КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РЮКЗАКЕ

Татьяна Пермякова, Владимир Морозенко

Аннотация: *Статья посвящена решению проблем применимости генетического алгоритма для решения задачи о рюкзаке и описанию комбинированного метода для решения этой задачи, включающей в себя улучшение решения, полученного в результате работы генетического алгоритма, при использовании идей, составляющих основу метода ветвей и границ. Результаты проведенного тестирования показывают, что разработанный метод характеризуется достаточно высокой степенью точности.*

Keywords: *задача о рюкзаке, генетический алгоритм, метод ветвей и границ.*

ACM Classification Keywords: *F.2 Analysis of Algorithms and Problem Complexity: F.2.1 Numerical Algorithms and Problems, G.2 Discrete Mathematics G.2.1 Combinatorics, G.1.6 Optimization, I.2 Artificial Intelligence: I.2.8 Problem Solving, Control Methods, and Search - Heuristic methods.*

Введение

Задача о рюкзаке – это одна из классических задач дискретной оптимизации. Пусть имеется множество предметов, каждый из которых имеет определенную стоимость и вес. Требуется составить такой набор этих предметов, который имел бы суммарную стоимость, максимально возможную среди всех наборов, чей суммарный вес не превосходит заданной величины – вместимости рюкзака. Более точно, пусть $c_i > 0$ и $a_i > 0$ – соответственно стоимость и вес i-го предмета, где $i = 1,2,3,\ldots,n$, а n – число предметов. Требуется найти такой булев вектор $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, чтобы была максимальной сумма

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \ ,$$

и выполнялось неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le P \ ,$$

где $P > 0$ – вместимость рюкзака.

К этой задаче часто сводятся практические проблемы, касающиеся поиска оптимального распределения некоторого ресурса при наличии ряда ограничивающих факторов. Задача о рюкзаке, как и многие оптимизационные комбинаторные задачи, принадлежит к классу *NP*-полных задач [Сигал, 2003]. Её можно решить полным перебором всех допустимых вариантов заполнения рюкзака имеющимися предметами, однако при больших массивах входных данных такой переборный алгоритм практически неприемлем, поскольку имеет экспоненциальную сложность относительно длины входа. Если же применить идеи «метода ветвей и границ», то в большинстве случаев объем перебираемых вариантов можно сократить. Подобные алгоритмы с ограниченным перебором могут иметь неплохую сложность в среднем, но в худшем случае все равно остаются экспоненциальными. Поэтому на практике часто используют различные модификации «жадного» алгоритма, который имеет полиномиальную сложность, что и является его основным достоинством. Главный же недостаток «жадного» алгоритма в том, что он не всегда находит правильное решение. В этом смысле его можно отнести к классу приближенных алгоритмов.

В задаче о рюкзаке требуется найти максимум функционала – суммарной стоимости положенных в рюкзак предметов. Пространство поиска при этом ограничивается дискретным множеством всех допустимых вариантов заполнения рюкзака, число которых может достигать величины 2^n, где n – количество предметов. Все эти особенности рассматриваемой задачи позволяют воспользоваться для её решения генетическим алгоритмом. Такой алгоритм при разумном кодировании допустимых решений, как известно, может оказаться вполне эффективным [Вороновский, 1992]. Однако его тоже следует отнести к классу приближенных алгоритмов, поскольку он не всегда дает оптимальный вариант заполнения рюкзака.

Одна из основных причин получения неправильного ответа в результате работы генетического алгоритма заключается в возможной преждевременной сходимости алгоритма. Это случается, когда все особи, образующие очередную популяцию, оказываются сгруппированными в «окрестности» локального экстремума целевой функции, и при этом никакие усилия операторов скрещивания, мутации и отбора не приводят к «смещению» наиболее приспособленных особей в «направлении» искомого оптимального решения, доставляющего глобальный экстремум целевой функции. Увеличение числа популяций также не дает ожидаемого эффекта, а существенное увеличение их численности мало будет отличаться от метода полного перебора вариантов. В данной работе предпринята попытка избежать преждевременной сходимости генетического алгоритма за счет использования идей метода «ветвей и границ».

Генетический алгоритм

При разработке генетического алгоритма для решения задачи о рюкзаке необходимо ответить на следующие вопросы [Рутковская, 2004]:

1. Каким образом в хромосоме будет закодировано допустимое решение?
2. Как вычислять функцию приспособленности особи?
3. Как реализовывать генетические операторы скрещивания и мутации, чтобы полученные в результате их применения особи являлись допустимыми решениями?
4. На каком основании будет происходить формирование новой популяции?
5. Каково условие завершения работы алгоритма?

Применим следующий естественный способ кодирования решения. Изначально все предметы пронумерованы некоторым образом. Каждая хромосома будет представлять собой булев вектор $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, в котором i-й ген (т.е. элемент x_i) равен единице, если i-й предмет положили в рюкзак, и равен нулю в противном случае. Очевидно, что не любой булев вектор $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ указанного вида будет кодировать допустимое решение, поскольку существует ограничение на набор предметов, положенных в рюкзак, обусловленное его вместимостью.

Функция приспособленности (финтесс-функция) особи характеризует степень «близости» этой особи к точному решению задачи. Чем больше значение функции приспособленности особи, тем ближе соответствующее ей решение задачи к искомому максимуму. Приспособленность особи $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ будем вычислять по формуле

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i \ ,$$

т.е. приспособленность особи – это суммарная стоимость предметов, положенных в рюкзак.

При описанном выше способе кодирования допустимых решений возникает проблема, связанная с использованием стандартных генетических операторов скрещивания (кроссовера) и мутации. При применении одноточечного оператора скрещивания из допустимых хромосом родителей может получиться потомок, кодирующий недопустимое решение, т.е. такой булев вектор, для которого суммарный вес выбранных предметов превышает заданную вместимость рюкзака. При использовании обычного оператора мутации из допустимой хромосомы также может получиться хромосома, кодирующая недопустимое решение.

Чтобы избежать этих трудностей предлагается использовать стандартные операторы одноточечного или равномерного кроссовера с последующей коррекцией получаемых хромосом, если это потребуется. Коррекция состоит в том, что в полученной недопустимой хромосоме случайным образом выбираются единичные гены и заменяются нулевыми генами до тех пор, пока не получим допустимую хромосому. Аналогично поступаем и для недопустимых хромосом, получаемых в результате мутации.

Работу генетического алгоритма можно завершить в двух случаях. Во-первых, когда значения фитнес-функции, соответствующие наиболее приспособленной особи в нескольких подряд идущих популяциях, оказались достаточно близки. Например, можно использовать следующее эвристическое правило: завершать работу алгоритма, когда на протяжении последних 50 поколений итераций не изменилась максимальная приспособленность особи популяции. Во-вторых, работу алгоритма можно остановить при достижении заранее выбранного количества поколений.

Комбинированный метод решения задачи

Основным недостатком описанного выше генетического алгоритма является неприятная возможность преждевременного завершения его работы, когда найденное им решение доставляет локальный максимум фитнесс-функции, но не является точкой её глобального максимума. В то же время алгоритмы, основанные на методе ветвей и границ, лишены этого недостатка, поскольку являются точными алгоритмами. Однако они обладают экспоненциальной сложностью, и это ограничивает их возможности при решении задач большой размерности. Что касается генетического алгоритма, то значительное увеличение размерности задачи не так сильно отражается на его вычислительных возможностях.

С учетом указанных достоинств и недостатков этих двух типов алгоритмов предлагается комбинированный подход, сочетающий в себе генетический алгоритм с идеями метода ветвей и границ. Данный подход состоит в том, что сначала применяется генетический алгоритм, а затем найденное им решение улучшается за счет использования метода ветвей и границ.

Пусть с помощью генетического алгоритма был найден некоторый вариант заполнения рюкзака. Он не обязательно является наилучшим. Однако, как и любое решение, получаемое генетическим алгоритмом, оно кодируется в хромосоме строкой $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ из нулей и единиц длины n, где n – количество предметов. Позиции единиц в этой строке определяют номера предметов, положенных в рюкзак. Далее будем считать, что предметы пронумерованы в порядке убывания их удельной ценности (т.е. стоимости единицы веса). Известно, что на практике неплохо работает «жадный» алгоритм полиномиальной сложности, где в рюкзак в первую очередь укладывают наиболее ценные предметы [Гэри, 1982]. Отбросим последние h элементов строки $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$. Получим строку $(y_1,y_2,\ldots,y_{n-h})$, которая соответствует такому варианту заполнения рюкзака, когда все предметы, положенные в рюкзак согласно решению генетического алгоритма, и имеющие номера, большие, чем n-h, удаляются из рюкзака. Вполне вероятно, что полученную укороченную строку $(y_1,y_2,\ldots,y_{n-h})$ можно теперь продлить строкой длины h из нулей и единиц так, чтобы получился новый вариант заполнения рюкзака, имеющий большую суммарную стоимость по сравнению с решением генетического алгоритма ($y_1,y_2,\ldots,y_n$). Более того, используя метод ветвей и границ, можно найти наилучшее продолжение строки ($y_1,y_2,\ldots,y_{n-h}$). Действительно, укороченная строка ($y_1,y_2,\ldots,y_{n-h}$) указывает на предметы, которые уже положены в рюкзак. Это означает, что вместимость той части рюкзака, которая пока ещё остается свободной, уменьшилась ровно на сумму весов предметов, уже положенных в рюкзак. Таким образом можно считать, что у нас имеется новый рюкзак вместимости P' и стоимости C', где

$$P' = P - \sum_{i=1}^{n-h} a_i y_i, \quad C' = \sum_{i=1}^{n-h} c_i y_i .$$

Наша цель – уложить в него часть оставшихся предметов так, чтобы получился вариант заполнения рюкзака максимально возможной стоимости. Иными словами, после работы генетического алгоритма мы свели исходную задачу о рюкзаке к такой же задаче, но с меньшим числом предметов и с рюкзаком меньшей вместимости.

Применим к новой задаче метод ветвей и границ. Будем строить бинарное дерево высоты h, каждой вершине которого соответствует строка длины n из нулей и единиц. Единицы в такой строке указывают на номера предметов, положенных в рюкзак. Корень дерева имеет высоту h, и ему соответствует строка ($y_1,y_2,\ldots,y_{n-h},0,\ldots,0$). Вершине высоты k соответствует строка ($y_1,y_2,\ldots,y_{n-h},z_1,z_2,\ldots,z_{h-k},0,\ldots,0$), а двум её прямым потомкам – строки ($y_1,y_2,\ldots,y_{n-h},z_1,z_2,\ldots,z_{h-k},1,0,\ldots,0$) и ($y_1,y_2,\ldots,y_{n-h},z_1,z_2,\ldots,z_{h-k},0,0,\ldots,0$), где $k = 1,2,3,\ldots,h-1$. Они кодируют два «близких» варианта заполнения рюкзака, которые отличаются лишь тем, что в первом случае рюкзак содержит предмет с номером $n-k$, а во втором – нет. Заметим, что не всякая строка является допустимой, т.е. описывает допустимый вариант заполнения рюкзака с учетом его вместимости. Поэтому вершина, которой соответствует недопустимая строка, не имеет потомков.

Предположим, что вершине высоты k соответствует допустимая строка ($y_1,y_2,\ldots,y_{n-h},z_1,z_2,\ldots,z_{h-k},0,\ldots,0$), где $k = 2,3,\ldots,h$. Вычислим для этой вершины величину перспективности *persp* по формуле

$$persp = \sum_{i=1}^{n-h} c_i \cdot y_i + \sum_{j=1}^{h-k} c_{n-h+j} \cdot z_j + \left(P - \sum_{i=1}^{n-h} a_i \cdot y_i - \sum_{j=1}^{h-k} a_{n-h+j} \cdot z_j \right) \cdot c_{n-k+1} / a_{n-k+1} .$$

Перспективность вершины является ограничением сверху на суммарную стоимость укладки рюкзака, которая может быть найдена в результате достраивания дерева вниз от этой вершины. Более точно, перспективность вершины высоты k равна максимальной стоимости укладки рюкзака, на которую можно рассчитывать, если известно, какие из предметов с номерами 1,2,3,..., $n-k$ уже положены в рюкзак. Перспективность вершины первого уровня, если ей соответствует допустимая строка, вычисляется по формуле

$$Persp = \sum_{i=1}^{n-h} c_i \cdot y_i + \sum_{j=1}^{h-1} c_{n-h+j} \cdot z_j + c_n .$$

Согласно идее метода ветвей и границ описанное бинарное дерево строится постепенно сверху вниз, т.е. от корня к листьям. На каждом шаге построение дерева продолжается из вершины с максимальной величиной перспективности.

Таблица 1. Исходные данные

Номер предмета	1	2	3	4	5	6
Стоимость	5	7	8	6	4	1

Вес	2	3	4	3	2	1
Удельная ценность	5/2	7/3	2	2	2	1

Приведем пример, в котором таким образом удалось улучшить решение, найденное генетическим алгоритмом. Пусть имеется 6 предметов, веса и стоимости которых указаны в таблице 1. Будем считать, что вместимость рюкзака P = 7.

Предположим, что результатом работы генетического алгоритма стала хромосома (101001). Для такой укладки рюкзака суммарный вес уложенных предметов равен 7, а их суммарная стоимость равна 14. Положим параметр h равным 4. Тогда, используя описанный выше комбинированный метод, получим дерево, изображенное на рис. 1.

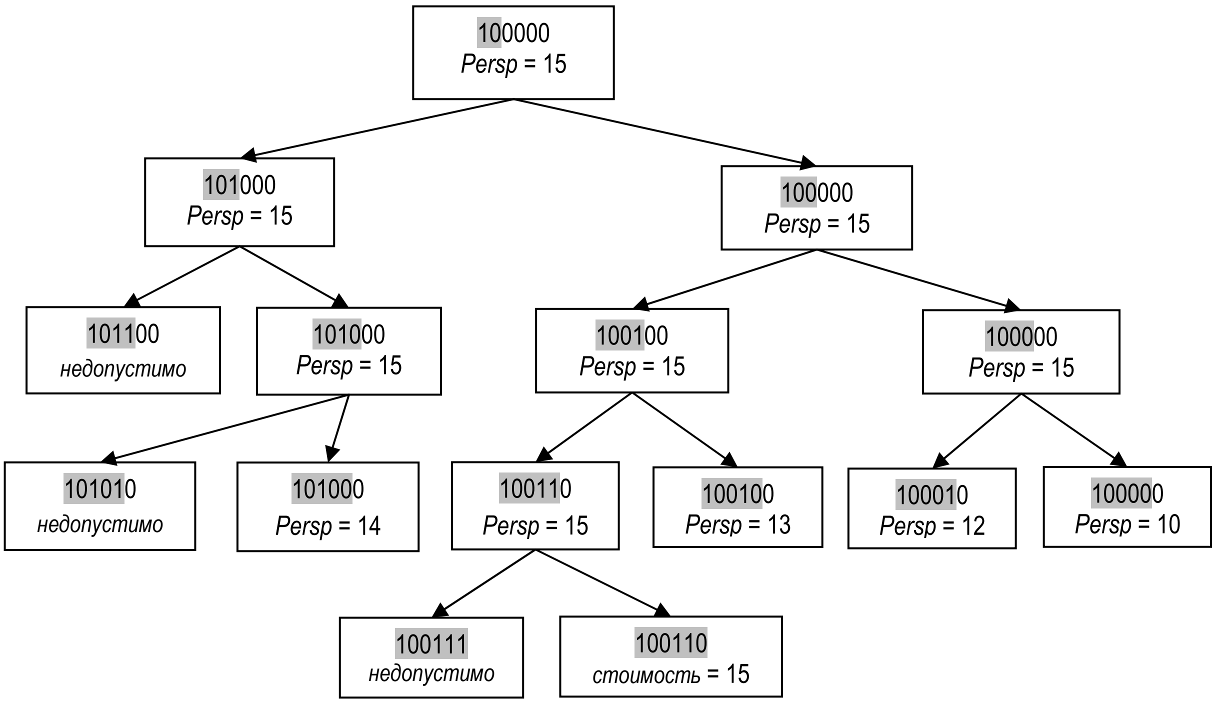

Рис. 1. Дерево, построенное комбинированным методом

Построение дерева начинается с вершины, которой соответствует строка (100000). Она находится на высоте 4, а её перспективность равна 15. Затем строим её потомков на высоте 3, которым соответствуют строки (101000) и (100000). Величины их перспективности также равны 15. Продолжаем строить дерево из вершины (101000). Образуем два её потомка (101100) и (101000) на высоте 2. Первый потомок является недопустимым вариантом заполнения рюкзака, а второй – допустимым с перспективностью 15. Рассматривая его потомков (101100) и (101000), получаем, что один из них кодирует недопустимый вариант заполнения рюкзака, а другой – допустимый с перспективностью 14. Поэтому далее переходим к рассмотрению потомков вершины (100000), расположенной на высоте 3 и т.д. В итоге получаем концевые вершины дерева (101100), (101010), (100111), кодирующие недопустимые варианты заполнения рюкзака, концевую вершину (100110), кодирующую вариант стоимости 15, и вершины (101000), (100100), (100010) и (100000), чья перспективность ниже, чем 15. Следовательно, строка (100110) является «условно лучшим» вариантом заполнения рюкзака (при условии, что предмет с номером 1 будет положен в рюкзак, а предмет с номером 2 – нет). На самом деле «абсолютно лучший» вариант заполнения рюкзака для данной задачи имеет стоимость 16 и кодируется строкой (110010).

Таким образом, используя метод ветвей и границ, в конкретном рассмотренном примере удалось улучшить решение, полученное генетическим алгоритмом. Однако необходимо заметить, что, во-первых, в общем случае такое улучшение возможно лишь при достаточно больших значениях параметра h. Например, нетрудно убедиться, что в рассмотренной задаче решение генетического алгоритма было бы невозможно улучшить, если бы мы выбрали $h < 4$. Во-вторых, найденное улучшенное решение все равно может оказаться не абсолютно лучшим, как это и оказалось в рассмотренном примере. Можно лишь утверждать, что «качество» получаемого решения повышается одновременно с ростом параметра h. В крайнем случае, когда параметр h принимает максимально возможное значение, равное n – числу предметов, предложенный комбинированный метод вообще не использует генетический алгоритм, а с самого начала работает как метод ветвей и границ.

В изложенном комбинированном методе время работы генетического алгоритма пропорционально размеру популяции и числу поколений, и полиномиально зависит от параметра n, а время работы метода ветвей и границ экспоненциально относительно параметра h. Выбирая разные значения этих параметров, можно регулировать время работы алгоритма.

Для оценки качества полученного комбинированного алгоритма случайным образом было сформировано около 100 тестовых примеров с количеством предметов от 100 до 500. В этих тестовых примерах для поиска решения использовались следующие алгоритмы:

1) «жадный» алгоритм (ЖА);
2) генетический алгоритм (ГА);
3) генетический алгоритм с добавлением в начальную популяцию хромосомы, соответствующей решению «жадного» алгоритма (ЖА+ГА);
4) комбинированный метод для улучшения решения генетического алгоритма (КМ).

Решения, полученные указанными выше приближенными методами, сравнивались с точными решениями, полученными в результате работы метода ветвей и границ.

Средние отклонения решений, полученных этими алгоритмами, от точного решения приведены на рис. 2. Отклонение определялось по следующей формуле:

$$E = \frac{A - \tilde{A}}{A} \cdot 100\% ,$$

где A – стоимость точного решения, полученного методом ветвей и границ, $\tilde{A}$ – приближенное решение, являющееся результатом работы одного из перечисленных алгоритмов.

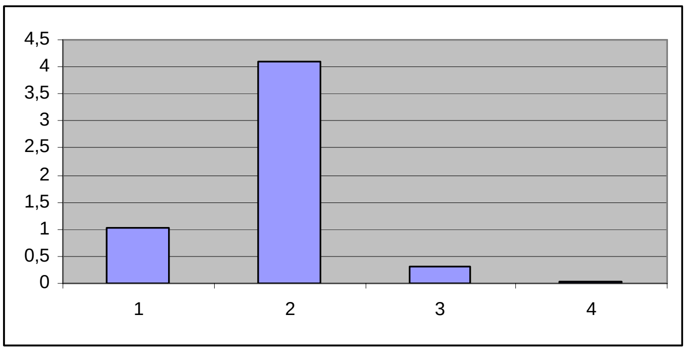

Рис. 2. Отклонение от точного решения (в процентах).
1- ЖА, 2 –ГА, 3 – ЖА+ГА, 4 – КМ

Первый столбец показывает, насколько эффективен «жадный» алгоритм. Второй несет в себе информацию о работе генетического алгоритма, начальная популяция которого сформирована случайным образом. Третий – результат работы генетического алгоритма, в начальную популяцию которого включена хромосома, соответствующая решению, полученному «жадным» алгоритмом. Четвертый показывает насколько результативно применение комбинированного метода для улучшения решения генетического алгоритма. Для тестирования генетического алгоритма использовалась популяция большой численности, а условием остановки алгоритма являлась стабилизация решения, т.е. неизменность лучшей особи на протяжении 50 итераций.

Заключение

Ранее был указан один из существенных недостатков в работе генетического алгоритма – возможная сходимость популяции к точке локального экстремума целевой функции, в результате чего генетический алгоритм выдает неправильный ответ. Снизить вероятность такой преждевременной стабилизации популяции можно было бы путем расширения исследуемой окрестности за счет увеличения числа особей в популяции. Однако в данной работе предложен другой вариант расширения области поиска – применение метода ветвей и границ к вспомогательной задаче о рюкзаке меньшей размерности, возникающей после завершения работы генетического алгоритма и учитывающей результаты его работы.

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что комбинированный метод позволяет быстро найти близкое к точному решение задачи о рюкзаке. Как и ожидалось, улучшение решения, полученного генетическим алгоритмом, происходило при достаточно больших значениях параметра h, причем не всегда найденное улучшенное решение оказывалось правильным. Однако качество окончательных решений можно регулировать за счет выбора параметра h.

Библиографический список

[Вороновский, 1992] Вороновский Г. К. Генетические алгоритмы, искусственные нейронные сети и проблемы виртуальной реальности. – Х.: ОСНОВА, 1992.

[Гэри, 1982] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: МИР, 1982.

[Гук, 2001] Гук А. К. Математическая логика и теория алгоритмов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

[Кормен, 2001] Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. — М.: МЦНМО, 2001.

[Рутковская, 2004] Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы: Пер. с польск. И. Д. Рудинского. – М.: Горячая линия – Телеком, 2004.

[Сигал, 2003] Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

Сведения об авторах

Татьяна Пермякова – Пермский государственный университет, студентка магистратуры кафедры математического обеспечения вычислительных систем; Россия, г. Пермь, 614990, ул. Букирева, д. 15; e-mail: tpermjakova@mail.ru

Владимир Морозенко – Пермский государственный университет, доцент кафедры математического обеспечения вычислительных систем; Россия, г. Пермь, 614990, ул. Букирева, д. 15; e-mail: v.morozenko@mail.ru