АНАЛИЗ И СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ МОДЕЛИ МАРКОВИЦА И НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННОГО МЕТОДА

Юрий Зайченко, Малихах Есфандиярфард

Аннотация: *Рассмотрена задача определения оптимального инвестиционного портфеля в условиях неопределенности. Построена математическая модель задачи с использованием аппарата нечетких множеств. Предложен алгоритм оптимизации нечеткого инвестиционного портфеля. Проведены экспериментальные исследования предложенного метода оптимизации нечеткого инвестиционного портфеля и выполнен сравнительный анализ полученного решения с решением классической задачи Марковича.*

Key words: *portfolio optimization, fuzzy portfolio, Markovitz problem*

Введение

Одной из важнейших задач управления финансовыми активами является задача оптимизации инвестиционного портфеля. Считается, что началом современной теории инвестиций стала вышедшая в 1952 г. статья Г. Марковитца «Выбор портфеля», в который впервые была предложена математическая модель формирования оптимального портфеля ценных бумаг и методы построения таких портфелей при определенных условиях на основе теоретико-вероятностной формализации понятия доходности и риска.

Однако прокатившиеся по всему миру рыночные кризисы 1997-1998 и 2000-2001 года, принесшие только американским инвесторам убытки в 10 триллионов долларов, показали, что существующие теории оптимизации фондовых портфелей и прогнозирования фондовых индексов себя исчерпали, и необходима существенная ревизия методов фондового менеджмента.

Таким образом, в свете явной недостаточности имеющихся научных методов для управления финансовыми активами, потребовалась разработка принципиально новой теории управления финансовыми системами, функционирующими в условиях существенной неопределенности. Большое содействие этой теории оказывает теория нечетких множеств, заложенная около полувека назад в фундаментальных работах Лотфи Заде. В случае применения нечетких чисел к прогнозу параметров от ЛПР требуется не формировать точечные вероятности оценки, а задавать *расчетный коридор* значений прогнозируемых параметров. Тогда ожидаемый эффект оценивается экспертом так же, как нечеткое число со своим расчетным разбросом (степенью нечеткости).

Целью настоящей работы является исследование и анализ качественно нового подхода к управлению фондовым портфелем, основанного на применении теории нечетких множеств, а также разработка реализующих данный подход алгоритмов и сравнение результатов их применения с результатами, полученными при использовании классических вероятностных методов.

Постановка задачи

Рассматривается фондовый портфель из N компонент и его ожидаемое поведение на интервале времени $[0,T]$. Каждая из компонент портфеля $i=\overline{1,...,N}$ характеризуется своей финансовой доходностью r_i (оцененной в точке T как относительное приращение цены актива за период).

Держатель фондового портфеля – частный вкладчик, инвестиционная компания, взаимный фонд – управляет своими инвестициями, руководствуясь определенными соображениями. С одной стороны, инвестор старается максимизировать свою доходность. С другой сторонни, он фиксирует предельно допустимый риск неэффективности своих инвестиций.

Примем капитал инвестора равным 1. Задача оптимизации фондового портфеля заключается в нахождении долевого вектора ценового распределения бумаг в портфеле $x=\{x_i\}$ $i=\overline{1,N}$, максимизирующего доход инвестора при заданном уровне риска (очевидно, что $\sum_{i-1}^{N} x_i = 1$).

Постановленную задачу можно условно разделить на два этапа:

1. Разработка и реализация алгоритмов методов оптимизации фондового портфеля

   а) для модели Марковица (вероятностный подход);

   б) для детерминированной нечеткой модели на основе теории возможностей (нечетко-множественный подход).

2. Проведение сравнительного анализа методов и выявление их достоинств и недостатков для решения поставленной задачи.

Нечетко-множественный метод оптимизации фондового портфеля

Основные принципы и идея метода

Применение множественного подхода базируется на следующих положениях, где:

1. Риск портфеля - это не его волатильность, но возможность того, что ожидаемая доходность портфеля окажется ниже некоторой предустановленной плановой величины.
2. Корреляция активов в портфеле не рассматривается и не учитывается.
3. Доходность каждого актива – это неслучайное нечеткое число (например, треугольного вида или интервального вида). Аналогично, ограничение на предельно низкий уровень доходности может быть как обычным скалярным, так и нечетким числом произвольного вида. Таким образом, мы сводим два источника информации (средняя доходность и волатильность актива) в один (расчетный коридор доходности или цены) и тем самым объединяем два источника неопределенности в один.
4. Поэтому оптимизировать портфель в такой постановке может означать, в частном случае, требование максимизировать ожидаемую доходность портфеля в точке времени T при фиксированном уровне риска портфеля (по аналогии с тем, как это делается в [4] и [5]). Эффективная граница портфельного множества в этом случае - вогнутая линия в координатах «риск недопустимо низкой доходности портфеля - ожидаемая доходность портфеля». Каждой точке эффективной границы отвечает оптимальный портфель с четкими границами. Рассмотрим задачу

на основе изложенной модели, в предположении самых широких допущений к виду её нечетких параметров.

Модель оптимизации портфеля на основе теории возможностей

Нечеткое число как модель доходности актива

Пусть имеется фондовой портфель из N активов на интервале $[0,T]$. Прогнозный перфоманс каждой из компонент портфеля $i=1,...,N$ на момент T характеризируется своей финальной расчетной доходностью r_i (оцененной в точке T как относительное приращение цены актива за период). Поскольку доход по ценной бумаге (ЦБ) случаен, его точное значение в будущем неизвестно, а вероятностное описание такого сорта случайности не вполне корректно, то в качестве описания доходности целесообразно использовать треугольные нечеткие числа, моделируя экспертное высказывание следующего вида: «Доходность ЦБ по завершении срока владения *ожидаемо равна* $\bar{r}$ и находится в расчетном диапазоне $[r_1;r_2]$».

Таким образом, для i-ой ценной бумаги имеем:

$\bar{r}_i$ – ожидаемая доходность по i-ой ценной бумаги; r_{i1} – нижняя граница доходности i-ой ценной бумаги; r_{i2} – верхняя граница доходности i-ой ценной бумаги.

$r_i = \left(r_{1i}, \bar{r}_i, r_{2i}\right)$ – доходность по i-ой ценной бумаге, треугольное нечеткое число.

Тогда доходность по портфелю:

$$r = (r_{\min} = \sum_{i=1}^{N} x_i r_{1i}; \bar{r} = \sum_{i=1}^{N} x_i \bar{r}_i; r_{\max} = \sum_{i=1}^{N} x_i r_{2i}) \tag{9}$$

также является треугольным нечетким числом , где x_i - вес i-го актива в портфеле, причем

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1,\ 0 \le x_i \le 1 \tag{10}$$

Также определимся с критическим уровнем доходности портфеля на момент T. Это может быть нечеткое число треугольного вида $r^* = \left(r_1^*; \bar{r}^*; r_2^*\right)$. В вырожденном случае это обычный числовой норматив r^*, например, 10% годовых.

Оценка риска портфельных инвестиций

Перейдем к оценке собственно риска портфельных инвестиций. На рис.1 представлены функции принадлежности r и критериального значения r^*.

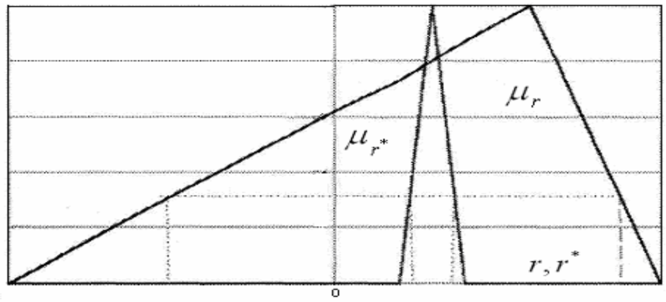


Рис.1 - Функции принадлежности r и r^*

Точкой пересечения этих двух функций принадлежности является точка с ординатой α_1. Выберем произвольный уровень принадлежности α и определим соответствующие интервалы $[r_1, r_2]$ и $[r_1^*, r_2^*]$. При $\alpha > \alpha_1$, $r_1 > r_2^*$, интервалы не пересекаются, и уверенность в том, что портфель эффективен, стопроцентная, поэтому степень риска неэффективности равна нулю. Уровень α_1 уместно назвать верхней границей зоны риска. При $0 \le \alpha \le \alpha_1$ интервалы пересекаются. На рис..2 показана заштрихованная зона неэффективного распределения активов в портфеле, ограниченная прямыми $r^* = r_1^*$, $r^* = r_2^*$, $r = r_1$, $r = r_2$ и биссектрисой координатного угла $r = r^*$.

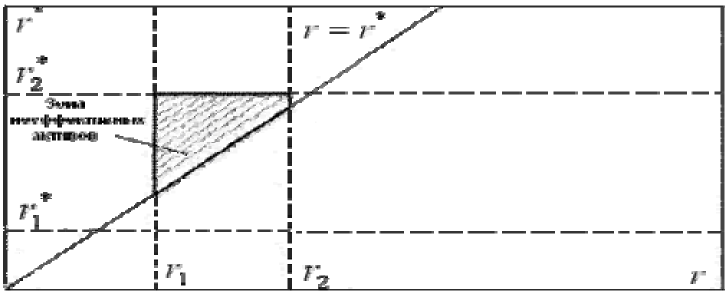


Рис.2 - Фазовое пространство (r, r^*)

Взаимные соотношения параметров $r_{1,2}^*$ и $r_{1,2}$ дают следующий расчет для площади заштрихованной плоской фигуры [2, 3]:

$$S_\alpha = \begin{cases} 0, \ \text{при} \ r_1 \ge r_2^* \\ \dfrac{(r_2^* - r_1)^2}{2}, \ \text{при} \ r_2^* > r_1 \ge r_1^*; \ r_2 \ge r_2^* \\ \dfrac{(r_1^* - r_1) + (r_2^* - r_1)}{2} \cdot (r_2^* - r_1^*), \ \text{при} \ r_1 < r_1^*, \ r_2 > r_2^* \\ (r_2^* - r_1^*)(r_2 - r_1) - \dfrac{(r_2 - r_1^*)^2}{2}, \ \text{при} \ r_1 < r_1^* \le r_2; \ r_2 < r_2^* \\ (r_2^* - r_1^*)(r_2 - r_1), \ \text{при} \ r_2 \ge r_1^* \end{cases} \tag{11}$$

Поскольку все реализации (r, r^*) при заданном уровне принадлежности α равновозможны, то степень риска, неэффективности $\varphi(\alpha)$ есть геометрическая вероятность события попадания точки (r, r^*) в зону неэффективного распределения капитала:

$$\varphi(\alpha) = \frac{S_\alpha}{\left(r_2^* - r_1^*\right) \cdot \left(r_2 - r_1\right)} \tag{12}$$

где S_α оценивается по формуле (12).

Тогда итоговое значение степени риска неэффективности портфеля:

$$\beta = \int_0^{\alpha_1} \varphi(\alpha) \partial \alpha \tag{13}$$

В важном частном случае (см. рис. 3), когда критерий эффективности определен четко уровнем r^*, то предельный переход при $r_2^* \to r_1^* \to r^*$ дает:

$$\varphi(\alpha) = \begin{cases} 0, \ при \ r^* < r_1 \\ \dfrac{(r^* - r_1)}{(r_2 - r_1)}, \ при \ r_1 \le r^* \le r_2; \ \alpha \in [0;1] \\ 1, \ при \ r^* > r_2 \end{cases} \tag{14}$$

Для того чтобы собрать все необходимые исходные данные для оценки риска, нам потребуется два значения обратной функции $\mu_r^{-1}(\alpha_1)$. Первое значение есть r^* (по определению верхней границы зоны риска α_1), второе значение обозначим $\tilde{r}^*$. Аналогичным образом обозначим $r_{\min}$ и $r_{\max}$ – два значения обратной функции $\mu_r^{-1}(0)$.

Введем обозначение $\tilde{r}$ - наиболее ожидаемое значение r. Тогда выражение для степени риска портфеля β, с учетом (14) и длинной цепи преобразований, имеет вид [3]:

$$\beta = \begin{cases} 0, \ при \ r^* < r_{\min} \\ R\left(1 + \dfrac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\ln(1-a_1)\right), \ при \ r_{\min} \le r^* \le \tilde{r} \\ 1-(1-R)\left(1 + \dfrac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\ln(1-a_1)\right), \ при \ \tilde{\mathrm{r}} \le \mathrm{r}^* < \mathrm{r}_{\max} \\ 1, \qquad , \ при \ r^* \ge \mathrm{r}_{\max} \end{cases} \tag{15}$$

где

$$R = \begin{cases} \dfrac{r^* - r_{\min}}{r_{\max} - r_{\min}}, \ при \ r^* < r_{\max} \\ 1, \qquad при \ r^* \ge \mathrm{r}_{\max} \end{cases} \tag{16}$$

$$\alpha = \begin{cases} 0, \ при \ r^* < r_{\max} \\ \dfrac{r^* - r_{\min}}{\tilde{r} - r_{\min}}, \ при \ r_{\min} \le r^* < \tilde{r} \\ 1, \qquad при \ r^* = \tilde{r} \\ \dfrac{r_{\max} - r^*}{r_{\max} - \tilde{r}}, \ при \ \tilde{r} < r^* < r_{\max} \\ 0, \qquad при \ r^* \ge r_{\max} \end{cases} \tag{17}$$

Таким образом, степень риска β принимает значения от 0 до 1. Каждый инвестор, исходя из своих инвестиционных предпочтений, может классифицировать значения β, выделив для себя отрезок неприемлемых значений риска.

Модель управления доходностью портфеля

Для того, чтобы определить структуру портфеля, который обеспечит максимальную доходность при заданном уровне риска, требуется решить следующую задачу:

$$\{x_{opt}\} = \{x\} \mid r \to \max, \quad \beta = const \tag{18}$$

где r и β определяются из формул (15)-(17), компоненты вектора x удовлетворяют (10).

Учитывая, что доходность портфеля:

$$r = (r_{\min} = \sum_{i=1}^{N} x_i r_{1i};\ \tilde{r} = \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i;\ r_{\min} = \sum x_i r_{2i})$$

где $(r_{1i}, \tilde{r}_i, r_{2i})$ – доходность i -ой ценной бумаги, получаем следующую задачу оптимизации (20)-(22):

$$\tilde{r} = \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \to \max \tag{20}$$

$$\beta = const \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \quad x_i \geq 0 \quad i = \overline{1, N} \tag{22}$$

При варьировании уровня риска β возможны 2 случая. Рассмотрим подробно каждый из них.

1. $\beta = 0$. Из (15) видно, что этот случай возможен когда $r^* < \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1}$.

Получаем следующую задачу линейного программирования (23)-(25):

$$\tilde{r} = \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \to \max \tag{23}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} > r^* \tag{24}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \quad x_i \geq 0 \quad i = \overline{1, N} \tag{25}$$

Найденный в результате решения задачи (23)-(25) вектор $x = \{x_i\} \quad i = \overline{1, N}$ и есть искомая структура оптимального для данного уровня риска портфеля.

2. $0 < \beta < 1$. Из (15) видно, что этот случай возможен когда $\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \leq r^* < \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i$, либо когда $\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \leq r^* < \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2}$.

а) Пусть $\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \leq r^* < \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i$. Тогда используя (15)-(17) задача (20)-(22) сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

$$\tilde{r} = \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \to \max \tag{26}$$

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2} - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1}} \left(\left(r^* - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \right) + \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i - r^* \right) \cdot \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i - r^*}{\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1}} \right) \right) = \beta \tag{27}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \le r^* \tag{28}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i > r^* \tag{29}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \quad x_i \ge 0 \quad i = \overline{1, N} \tag{30}$$

б) Пусть $\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \le r^* < \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2}$. Тогда задача (20)-(22) сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

$$\tilde{r} = \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \to \max \tag{31}$$

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2} - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1}} \left(\left(r^* - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \right) - \left(r^* - \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \right) \cdot \ln \left(\frac{r^* - \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2} - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1}} \right) \right) = \beta \tag{32}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2} > r^* \tag{33}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \le r^* \tag{34}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \quad x_i \ge 0 \quad i = \overline{1, N} \tag{35}$$

Для решения задач (26)-(30) и (31)-(35) применен R-алгоритм минимизации недифференцируе мых функций [9]. Пусть обе задачи: (26)-(30) и (31)-(35) разрешимы. Тогда структуре искомого оптимального портфеля будет отвечать вектор $x = \{x_i\}$ $i = \overline{1, N}$ – решение той из задач (26)-(30), (31)-(35)), значение целевой функции которой будет больше.

Анализ и сравнение результатов, полученных при применении моделей Марковитца и нечетко-множественного метода

Для сравнительного анализа исследуемых методов оптимизации фондового портфеля были использованы реальные данные по курсу акций компании РАО «ЕЭС России» (EERS2) и ОАО Газпром

(GASP), взятые за период с июля 2003 года по май 2006 года. Данные получены из архивов Московской фондовой биржи (МФБ).

Пусть, критическая доходность портфеля составляет 3,5% т.е. портфельные инвестиции, приносящие доход ниже 3% считаются неэффективными.

Нечетко-множественный метод дал следующие результаты (см. таблицу 1):

Таблица1

ERS2	GASP	Доходность портфеля	Нижняя граница	Верхняя граница	Уровень риска
0	1	4,8	-4,1	5,7	0,5203
0,1	0,9	4,53	-3,59	5,52	0,5449
0,2	0,8	4,26	-3,08	5,34	0,5767
0,3	0,7	3,99	-2,74	5,16	0,6207
0,4	0,6	3,72	-2,06	4,98	0,6878
0,5	0,5	3,45	-1,55	4,9	0,8212
0,6	0,4	3,18	-1,04	4,62	0,8871
0,7	0,3	2,91	-0,53	4,44	0,9239
0,8	0,2	2,64	-0,02	4,26	0,949
0,9	0,1	2,37	0,48	4,08	0,9688
1	0	2,1	0,99	3,9	0,9833

Результаты, полученных с помощью модели Марковитца для аналогичных уровней риска таковы (Табл.2):

Таблица 2

ERS2	GASP	Доходность портфеля	Уровень риска
0,5	0,49	5.01	0,5
0,38	0,62	5.31	0,6
0,26	0,74	5.6	0,7
0,02	0,98	6.23	0,9

В нечетко-множественном методе, доходность каждого актива – это детерминированное нечеткое число. Её ожидаемое значение рассчитывается уже не из статистических данных, а исходя из состояния рынка в момент принятия инвестором решения. Таким образом, в рассматриваемом случае, ожидаемая доходность портфеля не слишком высока.

Структура оптимального портфеля, полученная в результате применения методов, для одних и тех же уровней риска тоже различна. Для того, что бы выяснить причину этого, рассмотрим следующие зависимости (рис.3).

Зависимость ожидаемой доходности от степени риска портфеля, полученного а) нечетко-множественным методом. б) с помощью Марковитца

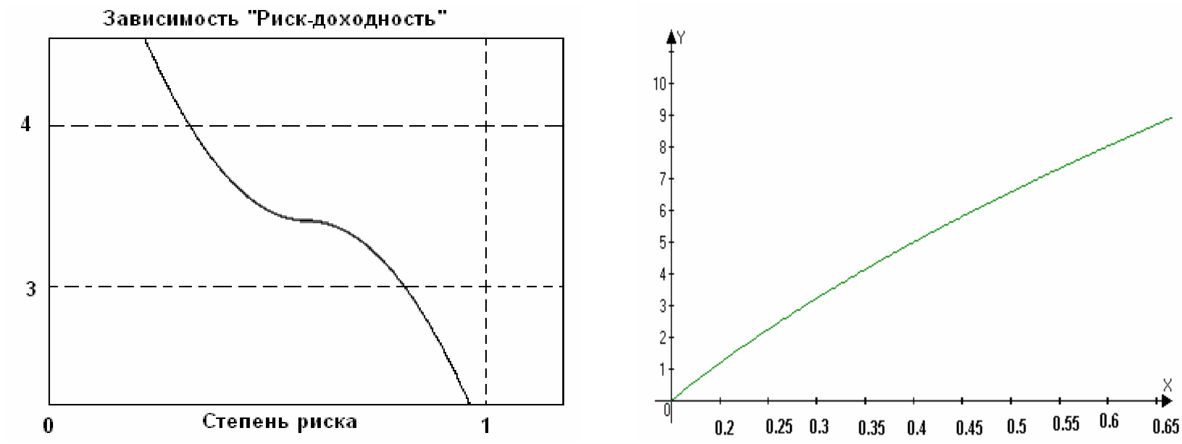


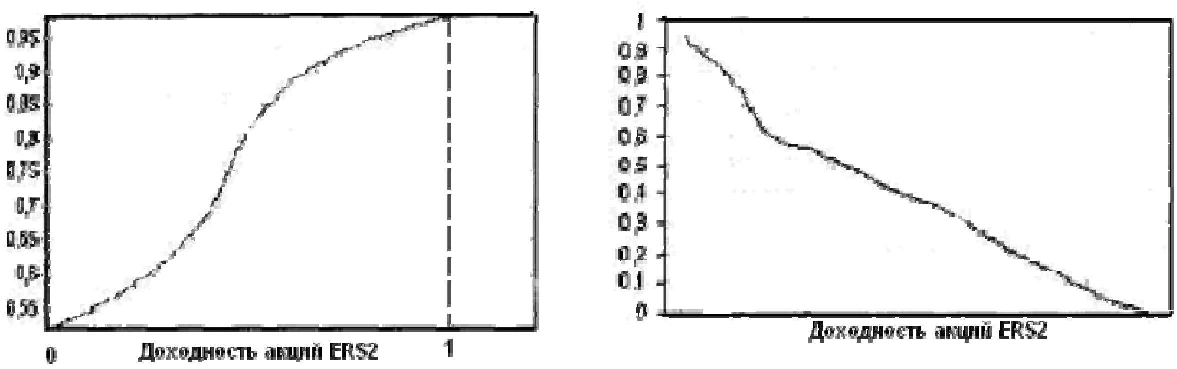
Рис. 3

Зависимости ожидаемой доходности от степени риска портфеля, полученного указанными выше методами, практически противоположны. Причиной такого результата является различное понимание уровня риска портфеля.

В нечетко-множественном методе под риском понимается ситуация, когда ожидаемая доходность портфеля ниже заданного критического уровня. Со снижением ожидаемой доходности возрастает риск того, что доход от портфельных инвестиций окажется меньше критического значения.

В модели Марковича риск рассматривается как степень колеблемости ожидаемого дохода по портфелю, причем как в меньшую, так и в большую сторону, что противоречит здравому смыслу.

Различное понимание уровня риска портфеля является также причиной различия зависимостей степени риска от доли той или иной акции в портфеле, полученном разными методами приведенная на рис.4.



а) нечетко-множественный метод б) модель Марковица

Рис. 4. Зависимость степени риска портфеля от доли акций ESP2

Вполне ясно, что с ростом доли низкодоходной бумаги в портфеле, даже несмотря на то, что расчетный коридор по EERS2 более узок, нежели расчетный коридор по GASP, падает ожидаемая доходность портфеля в целом - и, соответственно, растет риск неэффективности портфельного выбора.

Уровень же изменчивости ожидаемых доходов для акций EERS2 исходя из данных2000-2006 гг. намного ниже, чем для акций GASP. Поэтому в модели Марковица, рассматривающей его как риск портфельных инвестиций, с увеличением доли акций EERS2 риск портфеля снижается.

Выводы

В данной работе проводилось исследование в области фондового менеджмента. Была рассмотренотносительно недавно возникший нечетко-множественный подход к портфельной оптимизации. В результате проведенного исследования была получена основанная на нечетко-множественном подходе математическая модель для нахождения структуры оптимального инвестиционного портфеля, лишенная большинства недостатков классических вероятностных моделей

На основании теории нечетких множеств был разработан алгоритм оптимизации фондового портфеля.

В процессе исследования и сравнительного анализа модели Марковитца и нечетко-множественного метода определения оптимальной структуры фондового портфеля было выявлено следующее:

1. Структуры оптимального портфеля и показатели его ожидаемой доходности, получаемые с помощью модели Марковитца и нечетко-множественного метода кардинального отличаются.
2. С уменьшением объема выборки исходных данных по доходности активов модель Марковитца даёт более правдоподобные результаты. Однако слишком маленькая выборка также не допустима, т.к. не может дать полного представления рассматриваемых параметров.
3. Поскольку отклонение ожидаемой доходности в большую сторону, также как и в меньшую, рассматривается в модели Марковитца как риск, зависимости ожидаемой доходности от уровня риска портфеля, полученные с помощью упомянутой модели Марковитца и нечетко-множественного метода, практически противоположны.
4. По указанной выше причине также довольно часто доля высокодоходных активов в структуре портфеля, полученного с помощью модели Марковитца, неоправданно мала.

Литература

1. Недосекин А.О. Методологические основы моделирования финансовой деятельности с использованием нечетко-множественных описаний // Диссертация на соискание уч. ст. докт. экон. наук. СПб., 2003.
2. Система оптимизации фондового портфеля (Сименс Бизнес Сервисез Россия). – На сайте http://www.sbs.ru/index.asp7objectID=1863&lang=rus
3. Недосекин А.О. Система оптимизации фондового портфеля от Сименс Бизнес Сервисез // Банковские технологии. – 2003. – № 5. – Также на сайте: http: //www. finansy. ru/publ/fin/004. htm
4. Недосекин А.О. Применение теории нечетких множеств к задачам управления финансами. Раздел 3 // Аудит и финансовый анализ. – 2000. – №2. - Также на сайте: http://www.cfin.ru/press/afa/2000-2/08-3.shtml
5. Недосекин А.О. Оптимизация бизнес-портфеля корпорации. - На сайте: http://sedok.narod.ru/s_files/2003/Art_070303.doc
6. International Conference on Fuzzy Sets and Soft Computing in Economics and Finance FSSCEF 2004 - На сайте http://www.ifel.ra/fsscef2006/2004/FSSCEF_l.pdf
7. Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Орлова Е.Р., Смоляк С.А. Оценка эффективности инвестиционных проектов. М.: Дело, 1998.
8. Смоляк С. А. Учет специфики инвестиционных проектов при оценке их эффективности // Аудит и финансовый анализ. – 1999. – №3.
9. Шор Н.З. Задачі оптимального проектування надійних мереж //- К.: „Наукова думка". – 2004р.

Информация об авторах

Зайченко Юрий Петрович, профессор, д.т.н., кафедра «Институт прикладного системного анализа». Киев, НТУУ «КПИ», ул. Политехническая 14. тел: +8(044)241-86-93, e-mail: zaych@i.com.ua

Малихех Есфандиярфард (Иран), аспирантка кафедры «Прикладная математика»; тел: +38(096)6915857, e-mail: fard_sem@yahoo.com