when creating an information-analytical system (IAS) (a situational center - SC) regardless of its complexity [1]. These problems are associated with developers' and customers' functions due to incomplete understanding of both the object domain and the structure (components) of the future system. Among these problems there are: IAS customers definition, functional complexes and problems detection according to the SC activity direction, the customers information requirements when solving managerial problems in accordance with requirements of the functional complex and required resources.

Realization of these problems envisages the development of technology and creation of such a system, which would take into account peculiarities of the object domain in the system structure. Such technology envisages definition of the object domain in the framework of the information resources necessary for the customers with a transition to the functional structure of the system and its enveloping components. Assigning the list and aspect of the output documents (messages), the conditions of their reception according to the offered technology there is a possibility to realize the SC development with the preset parameters as these conditions should be the basis for formation and implementation of the requirements to every covering complex and its elements. It is practically impossible to use classical methods of this technology starting from the specific character of the object domain and peculiarities of the SC being developed. So, the most acceptable approach in this case is the criteria theory use with a further description of the given technology in the form of the composition of the functors [2]. Derivation of the mathematical model of customers' requirements to the functions and the system interface, functional structure, information and hardware-software complex gives the possibility of transition to the element by element development of every complex and the system as a whole.

---

**References**

---

1. Clir J. Systems engineering. Automation of the system problems solution. M.: Radiosviaz. 1990. 544p.
  2. Face K. Algebra: rings, modules, categories. M.: mir, 1997. 688p.
- 

**Author's Information**

---

**Levykin V.M.** – Prof., Doctor, director of Institute Computer Sciences, Kharkov National University of Radio Electronics, [kuzy@kture.kharkov.ua](mailto:kuzy@kture.kharkov.ua)