ОДИН ПОДХОД К РАВНОВЕСИЯМ В ИГРАХ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Сергей Мащенко

Abstract: There are proposed the necessary and sufficiency conditions of the virtual equilibria of games in the conditions of of uncertainties as in clean so in the mixed strategies.

Keywords: Nash's equilibria, a virtual equilibria, an uncertainty.

Введение

Игра в условиях неопределенности, несомненно, являются одной из интересных постановок задачи принятия решений в условиях конфликта. Рассмотрим игру $UG = (Y; X_i, u_i; i \in N)$ в условиях неопределенности, где $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ - для простоты конечное множество из m состояний природы; $N = \{1,2,...,n\}$ - множество из n игроков; X_i - множество стратегий x_i игрока $i \in N$; $u_i(x, y)$ функция выигрыша игрока $i \in N$, которая определена на прямом произведении множества состояний природы Y и множества ситуаций игры $X = \prod_{i \in N} X_i$, т.е. $u_i : Y \times X \to R^1$. Каждый игрок стремится получить по возможности большее значения своей функции выигрыша.

В этой работе развивается один из наиболее привлекательных принципов оптимальности теории игр - равновесие Неша [1] для игры в условиях неопределенности. Следует напомнить, что для детерминированной игры в нормальной форме $(X_i, U_i; i \in N)$ ситуация $x^* = (x_i^*)_{i \in N}$ называется равновесием Неша, если каждый игрок, в отдельности, при выборе стратегии, отличной от x_i^*, получит выигрыш не лучше чем в ситуации равновесия.

Виртуальные равновесия

Поскольку для игры в условиях неопределенности выигрыши игроков зависят от состояния природы и определяются неоднозначно, будем для каждого игрока $i \in N$ рассматривать вектор выигрышей $U_i(x) = (u_i(x, y))_{y \in Y}$ по множеству состояний природы Y. Такая не совсем обычная форма представления вектора связана с тем, что результаты этой работы легко обобщить на случай бесконечных множеств состояний природы. В этом случае вектор-функция $U_i(x) = (u_i(x, y))_{y \in Y}$ будет скалярной функцией $U_i(x, y)$ двух аргументов.

Определим понятие предпочтения. В этой работе будем придерживаться строгой и слабой аксиом Парето.

Интерпретация этих аксиом [2] в условиях неопределенности заключается в следующем. В соответствии с сильной аксиомой Парето говорят, что выигрыш игрока $i \in N$ в ситуации и x' доминирует его выигрыш в ситуации x'' по множеству состояний природы $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ и обозначают это через $U_i(x') \succ U_i(x'')$, если $u_i(x', y) \geq u_i(x'', y)$ для $\forall y \in Y$ и хоть одно неравенство строгое, т.е.

$\exists \bar{y} \in Y : u_i(x',\bar{y}) > u_i(x'',\bar{y})$. В соответствии со слабой аксиомой Парето говорят, что выигрыш игрока $i \in N$ в ситуации и x' сильно доминирует его выигрыш в ситуации x'' по множеству состояний природы $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ и обозначают это через $U_i(x') \succ\succ U_i(x'')$, если $u_i(x',y) > u_i(x'',y)$ для $\forall y \in Y$.

Для формализации понятия равновесия игры в условиях неопределенности нам будут необходимы специальные отношения доминирования на множестве ситуаций игры, которые мы назовем отношением доминирования по Нешу и слабым отношением доминирования по Нешу. Будем говорить, что ситуация *x* игры *UG* доминирует по Нешу ситуацию *x '* ($x \overset{NE}{\succ} x'$), которая получается из ситуации *x* изменением, каким-то, но лишь одним игроком, своей стратегии, если: $\exists i \in N : U_i(x_i, x_{N\backslash i}) \succ U_i(x_i', x_{N\backslash i})$. В случае слабого доминирования: $x \overset{NE}{\succ\succ} x' \Leftrightarrow \exists i \in N : U_i(x_i, x_{N\backslash i}) \succ\succ U_i(x_i', x_{N\backslash i})$.

В соответствии с отношением доминирования ($\overset{NE}{\succ}$) на множестве ситуаций *X* определим множество сильных виртуальных равновесий (обозначим его через $SVE(UG)$). Оно будет состоять из ситуаций *x**, которые не доминируются по Нешу ни одной другой ситуацией, т. е. $SVE(UG) = \left\{ x^* \middle| \neg\exists x \in X : x \overset{NE}{\succ} x^* \right\}$.

Аналогично определяется множество слабых виртуальных равновесий $WVE(UG) = \left\{ x^* \middle| \neg\exists x \in X : x \overset{NE}{\succ\succ} x^* \right\}$.

Рассмотрим подробнее виртуальные равновесия. Обозначим через $SBR_i = \left\{ (x_i, x_{N\backslash i}) \middle| \neg\exists \bar{x}_i \in X_i, U_i(\bar{x}_i, x_{N\backslash i}) \succ U_i(x_i, x_{N\backslash i}), x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash i} \right\}$ множество ситуаций игры *UG*, состоящее из "недоминируемых по множеству состояний природы " ответов $x_i \in X_i$ игрока $i \in N$ на фиксированные наборы $x_{N\backslash i} = (x_j)_{j \in N\backslash\{i\}} \in X_{N\backslash i} = \prod_{j \in N\backslash\{i\}} X_j$ стратегий остальных игроков. Аналогично $WBR_i = \left\{ (x_i, x_{N\backslash i}) \middle| \neg\exists \bar{x}_i \in X_i : U_i(\bar{x}_i, x_{N\backslash i}) \succ\succ U_i(x_i, x_{N\backslash i}), x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash i} \right\}$ - множество ситуаций, состоящее из "сильно недоминируемых по множеству состояний природы " ответов игрока $i \in N$ на фиксированные наборы стратегий остальных игроков. Тогда $SVE(UG) = \bigcap_{i \in N} SBR_i$ и $WVE(UG) = \bigcap_{i \in N} WBR_i$.

Рассмотрим пример виртуального равновесия для следующей игры двух лиц с двумя состояниями природы y_1, y_2:

	A21	A22	A23
A11	(3,3) (1,1)	(4,1) (2,2)	(1,1) (3,3)
A12	(2,2) (1,3)	**(1,3)** **(2,2)**	(2,2) (3,1)
A13	(1,1) (3,3)	(2,2) (2,2)	(3,3) (1,1)

В этом примере: {A11, A12, A13} – множество стратегий первого игрока, {A21, A22, A23} - множество стратегий второго игрока; выигрыши игроков представлены в виде векторов, первая компонента вектора – выигрыш при состоянии природы y_1, вторая компонента - выигрыш при состоянии природы y_2; векторы выигрышей первого игрока представленные в верхних левых углах ячеек таблицы, а второго – в нижних правых углах. Интересная особенность примера - отсутствие равновесий Неша в этой игре при любом фиксированном состоянии природы. По определению виртуального равновесия получим:

$SVE = SBR_1 \cap SBR_2 =$ {(A11,A21), (A11,A22), (A12,A22), (A13,A22), (A13,A23)} $\bigcap$ {(A11,A23), (A12,A21), (A12,A22), (A12,A23), (A13,A21)} = {(A12,A22)}.

Условия виртуального равновесия

Рассмотрим условия виртуального равновесия, что не основываются на специальных свойствах множеств стратегий и функций выигрыша игроков. Сначала рассмотрим условие слабого виртуального равновесия.

Обозначим через $S = \sum_{i \in N} \sup_{x \in X, y \in Y} u_i(x,y)$ верхнюю границу суммы функций выигрыша всех игроков и будем не ограничивая общности считать функции выигрыша игроков $u_i(x,y) > 0, \forall x \in X, \forall y \in Y, i \in N$.

Теорема 1. Ситуация x^* будет слабым виртуальным равновесием тогда и только тогда, когда существуют векторы параметров $\mu_i \in M_i = \left\{ \mu_i = (\mu_i(y))_{y \in Y} \middle| \sum_{y \in Y} \mu_i(y) = S; \mu_i(y) \ge 0,\ y \in Y \right\}, i \in N$ такие, что ситуация x^* будет равновесием Неша в параметрической игре $G(\mu) = (X_i, \min_{y \in Y}(u_j(x,y) - \mu_i(y)); i \in N)$.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть x^* - равновесие Неша в параметрической игре $G(\overline{\mu})$ при некоторых значениях векторов параметров $\overline{\mu}_i \in M_i$, $i \in N$. Отсюда следует, что для $\forall i \in N$: $\min_{y \in Y}(u_j(x_i, x^*_{N\setminus i}, y) - \overline{\mu}_i(y)) \le \min_{y \in Y}(u_j(x^*, y) - \overline{\mu}_i(y)) \le u_i(x^*, y) - \overline{\mu}_i(y),\ \forall y \in Y$, $\forall x_i \in X_i$ поэтому $\forall i \in N, \forall x_i \in X_i$ существует $\overline{y} \in Y$, что $u_i(x_i, x^*_{N\setminus i}, \overline{y}) \le u_i(x^*, \overline{y})$. Следовательно $\neg \exists x = (x_i, x^*_{N\setminus i}) \in X : x \overset{NE}{\succ\succ} x^*$. Отсюда $x^* \in WVE(UG)$.

Докажем необходимость. Для этого возьмем векторы $\overline{\mu}_i = (\overline{\mu}_i(y))_{y \in Y}$, $i \in N$ с компонентами $\overline{\mu}_i(y) = u_j(x^*, y) * S \Big/ \sum_{y \in Y} u_l(x^*, y)$, $i \in N$. Несложно убедиться, что $\overline{\mu}_i \in M_i$, $i \in N$. Из того, что x^* - слабое виртуальное равновесие следует, что $\neg \exists x \in X : x \overset{NE}{\succ\succ} x^*$, т.е. $\forall i \in N,\ \forall x_i \in X_i,\ \exists \overline{y} \in Y : u_i(x_i, x^*_{N\setminus i}, \overline{y}) \le u_i(x^*, \overline{y})$, а значит $u_i(x_i, x^*_{N\setminus i}, \overline{y}) - \overline{\mu}_i(\overline{y}) \le u_i(x^*, \overline{y}) - \overline{\mu}_i(\overline{y})$. Поскольку для $\forall i \in N$ значение $u_i(x^*, \overline{y}) - \overline{\mu}_i(\overline{y}) = 1 - S \Big/ \sum_{y \in Y} u_i(x^*, y), \forall \overline{y} \in Y$, то для $\forall x_i \in X_i$ справедливо $\min_{y \in Y}(u_j(x_i, x^*_{N\setminus i}, y) - \overline{\mu}_i(y)) \le 1 - S \Big/ \sum_{y \in N} u_i(x^*, y) = \min_{y \in Y}(u_i(x^*, y) - \overline{\mu}_i(y))$. Поэтому $x^* \in NE(G(\overline{\mu}))$.

Теорема доказана.

Рассмотрим условия сильного векторного равновесия.

Теорема 2. Ситуация $x^* \in X$ будет сильным виртуальным равновесием тогда и только тогда, когда $\sum_{y \in Y} u_j(x^*, y) = \max\left\{\sum_{y \in Y} u_i(x_i, x^*_{N\backslash i}, y) \middle| u_i(x_i, x^*_{N\backslash i}, y) \geq u_j(x^*, y), y \in Y;\ x_i \in X_i\right\}, \forall i \in N$.

Доказательство. Пусть $x^* \in SVE(UG)$. Тогда $\neg\exists x \in X : x \overset{NE}{\succ} x^*$. Построим усечения множеств стратегий игроков: $X_i^* = \left\{x_i \in X_i \middle| u_i(x_i, x^*_{N\backslash i}, y) \geq u_j(x^*, y),\ y \in Y\right\}$, $i \in N$. Заметим, что $X_i^* \neq \varnothing,\ \forall i \in N$. Предположим противное, что x^* не удовлетворяет условиям теоремы. Тогда $\exists i \in N,\ \exists \bar{x}_i \in X_i^* : \sum_{y \in Y} u_i(\bar{x}_i, x^*_{N\backslash i}, y) > \sum_{y \in Y} u_j(x^*, y)$. Отсюда следует $u_i(\bar{x}_i, x^*_{N\backslash i}, y) \geq u_i(x^*, y), \forall y \in Y$ и $\exists \bar{y} \in Y : u_i(\bar{x}_i, x^*_{N\backslash i}, \bar{y}) > u_i(x^*, \bar{y})$, следовательно $\bar{x} \overset{NE}{\succ} x^*$. Поэтому $x^* \notin SVE(UG)$. Получили противоречие.

Пусть ситуация x^* удовлетворяет условиям теоремы. Предположим противное, что $x^* \notin SVE(UG)$. Тогда $\exists i \in N$, для которого $\exists \bar{x} = (\bar{x}_i, x^*_{N\backslash i}) \in X$, что $\bar{x} \overset{NE}{\succ} x^*$, т.е. $u_i(\bar{x}_i, x^*_{N\backslash i}, y) \geq u_i(x^*, y), \forall y \in Y$ и $\exists \bar{y} \in Y : u_i(\bar{x}_i, x^*_{N\backslash i}, \bar{y}) > u_i(x^*, \bar{y})$. Суммируя эти неравенства по $y \in Y$, получим: $\sum_{y \in Y} u_j(\bar{x}_i, x^*_{N\backslash i}, y) > \sum_{y \in Y} u_j(x^*, y)$. А поскольку $\bar{x}_i \in X_i^*$, $i \in N$, то приходим к противоречию. Теорема доказана.

Виртуальные равновесия в смешанных стратегиях

Как равновесия Неша в классических играх, так и виртуальные равновесия в играх в условиях неопределенности, к сожалению, не всегда существуют даже в случае конечных множеств стратегий игроков. Одним из известных [1] радикальных приемов найти им “замену” в классических играх является изменение условий игры. Игрокам предлагается принимать решение опосредовано, используя специально построенный тотализатор, который реализует случайный выбор стратегий по определенным распределениям вероятностей на множестве стратегий. Эти распределения вероятностей называют смешанными стратегиями.

Рассмотрим смешанное расширение игры в условиях неопределенности с целью построения виртуальных равновесий. Для простоты будем считать множества стратегий игроков конечными.

Будем говорить, что игра $MUG = \langle Y; M_i, \bar{u}_i; i \in N \rangle$ является смешанным расширением игры *UG*, если: множество смешанных стратегий i – го игрока

$$M_i = \{\mu_i = \mu_i(x_i)_{x_i \in X_i} \big| \mu_i(x_i) \geq 0,\ x_i \in X_i;\ \sum_{x_i \in X_i} \mu_i(x_i) = 1\};$$

- смешанные стратегии: $\mu_i = \mu_i(x_i)_{x_i \in X_i}$ (дискретные распределения вероятностей на множестве стратегий i – го игрока, которые мы будем представлять векторами, состоящими из $|X_i|$ компонент);
- смешанные ситуации игры: $\mu = (\mu_i)_{i \in N}$ - элементы множества смешанных ситуаций игры $M = \prod_{i \in N} M_i$;

- вектор-функция математического ожидания выигрыша I –го игрока - $\overline{U}_i(\mu)=(\overline{u}_i(\mu,y))_{y\in Y}$, где $\overline{u}_i(\mu,y)=\sum_{x\in X}u_i^j(x,y)\prod_{k\in N}\mu_k(x_k)$ - математическое ожидание выигрыша i – го игрока при состоянии природы $y\in Y$.

Для упрощения изложения иногда будем выделять в $\overline{u}_i(\mu,y)$ смешанную стратегию i – го игрока. Для этого сделаем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\overline{u}_i(\mu,y)&=\sum_{x\in X}u_i(x,y)\prod_{k\in N}\mu_k(x_k)=\sum_{x_i\in X_i}\mu_i(x_i)(\sum_{x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus i}}u_i(x_i,x_{N\setminus i},y)\prod_{k\in N\setminus i}\mu_k(x_k))=\\&=\sum_{x_i\in X_i}v_i(x_i,\mu_{N\setminus i},y)\mu_i(x_i)=\left\langle b_i(\mu_{N\setminus i},y),\mu_i\right\rangle,y\in Y,\ i\in N.\end{aligned}\tag{1}$$

Отметим, что множество стратегий M_i игрока $i\in N$ выпукло и компактно (по определению - это $\left(|X_i|-1\right)$ - мерный единичный симплекс), а функции выигрыша - линейны по каждой переменной μ_i, в отдельности.

Найти виртуальные равновесия в смешанных стратегиях по определению достаточно сложно. Возникает вопрос, а можно ли свести эту задачу к известной? Этот вопрос положительно решается для нахождения как слабых, так и сильных виртуальных равновесий.

Пусть $\left\langle\alpha_i,\overline{U}_i(\mu)\right\rangle$ - линейная свертка вектор-функции математического ожидания выигрыша i – го игрока с вектором коэффициентов $\alpha_i=\left(\alpha_i(y)\right)_{y\in Y}$, которые мы будем считать неизвестными параметрами. Рассмотрим однокритериальную параметрическую игру $MUG(\alpha)=\left(Y;M_i,\left\langle\alpha_i,\overline{U}_i(\mu)\right\rangle;i\in N\right)$. Обозначим множество значений параметров α через

$$A_{\geq 0}=\{\alpha=\left(\alpha_i\right)_{i\in N}=(\alpha_i(y))_{i\in N,y\in Y}:\alpha_i(y)\geq 0,y\in Y;\sum_{y\in Y}\alpha_i(y)=1,i\in N\}.$$

Теорема 3. Множество слабых виртуальных равновесий смешанного расширения игры G совпадает с семейством по параметру $\alpha\in A_{\geq 0}$ равновесий Неша смешанного расширения параметрической игры $MUG(\alpha)$, то есть $WVE(MUG)=\bigcup_{\alpha\in A_{\geq 0}}NE(MUG(\alpha))$.

Доказательство. Покажем сначала включение $\bigcup_{\alpha\in A_{\geq 0}}NE(MUG(\alpha))\subseteq WVE(MUG)$. Зафиксируем некоторое значение $\alpha\in A_{\geq 0}$. Пусть $\mu^*\in NE(MUG(\alpha))$. По определению равновесия Неша, с учетом обозначений (1), имеем: $\forall\mu_i\in M_i,\forall i\in N:\ \sum_{y\in Y}\alpha_i(y)\left\langle b_i(\mu^*_{N\setminus i},y),\mu_i^*\right\rangle\geq\sum_{y\in Y}\alpha_i(y)\left\langle b_i(\mu^*_{N\setminus i},y),\mu_i\right\rangle$. (2)

Предположим противное. Пусть, $\mu^*\notin WVE(MUG)$ тогда $\exists\mu\in M:\mu\overset{NE}{\succ\succ}\mu^*$, т.е. $\exists i\in N$: $\left\langle b_i(\mu^*_{N\setminus i},y),\mu_i\right\rangle>\left\langle b_i(\mu^*_{N\setminus i},y),\mu_i^*\right\rangle,\forall y\in Y$. Просуммируем эти неравенства с коэффициентами $\alpha_i(y)\geq 0:\sum_{y\in Y}\alpha_i(y)=1$, получим: $\exists i\in N:\sum_{y\in Y}\alpha_i(y)\left\langle b_i(\mu^*_{N\setminus i},y),\mu_i\right\rangle>\sum_{y\in Y}\alpha_i(y)\left\langle b_i(\mu^*_{N\setminus i},y),\mu_i^*\right\rangle$, что противоречит условию (2). Следовательно $\mu^*\in WVE(MUG)$.

Докажем включение $WVE(MUG) \subseteq \bigcup_{\alpha \in A_{\geq 0}} NE(MUG(\alpha))$. Пусть $\mu^*(x) \in WVE(MUG)$, следовательно, по определению слабого виртуального равновесия $\neg \exists \mu \in M : \mu \overset{NE}{\succ\succ} \mu^*$, т.е. $\forall i \in N$, $\neg \exists \mu_i \in M_i : \overline{U}_i(\mu_i, \mu^*_{N\setminus i}) \overset{NE}{\succ\succ} \overline{U}_i(\mu^*)$. Другими словами, с учетом обозначений (1), система неравенств: $\langle b_i\ (\mu^*_{N\setminus i}, y), \mu_i \rangle > \langle b_i\ (\mu^*_{N\setminus i}, y), \mu^*_i \rangle, y \in Y$, не будет иметь решений при условии $\mu_i \in M_i$. Поскольку левые части неравенств линейны по μ_i, а поэтому является вогнутыми функциями, то по теореме Фана-Гликсберга-Гоффмана [4] существует такой вектор $\alpha^*_i = (\alpha^*_i(y))_{y \in Y} \geq 0$, что:

$$\sum_{y \in Y} \alpha^*_i(y) \langle b_i\ (\mu^*_{N\setminus i}, y), \mu_i \rangle \leq \sum_{y \in Y} \alpha^*_i(y) \langle b_i\ (y)(\mu^*_{N\setminus i}, y), \mu^*_i \rangle .$$

А это в свою очередь, с учетом обозначений (1) и по определению равновесия Неша означает, что $\mu^* \in NE(MUG(\alpha^*)) \subseteq \bigcup_{\alpha \in A^{\geq 0}} NE(MUG(\alpha))$. Теорема доказана.

Обозначим через $A_{>0} = \{\alpha = (\alpha_i)_{i \in N} = (\alpha_i\ (y))_{i \in N, y \in Y_i} : \alpha_i\ (y) > 0, y \in Y; \sum_{y \in Y} \alpha_i\ (y) = 1, i \in N\}$.

Теорема 4. Множество сильных виртуальных равновесий смешанного расширения игры *UG* совпадает с семейством по параметру $\alpha \in A_{>0}$ равновесий Неша смешанного расширения параметрической игры $MUG(\alpha)$, т.е. $SVE\ (MUG\ ) = \bigcup_{\alpha \in A_{>0}} NE\ (MUG\ (\alpha\ ))$.

Доказательство. Покажем сначала включение $\bigcup_{\alpha \in A_{>0}} NE(MUG(\alpha)) \subseteq SVE(MUG)$. Пусть $\mu^* \in NE(MUG(\alpha))$, при некотором $\alpha \in A_{>0}$. По определению равновесия Неша, с учетом обозначений (1), имеем: $\forall \mu_i \in M_i, \forall i \in N$, $\sum_{y \in Y} \alpha_i\ (y) \langle b_i\ (\mu^*_{N\setminus i}, y), \mu^*_i \rangle \geq \sum_{y \in Y} \alpha_i\ (y) \langle b_i\ (\mu^*_{N\setminus i}, y), \mu_i \rangle$. (3)

Предположим противное. Пусть $\mu^* \notin SVE(MUG)$, тогда $\exists \mu \in M : \mu \overset{NE}{\succ} \mu^*$, т.е.

$$\exists i \in N : \begin{cases} \langle b_i\ (\mu^*_{N\setminus i}, y), \mu_i \rangle \geq \langle b_i\ (\mu^*_{N\setminus i}, y), \mu^*_i \rangle, \forall y \in Y, \\ \exists \overline{y} \in Y : \langle b_i\ (\mu^*_{N\setminus i}, \overline{y}), \mu_i \rangle > \langle b_i\ (\mu^*_{N\setminus i}, \overline{y}), \mu^*_i \rangle . \end{cases}$$

Просуммируем эти неравенства с коэффициентами $\alpha_i\ (y) > 0$, получим: $\sum_{y \in Y} \alpha_i\ (y) \langle b_i\ (\mu^*_{N\setminus i}, y), \mu_i \rangle > \sum_{y \in Y} \alpha_i\ (y) \langle b_i\ (\mu^*_{N\setminus i}), \mu^*_i \rangle$, что противоречит условию (3). Следовательно $\mu^* \in SVE(MUG)$.

Докажем включение $SVE(MUG) \subseteq \bigcup_{\alpha \in A_{>0}} NE(MUG(\alpha))$. Пусть $\mu^* \in SVE(MUG)$, поэтому по определению сильного виртуального равновесия $\neg \exists \mu \in M : \mu \overset{NE}{\succ} \mu^*$, т.е. $\forall i \in N, \neg \exists \mu_i \in M_i : \overline{U}_i(\mu_i, \mu^*_{N\setminus i}) \succ \overline{U}_i(\mu^*)$. Другими словами, с учетом обозначений (1), для $\forall i \in N$, система линейных неравенств:

$$\begin{cases} \sum_{x_i \in X_i} v_i(x_i, \mu^*_{N\setminus i}, y)\mu_i(x_i) \ge \sum_{x_i \in X_i} v_i(x_i, \mu^*_{N\setminus i}, y)\mu^*_i(x_i), \forall y \in Y, \\ \exists \bar{y} \in Y : \sum_{x_i \in X_i} v_i(x_i, \mu^*_{N\setminus i}, \bar{y})\mu_i(x_i) > \sum_{x_i \in X_i} v_i(x_i, \mu^*_{N\setminus i}, \bar{y})\mu^*_i(x_i), \end{cases}$$

при условии $\sum_{x_i \in X_i} \mu_i(x_i) = 1;\ \mu_i(x_i) \ge 0,\ x_i \in X_i$, будет несовместной.

Пусть $X_i^* = \{x_i \big| \mu_i^*(x_i) = 0\}$ - множество чистых стратегий i – го игрока, вероятность выбора которых по смешанной стратеги $\mu*_i$ равняется нулю. Тогда при условии

$$\sum_{x_i \in X_i} \mu_i(x_i) = 0;\ \mu_i(x_i) \ge 0,\ x_i \in X_i^* \tag{4}$$

будет несовместной система линейных неравенств:

$$\begin{cases} \sum_{x_i \in X_i} v_i(x_i, \mu^*_{N\setminus i}, y)\mu_i(x_i) \ge 0, \forall y \in Y, \\ \exists \bar{y} : \sum_{x_i \in X_i} v_i(x_i, \mu^*_{N\setminus i}, \bar{y})\mu_i(x_i) > 0, \end{cases} \tag{5}$$

Действительно, если допустить противное, что смешанная стратегия μ_i является ее решением, то легко удостовериться подстановкой, что смешанная стратегия $\tilde{\mu}_i = \mu_i^* + \varepsilon\mu_i$, $\varepsilon > 0$, будет образовывать ситуацию $(\tilde{\mu}_i, \mu^*_{N\setminus i}) \overset{NE}{\succ} \mu*$, что противоречит условию $\mu^* \in SVE(MUG)$.

Из несовместности систем линейных неравенств (4),(5) по теореме Таккера об альтернативе для систем линейных неравенств [5] следует существование векторов $\alpha_i = (\alpha_i(y))_{y \in Y} > 0$; $\lambda_i = \lambda_i(x_i)_{x_i \in X_i} \ge 0$ и произвольного числа λ_i^0 таких, что выполняются равенства:

$$\sum_{y \in Y} \alpha_i(y) v_i(x_i, \mu^*_{N\setminus i}, y) = \lambda_i^0 - \lambda_i(x_i),\ x_i \in X_i^* \tag{6}$$

$$\sum_{y \in Y} \alpha_i v_i(x_i, \mu^*_{N\setminus i}) = \lambda_i^0,\ x_i \in X_i \setminus X_i^* \tag{7}$$

$$\lambda_i^0(1 - \sum_{x_i \in X_i} \mu_i^*(x_i)) + \sum_{x_i \in X_i} \lambda_i(x_i)\mu_i^*(x_i) = 0\,. \tag{8}$$

Пусть μ_i- произвольная смешанная стратегия i – го игрока. Запишем произведение каждого равенства (6),(7) с $\mu_i(x_i) - \mu_i^*(x_i)$, возьмем их сумму по $x_i \in X_i$ и с помощью (8) оценим правую часть полученного равенства:

$$\sum_{x_i\in X_i}(\mu_i(x_i)-\mu_i^*(x_i))\left(\sum_{y\in Y}\alpha_i\,(y)v_i\,(x_i,\mu^*_{N\setminus i},y)\right)=\sum_{x_i\in X_i^*}(\mu_i(x_i)-\mu_i^*(x_i))(\lambda_i^0-\lambda_i(x_i))+$$
$$\sum_{x_i\in X_i\setminus X_i^*}(\mu_i(x_i)-\mu_i^*(x_i))\lambda_i^0=\sum_{x_i\in X_i}(\mu_i(x_i)-\mu_i^*(x_i))\lambda_i^0-\sum_{x_i\in X_i^*}(\mu_i(x_i)-\mu_i^*(x_i))\lambda_i(x_i)=$$
$$=\lambda_i^0-\sum_{x_i\in X_i}\mu_i^*(x_i)\lambda_i^0+\sum_{x_i\in X_i^*}\mu_i^*(x_i)\lambda_i(x_i)-\lambda_i^0+\sum_{x_i\in X_i}\mu_i(x_i)\lambda_i^0-\sum_{x_i\in X_i^*}\mu_i(x_i)\lambda_i(x_i)=$$
$$=\sum_{x_i\in X_i}(1-\mu_i^*(x_i))\lambda_i^0+\sum_{x_i\in X_i^*}\mu_i^*(x_i)\lambda_i(x_i)-\sum_{x_i\in X_i}(1-\mu_i(x_i))\lambda_i^0-\sum_{x_i\in X_i^*}\mu_i(x_i)\lambda_i(x_i)=$$
$$=-\sum_{x_i\in X_i}(1-\mu_i(x_i))\lambda_i^0-\sum_{x_i\in X_i^*}\mu_i(x_i)\lambda_i(x_i)=-\sum_{x_i\in X_i^*}\mu_i(x_i)\lambda_i(x_i)\le 0.$$

Последние соотношения следуют из условия: $\sum_{x_i\in X_i}\mu_i(x_i)=1;\ \mu_i(x_i)\ge 0,\ x_i\in X_i$. Поэтому с учетом обозначений (1), имеем: $\forall i\in N$, $\sum_{y\in Y}\alpha_i\,(y)\left\langle b_i\,(y)(\mu^*_{N\setminus i}),\mu_i^*\right\rangle\ge\sum_{y\in Y}\alpha_i\,(y)\left\langle b_i\,(y)(\mu^*_{N\setminus i}),\mu_i\right\rangle,\forall\mu_i\in M_i$.

Отсюда по определению равновесия Неша [1], имеем: $\mu^*\in NE(MUG(\alpha))\subseteq\bigcup_{\alpha\in A_{>0}}NE(MUG(\alpha))$.

Доказанные выше теоремы, дают возможность сформулировать следующее важное следствие.

Следствие (о существовании виртуальных равновесий в смешанных стратегиях). Если множества $X_i,i\in N$ “чистых стратегий” конечны, то в смешанном расширенные игры в условиях неопределенности множество слабых виртуальных равновесий включает в себя множество сильных виртуальных равновесий и они являются непустыми подмножествами множества смешанных ситуаций игры MUG, т.е. $WVE(MUG)\supseteq SVE(MUG)\ne\varnothing$.

Доказательство. Включение $WVE(MUG)\supseteq SVE(MUG)$ элементарно следует из определений множеств слабых и сильных виртуальных равновесий. Из этого включения следует, что для доказательства теоремы достаточно рассмотреть множество $SVE(MUG)$. Поскольку по теореме 4, $SVE\,(MUG\,)=\bigcup_{\alpha\in A_{>0}}NE\,(MUG\,(\alpha\,))$, то рассмотрим игру $GM\,(\alpha\,)=\left\langle M_i,\sum_{y\in Y}\alpha_i\,(y)\bar{u}_i\,(\mu,y)\,;i\in N\right\rangle$ при любых: $\alpha_i\,(y)>0,y\in Y,i\in N$. Поскольку множества стратегий игроков M_i выпуклы и компактны (по определению, они является $(|X_i|-1)$ - мерные единичные симплексы), а функции выигрыша игроков линейны по каждой отдельной вероятности $\mu_i(x_i)$, $x_i\in X_i$, и непрерывны на множестве смешанных ситуаций игры $M=\prod_{i\in N}\mu_i$ (линейная свертка линейных по каждой отдельной вероятности функций), то игра $MUG\,(\alpha\,)$ удовлетворяет условиям теоремы Неша [1], а, следовательно, для нее существует не пустое компактное множество равновесий Неша. Отсюда следует, что множество $SVE(MUG)\ne\varnothing$.

Заключение

В заключение следует отметить, что приведенные выше условия сильного виртуального равновесия существенно проигрывают в плане конструктивности условиям слабого векторного равновесия, поскольку при построении множества сильных виртуальных равновесий надо заранее знать значения выигрышей игроков. В случае же слабого векторного равновесия, проверка условий сводится к игровой задаче, что позволяет более гибко использовать теорему 2 для решения прикладных задач. С другой стороны, сильная аксиома Парето, на которой базируется понятие сильного виртуального равновесия, имеет более широкий спектр применения на практике, чем слабая аксиома Парето, что сужает круг задач, в которых, может быть использована концепция слабого виртуального равновесия.

Проведенное исследование смешанного расширения игры в условиях неопределенности дает конструктивный подход, как для нахождения, так и для более глубокого изучения свойств виртуальных равновесий.

Ссылки

[1] Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. –М.: Мир, 1985. [2] Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. –М.: Наука, 1982. [3] Mangasarian O.J. Nonlinear programming. New York-London: MeGraw-Hill, 1969. [4] Рокафелар Р. Выпуклый анализ.М: Мир, 1973.

Информация об авторе

Мащенко Сергей Олегович – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Доцент; Проспект академика Глушкова, 6, Киев – 207, Украина; e-mail: msomail@yandex.ru