ПРОЦЕДУРЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ ВЕКТОРА ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ НЕЧЕТКИХ МОДЕЛЕЙ ВЫБОРА

ЕЛЕНА ПРИСЯЖНЮК

Аннотация: *Рассматриваются процедуры локализации вектора весовых коэффициентов, основанные на представлении функции полезности аддитивной сверткой, адаптированные к нечеткой модели выбора*

Ключевые слова: *нечеткие множества, коэффициенты важности.*

Вступление

Разного рода неопределенности в той или иной степени присущи практически любой ситуации принятия решений, в которой используется экспертная информация. Результаты исследований [Ларичев, 2002; Борисов, 1989] показывают, что особую сложность вызывает необходимость оценивать числовые значения объектов (вариантов, критериев) или дать числовую оценку на шкале отношений между ними. Известно, что использование словесных определений позволяют более надежно выявлять предпочтения ЛПР. Такой подход кажется более оправданным, поскольку в преобладающем числе случаев достаточна приближенная характеристика набора данных и большинство задач, где необходимое применение экспертной информации, не требуют высокой точности.

Оценки экспертов в нечетких моделях выбора описываются функциями принадлежности нечеткому множеству. Сами функции принадлежности могут интерпретироваться различным образом: как “субъективная вероятность”, степень уверенности эксперта в принадлежности объекта к понятию, описываемому нечетким множеством, возможностью его интерпретации этим понятием и так далее.

Выбор характеризуется отношением предпочтения R, суть которого в нечетких моделях состоит в том, что для каждых двух объектов он может указать:

- факт предпочтения объекта α^1 над α^2 . Функция $\mu_R(\alpha^1, \alpha^2)$ в этом случае содержательно интерпретируется как степень уверенности эксперта в том, что α^1 не менее предпочтительный чем α^2 . Причем степени уверенности могут описываться как численно, так и вербально, например лингвистическими переменными «степень уверенности»={очень низкая, низкая, средняя, высокая, очень высокая}. Лингвистическое отношение предпочтения этого типа отвечает ситуациям принятия решений, когда ЛПР сомневается в наличии предпочтений в отношениях тех или иных объектов и поэтому затрудняется их выразить лишь в терминах «да»(определенно доминирует) или «нет» (определенно доминируется);
- силу предпочтения объекта α^1 над α^2. Нечеткое отношение R в данном случае отображает понятие силы предпочтения; при этом в самом факте предпочтения ЛПР уверенно (и в этом смысле его предпочтения являются четкими). Здесь $\mu_R(\alpha^1, \alpha^2)$ может быть интерпретирована как степень, с которой α^1 определенно лучше (предпочтительней) чем α^2.

Проблема оценки объектов в рамках теории полезности сводится к проблеме аксиоматического обоснования и построения его функции полезности. Классические методы, используемые для определения функции полезности, представляющей бинарное отношение предпочтения R

($U(a^1) \geq U(a^2) \Leftrightarrow a^1 R a^2$ для $\forall a^1, a^2 \in A$), в общем случае являются достаточно «жесткими». Основанием для их применения, в частности, служат достаточные условия ее существования, которые задаются, например, теоремой Дебре [Пономаренко, 1994]: отношение предпочтения должно быть полным, рефлексивным, транзитивным и непрерывным), множество решений – связанным. Если условия теоремы Дебре не выполняются и функция полезности, которая представляла бы отношение R, не существует, применение классических методов затруднено.

Предлагается процедура формализации проблемы путем замены нечеткой «векторной оценки полезности» аддитивной сверткой.

Постановка задачи

Пусть А – обычное (четко описанное) множество объектов α ^{j}, $j \in J$, где *J* - множество индексов объектов. Каждый из объектов $a^j \in A$, $j \in J$, характеризуется набором параметров $a^j = (a^j{}_1, ..., a^j{}_i, ..., a^j{}_n)$. Множество индексов параметров объектов обозначим *I*, $I = \{1, ..., n\}$. Каждому объекту, $a^j \in A$, $j \in J$, ставится в соответствие его векторная оценка в пространстве параметров объектов Ω^n.

В дальнейшем будем рассматривать не само множество значений параметров объектов $a^j \in A$, $j \in J$, а соответствующее ему множество $\omega(a^j{}_i)$, $i \in I$, $j \in J$, где ω некоторое монотонное преобразование, которое определяет степень отклонений от оптимальных значений для каждого параметра $a^j{}_i$, $i \in I$, $j \in J$, и преобразует все значения параметров объектов к безразмерному виду в интервале [0,1].

Пусть эксперт последовательно задает свои предпочтения на множестве А в виде нечеткого бинарного отношения предпочтения R.

Предлагается следующий подход к решению задачи: предполагается, что при оценке объекта эксперт (сознательно или неосознанно) имеет в виду его векторную оценку. Если рассматривать «векторную» функцию полезности в виде нечеткой аддитивной свертки, то задача сводится к уточнению весовых коэффициентов свертки (1)-(2):

$$\sum_{i \in I} \rho_i \omega(a_i^1) < \sum_{i \in I} \rho_i \omega(a_i^2) \ , \tag{1}$$

$$\rho = (\rho_1, ..., \rho_n), \ i \in I, \ \rho_i > 0, \ \sum_{i \in I} \rho_i = 1, \tag{2}$$

Где (2) – нормированный вектор относительной важности параметров объектов для утверждения эксперта об отношении нечеткого предпочтения между объектами.

Таким образом, задача состоит в локализации весовых коэффициентов свертки (1)-(2). Подобная задача рассматривалась в [Волошин, 2003], в настоящей работе предлагается обобщение метода для нечетких моделей выбора.

Процедуры локализации вектора весовых коэффициентов

Пусть ЛПР считает, что объект α^1 предпочтительней объекта α^2, а μ – степень предпочтения, $\mu \in [0,1]$. Обозначим это через $\mu_\succ(a^1, a^2)$. Обозначим также $1 - \mu_\succ(a^1, a^2)$ степень предпочтения объекта α^2 над объектом α^1. Введем эвристику: будем считать, что из субъективного суждения ЛПР о предпочтении объекта α [1] над α [2] следует справедливость неравенства (1). Тогда для случая нечеткого отношения предпочтения $\mu_{\succ}\left(a^1,a^2\right)$ между объектами α[1] и α[2] будем считать справедливым:

$$\mu_{\succ}\left(a^1,a^2\right) \Leftrightarrow \sum_{i\in I}\rho_i \frac{\omega(a^1{}_i)}{\mu} \le \sum_{i\in I}\rho_i \frac{\omega(a^2{}_i)}{1-\mu} . \tag{3}$$

Необходимо построить на основе отношений предпочтений на множестве эффективных объектов А, которые последовательно уточняются ЛПР, интервалы допустимых значений весовых коэффициентов параметров объектов (гиперпараллелепипед весовых коэффициентов - ГВК) в виде

$$\rho \in K = \prod_{i\in I}[\rho_i^H,\rho_i^B], \quad \rho = (\rho_i,\ i\in I), \quad 0<\rho_i^H \le \rho_i^B <1, \tag{4}$$

$$\sum_{i\in I}\rho_i = 1, \rho_i > 0, i\in I . \tag{5}$$

Предполагается, что при задании предпочтений ЛПР последовательно в своих суждениях, в частности, задаёт отношения предпочтения между объектами, которые удовлетворяют свойству транзитивности. Поскольку попарное сравнение объектов производится с помощью линейной свертки (1) и ГВК в результате работы предлагаемой процедуры пошагово сужается $(K^{S+1} \subseteq K^S,\ \ s=1,2,...)$, то транзитивность задаваемого бинарного отношения сохраняется.

Для преобразования всех значений параметров объектов a^j_i, $i\in I$, $j\in J$, к безразмерному виду в интервале [0,1] применим формулу:

$$\omega(a^j{}_i) = \frac{a^{opt}{}_i - a^j{}_i}{a^{opt}{}_i - a^0{}_i} , \tag{6}$$

где $\alpha^j_i \in$A, $i\in I$, $j\in J$; $\alpha^{opt}{}_i \in$A, $i\in I$ - наилучшее значение i-го параметра на множестве эффективных объектов: $\alpha^0{}_i \in$A, $i\in I$ - наихудшее значение i-го параметра на множестве эффективных объектов. Будем считать, что α^{opt} и α^0 могут быть заданы непосредственно ЛПР, или найдены как максимальные (минимальные) значения параметров, которые достигаются на множестве допустимых решений.

С учетом (6), обобщенный критерий, который отображает суммарное отклонение j-го объекта, $j\in J$, от оптимальных значений, запишется как

$$D(a^j,a^{opt}) = \sum_{i\in I}\rho_i\omega(a^j{}_i) = \sum_{i\in I}\rho_i \frac{a^{opt}{}_i - a^j{}_i}{a^{opt}{}_i - a^0{}_i}, \quad j\in J .$$

Последняя формула является метрикой близости вектора значений параметров объекта $\alpha^j \in$A, $j\in J$, к некоторому идеальному (оптимальному) вектору значений $\alpha^{opt} = (\alpha^{opt}{}_1, \alpha^{opt}{}_2, \dots \alpha^{opt}{}_n)$, взвешенных в пространстве параметров. Формула (3) для нечеткого отношения предпочтения между объектами $\mu_{\succ}\left(a^1,a^2\right)$запишется в виде

$$\frac{D(a^1,a^{opt})}{D(a^2\ \ ,a^{opt})} = \frac{\sum_{i\in I}\rho_i\omega(a^1{}_i)}{\sum_{i\in I}\rho_i\omega(a^2{}_i)} \le \frac{\mu}{1-\mu} .$$

Последнее неравенство можно интерпретировать таким образом: утверждение “объект α [1] предпочтительней чем объект α [2] со степенью предпочтительности μ” обозначает, что в пространстве параметров объектов точка, которая соответствует объекту α 1 находится ближе к идеальной точке, чем точка, которая соответствует объекту α 2 со степенью $\frac{\mu}{1-\mu}$.

Определение 1. Объекты $a^1 \in A$ и $a^2 \in A$ называются равноценными, если во “взвешенном” пространстве параметров Ω^n, соответствующие им точки находятся на одинаковом расстоянии от точки, соответствующей идеальному объекту.

Определение 2. Объект $a^2 \in A$ называется μ-равноценным объекту $a^1 \in A$, если во “взвешенном” пространстве параметров Ω^n точка

$\omega(a^2)\frac{\mu}{1-\mu} = \left\{\omega(a^2{}_1)\frac{\mu}{1-\mu}, \omega(a^2{}_2)\frac{\mu}{1-\mu}, ..., \omega(a^2{}_n)\frac{\mu}{1-\mu}\right\}$ и точка ω(a^1) равноценны.

Утверждение 1. Весовые коэффициенты параметров $\rho = (\rho_i,\ i \in I)$, соответствующие μ- равноценным объектам, в пространстве предпочтений R^n отделяют уточненные границы интервалов весовых коэффициентов параметров объектов.

Доказательство. Обозначим множества индексов параметров объектов $a^1 \in A$ и $a^2 \in A$ через $I_1 = (i : \omega(a^1{}_i) > \omega(a^2{}_i)) \neq 0$, $I_2 = (i : \omega(a^1{}_i) \leq \omega(a^2{}_i)) \neq 0$, $i \in I = I_1 \cup I_2$. Неравенство (2) можно переписать с учетом уточнения множеств индексов следующим образом:

$$\sum_{\substack{i \in I_1 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^s \omega(a_i^1) + \sum_{\substack{i \in I_2 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^s \omega(a_i^1) \leq \frac{\mu}{1-\mu} \sum_{\substack{i \in I_1 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^s \omega(a_i^2) + \frac{\mu}{1-\mu} \sum_{\substack{i \in I_2 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^s \omega(a_i^2) \ . \tag{7}$$

Тогда условие μ- равноценности объектов α 1 и α 2 запишется как

$$\sum_{\substack{i \in I_1 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^s \omega(a_i^1) + \sum_{\substack{i \in I_2 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^s \omega(a_i^1) = \frac{\mu}{1-\mu} \sum_{\substack{i \in I_1 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^s \omega(a_i^2) + \frac{\mu}{1-\mu} \sum_{\substack{i \in I_2 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^s \omega(a_i^2) . \tag{8}$$

Перейти от (7) к (8) можно, увеличив весовые коэффициенты параметров, которые принадлежат множеству индексов I_1 и, соответственно, уменьшив весовые коэффициенты параметров, которые принадлежат множеству индексов I_2. Таким образом, весовые коэффициенты параметров ρ_i, $i \in I_1$, достигнут своих верхних границ, а весовые коэффициенты параметров, ρ_i, $i \in I_2$, соответственно достигнут своих нижних границ.

Поскольку ω(α $^1{}_i$), ω(α $^2{}_i$), i∈I, являются фиксированными величинами, а $\rho^s_i \in K^s$, то полученное равенство можно записать как

$$\sum_{\substack{i \in I_1 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^{(s)B} \omega(a_i^1) + \sum_{\substack{i \in I_2 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^{(s)H} \omega(a_i^1) = \sum_{\substack{i \in I_1 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^{(s)B} \omega(a_i^2) + \sum_{\substack{i \in I_2 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^{(s)H} \omega(a_i^2) . \tag{9}$$

Распространяя (9) на случай μ- равноценности объектов α 1 и α 2 , получим окончательно

$$\sum_{\substack{i \in I_1 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^{(s)B} \omega(a_i^1) + \sum_{\substack{i \in I_2 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^{(s)H} \omega(a_i^1) = \frac{\mu}{1-\mu} \sum_{\substack{i \in I_1 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^{(s)B} \omega(a_i^2) + \frac{\mu}{1-\mu} \sum_{\substack{i \in I_2 \\ \rho_i^s \in K^s}} \rho_i^{(s)H} \omega(a_i^2) \ , \tag{10}$$

где $\rho^{(s)B}{}_i$, $\rho^{(s)H}{}_i$, $i\in I$, - соответственно верхняя и нижняя границы i-го интервала весовых коэффициентов на s-м шаге алгоритма. Равенство (10) эквивалентно равенству (8).

Таким образом, ГВК на s+1 шаге станет равным

$$K^{s+1}=\prod_{i\in I_1}[\rho_i^{(s)H},\rho_i^{(s+1)B}]\times\prod_{i\in I_2}\left[\rho^{(s+1)H},\rho^{(s)B}\right], \tag{11}$$

Уравнение (9) доказывает справедливость утверждения 1: найденные применением описанного метода весовые коэффициенты действительно определяют границы ГВК.

Поскольку известен лишь факт предпочтения ЛПР, заданный в форме (3), то для определения компонент вектора $\rho=(\rho_i,\ \ i\in I)$, сделаем предположение о справедливости k неравенств вида:

$$\underset{i\in I_1}{\rho_i\omega(a^1{}_i)}+\underset{j\in I_2}{\rho_j\omega(a^1{}_j)}\le\frac{\mu}{1-\mu}(\underset{i\in I_1}{\rho_i\omega(a^2{}_i)}+\underset{j\in I_2}{\rho_j\omega(a^2{}_j)}), \tag{12}$$

где $k=k_1\cdot k_2$; k_1 – количество параметров с индексами *i*, $i\in I_1$; k_2 – количество параметров с индексами *j*, $j\in I_2$.

Очевидно, что выполнение системы неравенств (12) является достаточным условием для выполнения неравенства (7).

Далее перейдем в системе уравнений (12) к равенствам и исключим k-n-1 равенство по правилу: каждый раз исключается равенство, которое доставляет максимум выражению

$$\max((\omega(a^1{}_i)-\omega(a^2{}_i),\ i\in I_1,\ \omega(a^2{}_j)-\omega(a^1{}_j),\ j\in I_2).$$

Последнее условие обозначает, что отбрасываются равенства, которые создают неоправданно большие приращения весов одних параметров объектов за счет других.

Добавим в систему n-1 неравенств вида (12) в качестве n-го равенства условие нормирования весовых коэффициентов (5), перейдем от них к равенствам и, проведя некоторые преобразования, окончательно получим систему n уравнений вида:

$$\underset{i\in I_1}{\rho_i}(\omega(a^1{}_i)-\frac{\mu}{1-\mu}\omega(a^2{}_i))-\rho_j(\underset{j\in I_2}{\frac{\mu}{1-\mu}}\omega(a^2{}_j)-(\omega(a^1{}_i))=0, \tag{13}$$

$$\sum_{i\in I}\rho_i=1,\rho_i>0,i\in I.$$

Из системы уравнений (13) однозначно определяются компоненты вектора весовых коэффициентов $\rho=(\rho_i,\ \ i\in I)$, который по утверждению 1 ограничивает в векторном пространстве R^n интервалы весовых коэффициентов параметров объектов.

С учетом описанного выше очевидна справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2. Условием отсеивания объектов ω^j, $j\in J$, из множества A^s является непринадлежность ГВК вектора, который проходит через начало координат и точку $\omega(\alpha^j)$, $\alpha^j\in A^s$, $j\in J$, то есть $\rho(\omega(a^j))\notin K^{(s+1)}$. Вектор весовых коэффициентов определяется по формуле, приведенной в [4]:

$$\rho=\rho(\omega(a^j))=\{\rho_i:\rho_i=\prod_{\substack{t\in I\\ t\ne i}}\omega(a^j{}_t)/\sum_{\substack{q\in I\\ l\ne q}}\prod_{l\in I}\omega(a^j{}_l)\}.$$

Человеко-машинная процедура определения гиперпараллелепипеда весовых коэффициентов описывается в виде такой последовательности шагов.

Шаг 1. Выделение множества эффективных объектов A^0 из заданного множества объектов А одним из методов, которые приводятся в работе [Волкович, 1993]. Первоначальный ГВК полагается равным единичному гиперкубу.

Шаг 2. Выбор ЛПР двух объектов α^1 и α^2 из множества эффективных объектов A^s в ГВК K^s, s =1,2,... (шаг сужения ГВК) с указанием факта предпочтения или эквивалентности.

Шаг 3.Построение системы уравнений вида (13). Нахождение решения системы уравнений.

Шаг 5. Уточнение границ ГВК по формуле (11). Если гиперкуб $K^{(s+1)}$ удовлетворяет ЛПР, то окончание процедуры. Иначе переход к следующему шагу.

Шаг 6. Выделение множества эффективных объектов $A^{(s+1)}$ ($A^{(s+1)} \subseteq A^{(s)}$) в ГВК $K^{(s+1)}$ и предъявление их ЛПР для выбора очередных двух объектов и указания для них отношения предпочтения. Увеличение номера итерации: s=s+1. Переход к шагу 2.

Выводы

Предложенные процедуры, не требуя полной матрицы парных сравнений объектов, позволяют на множестве нечетких бинарных отношений восстановить функцию полезности эксперта. Отображение вектора весовых коэффициентов в виде интервалов позволяет адекватно представлять уровень неопределенности в нечетких моделях принятия решений.

Библиография

[Ларичев, 2002] Ларичев О.И. Свойства методов принятия решений в многокритериальных задачах индивидуального выбора // Автоматика и телемеханика, № 2, 2002. – С. 146-158.

[Борисов, 1989] Борисов А.Н., Алексеев А.В. и др. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений. – М: Радио и связь, 1989. – 304 с.

[Пономаренко, 1994] Пономаренко О.І. Системні методи в економиці, менеджменті та бізнесі. – К.: Наукова думка, 1994. – 242 с.

[Волошин, 2003] Волошин А.Ф., Гнатиенко Г.Н., Дробот Е.В. Метод косвенного определения интервалов весовых коэффициентов параметров для метризированных отношений между объектами // Проблемы управления и информатики, 2003, № 2.

[Волкович, 1993] Волкович В.Л., Волошин А.Ф., др. Модели и методы оптимизации надежности слождных систем / Под ред. Михалевича В.Ф. – К.: Наукова думка, 1993. – 312 с.

Сведения об авторе

Елена Присяжнюк – Кировоградский педагогический университет имени В.Винниченко, к.т.н., доцент, Кировоград, Украина, e-mail: elena_drobot@ukr.net