ТРЕХЗНАЧНЫЕ ЛОГИКИ КЛИНИ И ТРЕХЭЛЕМЕНТНЫЕ ЦЕПИ

Дмитрий Буй, Елена Шишацкая

***Аннотация**: Рассмотрена сильная и слабая трехзначные логики Клини. Показано возникновение сильной логики из обычной булевой логики путем применения общезначимой конструкции распространения операций с элементов на множества элементов в терминах полного образа. Проиллюстрировано компактное задание операций обоих логик Клини трехэлементными цепями.*

***Ключевые слова**: сильная логика Клини, слабая логика Клини, цепь, полный образ.*

***ACM Classification Keywords**: F.4.1 Theory of Computation – Mathematical Logic and Formal Languages - Mathematical Logic.*

***Conference**: The paper is selected from XIVth International Conference "Knowledge-Dialogue-Solution" KDS 2008, Varna, Bulgaria, June-July 2008*

Введение

Работа посвящена сильной и слабой трехзначным логикам Клини, использующихся в теории рекурсии [1, с. 296-303]. Сильная логика используется в системах алгоритмических алгебр Глушкова [2, с. 117; § 4.2, с. 127], современных SQL-подобных языках реляционных баз данных [3, с. 169-170] и современных языках спецификаций UML/OCL при работе с булевым типом, пополненным третьим специальным значением [4, 5]. Заметим, что слабая логика Клини возникает путем естественного расширения в понимании [6] стандартных булевых операций, этот подход полностью отвечает принципам работы со специальным значением (UNDEFINED) стандарта объектных баз данных ODMG, в частности, языку запросов OQL [7, 8]. Далее под сильной и слабой логикой Клини будем понимать сильную и слабую трехзначную логику Клини.

Построение сильной логики Клини на основе обычной булевой логики

Применим общезначимую конструкцию распространения операций с элементов на множества элементов в терминах полного образа; именно такая конструкция применялась в [3, с. 23-24] при исследовании операций табличных алгебр, построенных на основе известных реляционных алгебр Кодда; общим свойствам полного образа посвящена работа [9].

Полный образ позволяет естественно распространять унарные (бинарные) операции на универсуме на булеан универсума. Через $[f]$ обозначим унарную тотальную операцию на булеане $P(D)$ универсума D, которая индуцируется частичной операцией f на универсуме и задается равенством $[f](X) \overset{def}{=} f[X]$; тут и далее $f[X] \overset{def}{=} \{y \mid \exists x(x \in X \wedge y \simeq f(x))\}$ – полный образ множества X относительно операции f, где, учитывая частичность функции, $\simeq$ – обобщенное равенство. Аналогично, пусть F – бинарная частичная операция на D; она также порождает бинарную тотальную операцию $[F]$ на булеане универсума D, которая задается равенством $[F](X,Y) \overset{def}{=} F[X \times Y]$.

Применим указанную схему расширения к сигнатурным операциям алгебры стандартной логики $<\{T,F\};\wedge,\vee,\neg>$, где T,F – логические значения истины и лжи соответственно. Результат расширения операции конъюнкции $\wedge$ и отрицания $\neg$ на булеан $P(\{T,F\})$ приведены в таблицах 1, 2 (расширение дизъюнкции строится аналогично).

Таблица 1. Операция $[\wedge]$ на булеане $P(\{T,F\})$

	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{T,F\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{T\}$	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{T,F\}$
$\{F\}$	$\varnothing$	$\{F\}$	$\{F\}$	$\{F\}$
$\{T,F\}$	$\varnothing$	$\{T,F\}$	$\{F\}$	$\{T,F\}$

Таблица 2. Операция $[\neg]$ на булеане $P(\{T,F\})$

аргумент	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{T,F\}$
значение	$\varnothing$	$\{F\}$	$\{T\}$	$\{T,F\}$

В таблице 1 первому аргументу отвечают столбцы, второму аргументу – строки. Расширения бинарных операций коммутативны; поэтому таблица 1 “симметрична” (относительно главной диагонали), и сопоставление аргументам столбцов или строк в действительности несущественно. Свойства коммутативности и ассоциативности расширений конъюнкции и дизъюнкции наследуются (что следует из общих результатов [3, утверждение 1.3.1; 9, утверждение 5]). Поскольку декартово произведение и полный образ сохраняют пустое множество, то и операции $[\wedge]$, $[\vee]$, $[\neg]$ сохраняют пустое множество. Поэтому в таблице 1, например, присутствуют константные строка и столбец, заполненные $\varnothing$.

Рассмотрим отображение $\psi:\{T,F,\omega\}\to P(\{T,F\})$, где ω – третье логическое значение логики Клини (содержательно интерпретируется как неопределенность): $\psi(T)=\{T\}$, $\psi(F)=\{F\}$, $\psi(\omega)=\{T,F\}$. Очевидно, отображение инъективно, но не сюръективно (ведь пустое множество не входит в область значений отображения ψ). Операции алгебры сильной логики Клини будем обозначать как операции алгебры стандартной логики, вводя только нижний индекс k; договоримся об одноименных операциях: операциям $\wedge_k$, $\vee_k$ и $\neg_k$ сопоставляются соответственно операции $[\wedge]$, $[\vee]$ и $[\neg]$.

Предложение 1 (построение алгебры сильной логики Клини). Отображение ψ – однозначный гомоморфизм алгебры сильной логики Клини $<\{T,F,\omega\};\wedge_k,\vee_k,\neg_k>$ в алгебру $<P(\{T,F\});[\wedge],[\vee],[\neg]>$, то есть это отображение является вложением алгебры сильной логики Клини в алгебру $<P(\{T,F\});[\wedge],[\vee],[\neg]>$. □

Доказательство. Действительно, заменяя в таблицах 1-2 значения $\{T\},\{F\},\{T,F\}$ на T,F,ω соответственно (согласно отображения ψ) и удаляя константные столбец и строку, заполненные значением $\varnothing$, приходим к табличному заданию операций конъюнкции и отрицания алгебры сильной логики Клини. Случай сильной дизъюнкции рассматривается полностью аналогично. □

Таким образом, алгебру сильной логики Клини можно получить путем применения к алгебре классической булевой логики конструкции расширения (в терминах полного образа) ее сигнатурных операций.

Компактное задание операций сильной логики Клини

Идея заключается в переходе от алгебры $<\{T,F,\omega\};\wedge_k,\vee_k,\neg_k>$ к соответствующей структуре (отметим, что сейчас чаще употребляется термин “решетка”, однако будем пользоваться термином “структура”, поскольку ссылаемся на результаты [10], где используется именно этот термин).

Действительно, непосредственно проверяется, что эти сигнатурные операции коммутативны, ассоциативны и идемпотентны; кроме того, выполняются два закона поглощения: $x\vee_k(x\wedge_k y)=x$ и $x\wedge_k(x\vee_k y)=x$ для всех $x,y\in\{T,F,\omega\}$. Следовательно, по стандартной процедуре, положив $x\leq_k y \overset{def}{\Leftrightarrow} x=x\wedge_k y$ (эквивалентно $x\leq_k y \overset{def}{\Leftrightarrow} y=x\vee_k y$), можно перейти к структуре, точные грани двухэлементных множеств которой находятся по формулам: $\mathbf{inf}\{x,y\}=x\wedge_k y$, $\mathbf{sup}\{x,y\}=x\vee_k y$ [10, теорема 3, с. 154]. Отношение $\leq_k$ в общем случае является частичным порядком [10, теорема 1, с. 151-152]. Для алгебры сильной логики Клини оно проиллюстрировано в таблице 3 (значениям аргумента x

отвечают строки, y – столбцы; в следующих таблицах будем придерживаться этого же соглашения); знак “+” в ячейке означает, что соответствующие элементы находятся в отношении, знак “-” – не находятся.

Таблица 3. Порядок $\le_k$ на **{*T*,*F*,ω}**

	$x = x \wedge_k y$	$y = x \vee_k y$	$x = x \wedge_k y$	$y = x \vee_k y$	$x = x \wedge_k y$	$y = x \vee_k y$
$x \backslash y$	T		F		ω	
T	+	+	-	-	-	-
	+		-		-	
F	+	+	+	+	+	+
	+		+		+	
ω	+	+	-	-	+	+
	+		-		+	

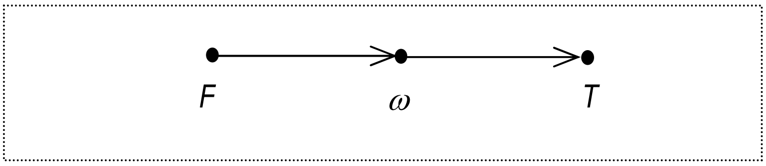

Рис.1. Линейный порядок $\le_k$ на множестве $\{T, F, \omega\}$

Для случая структуры, отвечающей алгебре сильной логики Клини, ее порядок является линейным (см. рис. 1, построенный на основе таблицы 3), а именно $F \le_k \omega \le_k T$ (для компактности на рис. 1 не приведена одна стрелка, возникающая ввиду транзитивности, и три петли, отвечающие рефлексивности порядка). Таким образом, общая ситуация существенно упрощается: структура в действительности является цепью и $x \wedge_k y$ является наименьшим ($x \vee_k y$ – наибольшим) из элементов x, y для всех $x, y \in \{T, F, \omega\}$. Анализ процедуры построения структуры показывает, что линейность в общем случае частичного порядка обеспечивается таким свойством сильных конъюнкции и дизъюнкции – $x \wedge_k y, x \vee_k y \in \{x, y\}$ для всех $x, y \in \{T, F, \omega\}$.

Сформулируем общий результат для коммутативных идемпотентных полугрупп. В формулировке следующего утверждения считаем известной связь между коммутативными идемпотентными полугруппами и нижними полуструктурами [10, теорема 1, с. 151-152].

Предложение 2 (критерий линейности порядка полуструктуры, построенной по коммутативной идемпотентной полугруппе). Пусть $< D, + >$ – коммутативная идемпотентная полугруппа, а $\le$ – частичный порядок, соответствующей нижней полуструктуре, то есть $x \le y \overset{def}{\Leftrightarrow} x = x + y$. Порядок $\le$ линейный (т.е. $< D, \le >$ является цепью) тогда и только тогда, когда $x + y \in \{x, y\}$ для всех $x, y \in D$. □

Доказательство. Необходимость. Пусть порядок $\le$ линеен, установим принадлежность $x + y \in \{x, y\}$ для всех $x, y \in D$. Пусть x, y – произвольные элементы; поскольку порядок линеен, то $x \le y$ или наоборот $y \le x$. В первом случае $x = x + y$, во втором – $y = y + x$. Поскольку операция коммутативна, то в обоих случаях выполняется принадлежность $x + y \in \{x, y\}$.

Достаточность. Пусть $x+y \in \{x,y\}$ для всех x,y; покажем, что порядок линеен. Пусть x,y – произвольные элементы, тогда по предположению $x+y=x$ или $x+y=y$. В первом случае $x \le y$ по определению порядка, во втором – $y \le x$ (действительно $y = x + y = y + x$). □

Из этого предложения и следует линейность порядка структуры, ассоциируемой с алгеброй сильной логики Клини. Кроме того, то, что структура $<\{T,F,\omega\};\le_k>$ является цепью, можно показать и другим элементарным путем. Действительно, указанная структура конечна, значит, она имеет наименьший (нуль) и наибольший (единицу) элементы, которые обозначим 0_k, 1_k соответственно. Поскольку структура трехэлементная, то, очевидно, что $0_k <_k 1_k$ и для третьего элемента z (отличного от наименьшего и наибольшего элементов) выполняется строгое неравенство $0_k <_k z <_k 1_k$. Следовательно, структура $<\{T,F,\omega\};\le_k>$ является цепью. Таким образом, линейность порядка структуры, ассоциируемой с алгеброй сильной логики Клини, следует, с одной стороны, из свойств операций (из принадлежностей $x \wedge_k y, x \vee_k y \in \{x,y\}$), а, с другой стороны, просто из трехэлементности структуры. Именно трехэлементность здесь существенна, ибо каждая n-элементная структура будет цепью при $n=1,2,3$, что не выполняется, в общем случае, при $n \ge 4$ (самый простой пример – булеан двухэлементного множества со стандартным порядком $\subseteq$). Подытожим вышеприведенную информацию.

Таблица 4. Операция $\wedge_\omega$ на $\{T,F,\omega\}$, сохраняющая ω

$\wedge_\omega$	T	F	ω
T	T	F	ω
F	F	F	ω
ω	ω	ω	ω

Предложение 3 (компактное задание бинарных операций алгебры сильной логики Клини). Отношение $\le_k$ превращает множество $\{T,F,\omega\}$ в цепь (а, значит, и в структуру), причем $x \wedge_k y$ является наименьшим (соответственно, $x \vee_k y$ – наибольшим) из элементов x,y для всех $x,y \in \{T,F,\omega\}$ согласно этого (линейного) порядка. □

Доказательство вытекает из общих результатов теории структур (интерпретации структуры как алгебры, каждая из двух сигнатурных операций которой идемпотентна, коммутативна и ассоциативна, а сами эти операции связаны законами поглощения) и линейности соответствующего порядка (см. рис. 1). □

Симптоматично, что по сути такое компактное задание операций (алгебры) сильной логики Клини используется в популярной программистской литературе по языку SQL: F интерпретируется как число 0, T – как 1, ω – как $\frac{1}{2}$; тогда $x \wedge_k y = \mathbf{min}(x,y)$, $x \vee_k y = \mathbf{max}(x,y)$ при естественном порядке – $0 < \frac{1}{2} < 1$; более того $\neg x = 1 - x$ (см., например, [11]).

Слабая логика Клини, возникающая при естественном расширении булевой логики

Рассмотрим слабую логику Клини и начнем с алгебры (группоида) $<\{T,F,\omega\};\wedge_\omega>$, где операция конъюнкции отлична от рассмотренной выше сильной конъюнкции Клини и задана следующим образом: в случаях, когда хотя бы один аргумент равен третьему (новому) значению ω, результатом будет именно это значение; во всех других случаях операция ведет себя как операция $\wedge$ стандартной логики (таблица 4). Такую операцию $\wedge_\omega$ будем называть слабой конъюнкцией Клини [1].

Следовательно, речь идет о расширении стандартной конъюнкции, сохраняющем третье логическое значение. Операции конъюнкции и дизъюнкции алгебры сильной логики Клини, в отличие от операции отрицания этой же алгебры, третье логическое значение ω не сохраняют (см. таблицы 1, 2; например,

$T \vee \omega = T$, $F \wedge \omega = F$, но $\neg\omega = \omega$). Так определенная операция ассоциативна, коммутативна и идемпотентна (что проверяется непосредственно); то есть $<\{T, F, \omega\}; \wedge_\omega>$ – коммутативная идемпотентная полугруппа и можно применить общую процедуру построения по ней полуструктуры (верхней или нижней).

Определим два бинарных отношения $x \le (\wedge_\omega) y \overset{def}{\Leftrightarrow} x = x \wedge_\omega y$ и $x \preceq (\wedge_\omega) y \overset{def}{\Leftrightarrow} y = x \wedge_\omega y$. Будем использовать обозначение вида $\le (\wedge_\omega)$, желая подчеркнуть, что отношение $\le$ индуцируется операцией $\wedge_\omega$, аналогично, для инверсного отношения. Иногда в таких обозначениях операцию явно указывать не будем. Тогда каждое из этих отношений является порядком, и множество $\{T, F, \omega\}$ с порядком $\le (\wedge_\omega)$ (с порядком $\preceq (\wedge_\omega)$) является нижней (верхней) полуструктурой, причем $\mathbf{inf}_\le \{x, y\} = x \wedge_\omega y$ (соответственно $\mathbf{sup}_\preceq \{x, y\} = x \wedge_\omega y$) [10, с. 152, теорема 1]. Очевидно, порядки $\le (\wedge_\omega)$ и $\preceq (\wedge_\omega)$ взаимоинверсны, то есть $x \le y \Leftrightarrow y \preceq x$.

Таблица 6. Операция $\vee_\omega$ на $\{T, F, \omega\}$, сохраняющая ω

$\vee_\omega$	T	F	ω
T	T	T	ω
F	T	F	ω
ω	ω	ω	ω

Следовательно, согласно принципа двойственности, не суть важно, какой именно порядок из этих двух рассматривать [12, с. 10]).

Порядки $\le (\wedge_\omega)$ и $\preceq (\wedge_\omega)$ проиллюстрированы в таблице 5 и на рис. 2.

Таблица 5. Порядки $\le (\wedge_\omega)$ и $\preceq (\wedge_\omega)$ на $\{T, F, \omega\}$

	$x \le (\wedge_\omega) y \overset{def}{\Leftrightarrow} x = x \wedge_\omega y$			$x \preceq (\wedge_\omega) y \overset{def}{\Leftrightarrow} y = x \wedge_\omega y$		
$x \backslash y$	T	F	ω	T	F	ω
T	+	-	-	+	+	+
F	+	+	-	-	+	+
ω	+	+	+	-	-	+

Рис. 2. Порядки $\le (\wedge_\omega)$ (слева) и $\preceq (\wedge_\omega)$ (справа) на $\{T, F, \omega\}$

Аналогично, группоид $<\{T, F, \omega\}; \vee_\omega>$, операция которого есть расширением стандартной операции дизъюнкции и сохраняет третье логическое значение ω (таблица 6), является коммутативной идемпотентной полугруппой. Снова можно применить общую процедуру построения полструктуры.

Определим два отношения $x \le (\vee_\omega) y \overset{def}{\Leftrightarrow} x = x \vee_\omega y$ и $x \preceq (\vee_\omega) y \overset{def}{\Leftrightarrow} y = x \vee_\omega y$ (как и для случая конъюнкции эти два отношения взаимоинверсны). Тогда каждое из этих отношений есть порядком, и множество $\{T, F, \omega\}$ с порядком $\le (\vee_\omega)$ ($\preceq (\vee_\omega)$) является нижней (верхней) полуструктурой, причем

$\mathbf{inf}_{\le}\{x,y\} = x \vee_\omega y$ (соответственно $\mathbf{sup}_{\preceq}\{x,y\} = x \vee_\omega y$) [10, с. 151, теорема 1]. Порядки проиллюстрированы в таблице 7 та на рис. 3.

Таблица 7. Порядки $\le(\vee_\omega)$ и $\preceq(\vee_\omega)$ на $\{T,F,\omega\}$

	$x \le (\vee_\omega) y \Leftrightarrow x = x \vee_\omega y$			$x \preceq (\vee_\omega) y \Leftrightarrow y = x \vee_\omega y$		
$x \backslash y$	T	F	ω	T	F	ω
T	+	+	-	+	-	+
F	-	+	-	+	+	+
ω	+	+	+	-	-	+

Рис. 3. Порядки $\le(\vee_\omega)$ (слева) и $\preceq(\vee_\omega)$ (справа) на $\{T,F,\omega\}$

Анализ процедуры построения полуструктур (напомним, что, например, $x \le (\wedge_\omega) y \Leftrightarrow x = x \wedge_\omega y$), показывает, что линейность, в общем случае, частичного порядка обеспечивается таким свойством слабой конъюнкции и слабой дизъюнкции – $x \wedge_\omega y, x \vee_\omega y \in \{x,y\}$ для всех $x,y \in \{T,F,\omega\}$. Следовательно, ситуация с линейностью порядков аналогична сильной логике Клини и даже упрощается: принадлежности $x \wedge_\omega y$, $x \vee_\omega y \in \{x,y\}$ в случае, когда хотя бы один из аргументов x, y есть ω, автоматически следуют из сохранения значения ω операциями. Отличие заключается в том, что установить линейность порядка как следствие трехэлементности нельзя, поскольку работаем в полуструктурах (заметим, что существует простой пример трехэлементной полуструктуры, которая не является цепью; вместе с тем понятно, что двухэлементные полуструктуры являются цепями).

Подытожим информацию о полуструктурах (в действительности, структурах, поскольку порядок линеен), индуцированных двумя рассмотренными коммутативными идемпотентными полугруппами.

Предложение 4 (структуры, индуцируемые слабой конъюнкцией и слабой дизъюнкцией). Отношения $\le(\wedge_\omega)$ и $\preceq(\wedge_\omega)$ превращают множество $\{T,F,\omega\}$ в цепь (а, значит, и в структуру), причем $x \wedge_\omega y$ является наименьшим (наибольшим) из элементов x,y согласно порядка $\le(\wedge_\omega)$ (соответственно $\preceq(\wedge_\omega)$) для всех $x,y \in \{T,F,\omega\}$. Отношения $\le(\vee_\omega)$ и $\preceq(\vee_\omega)$ также превращают множество $\{T,F,\omega\}$ в цепь (а, значит, и в структуру), причем $x \vee_\omega y$ является наименьшим (наибольшим) из элементов x,y согласно порядка $\le(\vee_\omega)$ (соответственно $\preceq(\vee_\omega)$) для всех $x,y \in \{T,F,\omega\}$. □

Доказательство следует из указанных результатов теории полуструктур (взгляда на полуструктуру как на коммутативную идемпотентную полугруппу) и линейности соответствующих порядков (см. рис. 2-3). □

Очевидно, что в последнем предложении два (взаимоинверсные) порядка для слабой конъюнкции отличаются от двух (взаимоинверсных) порядков для слабой дизъюнкции. Следовательно, среди указанных четырех порядков нет порядка, отвечающего одновременно слабой конъюнкции и слабой дизъюнкции (в отличие от сильной логики Клини, где такой “общий порядок” существует, см. рис. 1). Для алгебры $<\{T,F,\omega\}; \wedge_\omega, \vee_\omega>$ сформулируем общий вопрос: существует ли на множестве $\{T,F,\omega\}$ порядок (обозначим его $\lhd$), превращающий его в структуру, причем для произвольных x,y выполняются равенства $x \wedge_\omega y = \mathbf{inf}_\triangleleft\{x, y\}$, $x \vee_\omega y = \mathbf{sup}_\triangleleft\{x, y\}$ (либо, согласно принципа двойственности, в эквивалентной форме $x \wedge_\omega y = \mathbf{sup}_\triangleleft\{x, y\}$, $x \vee_\omega y = \mathbf{inf}_\triangleleft\{x, y\}$)? Допустим, что такой порядок существует, тогда должны выполняться законы поглощения для операций слабой конъюнкции и слабой дизъюнкции [10, с. 152-153, теорема 2]. Но результаты непосредственной проверки этих законов, приведенные в таблице 8, показывают, что в случаях, когда только y совпадает с ω, оба закона поглощения не выполняются. Следовательно, такого порядка не существует.

Таблица 8. Выполнимость законов поглощения для операций $\vee_\omega, \wedge_\omega$

	$(x \vee_\omega y) \wedge_\omega x = x$			$(x \wedge_\omega y) \vee_\omega x = x$		
$x \setminus y$	T	F	ω	T	F	ω
T	+	+	-	+	+	-
F	+	+	-	+	+	-
ω	+	+	+	+	+	+

Невыполнение законов поглощения вполне естественно. Ведь суть этих законов заключается в том, что значения выражений, $(x \vee_\omega y) \wedge_\omega x$, $(x \wedge_\omega y) \vee_\omega x$ не зависят от значения y, а определяются только значением x. Понятно, что это требование не выполняется, если операции сохраняют значение ω, y совпадает с ним, а x, наоборот, отличный от ω.

Заключение

На множестве $\{T, F, \omega\}$ существует 6=3! возможных линейных порядков, связь которых с операциями дизъюнкции и конъюнкции двух рассмотренных логик Клини приведена в таблице 9.

Таблица 9. Всевозможные цепи на $\{T, F, \omega\}$ и их связь с логиками Клини

1. $F \to \omega \to T$ $x \wedge_k y = \mathbf{min}(x, y)$ $x \vee_k y = \mathbf{max}(x, y)$	2. $T \to \omega \to F$ $x \wedge_k y = \mathbf{max}(x, y)$ $x \vee_k y = \mathbf{min}(x, y)$
3. $F \to T \to \omega$ $x \vee_\omega y = \mathbf{max}(x, y)$	4. $\omega \to T \to F$ $x \vee_\omega y = \mathbf{min}(x, y)$
5. $\omega \to F \to T$ $x \wedge_\omega y = \mathbf{min}(x, y)$	6. $T \to F \to \omega$ $x \wedge_\omega y = \mathbf{max}(x, y)$

Порядок 1 (инверсный ему порядок 2) отвечает одновременно дизъюнкции и конъюнкции сильной логики Клини. Это порядки структуры, ассоциируемой с алгеброй сильной логики Клини. Порядок 3 (инверсный ему порядок 4) отвечает дизъюнкции, но не конъюнкции слабой логики Клини. Дуально, порядок 5 (инверсный ему порядок 6) – отвечает конъюнкции, но не дизъюнкции слабой логики Клини. Это порядки полуструктур, ассоциируемых с двумя полугруппами слабой логики Клини (сигнатура одной полугруппы состоит из слабой дизъюнкции, сигнатура другой – из слабой конъюнкции).

Литература

[1] Клини С.К. Введение в метаматематику. – Москва: ИЛ, 1957. – 526 с.

[2] Глушков В.М., Цейтлин Г.Е., Ющенко Е.Л. Алгебра. Языки. Программирование. – К.: Наукова думка, 1978. – 318 с.

[3] Редько В.Н., Брона Ю.Й., Буй Д.Б., Поляков С.А. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. – К.: Видавничий дім “Академперіодика”, 2001. – 198 с.

[4] Cook S., Kleppe A., Mitchell R., Rumpe B., Warmer J., Wills A. The Amsterdam Manifesto on OCL. – UML 2.0 Request for information response: OMG Analysis & Design PTF, 1999 / http://www.trireme.com/whitepapers/design/components/OCL_manifesto.PDF.

[5] www.omg.org // 05-06-06.pdf.

[6] Манна З. Теория неподвижной точки программ // Кибернетический сборник. Вып. 15. – М.: Мир, 1978. – С. 38-100.

[7] The Object Data Standard: ODMG 3.0/ Edited by R.G.G. Cattel, Douglas K.Barry. – Morgan Kauffmann Publishers, 2000.

[8] http://www.omg.org/docs/omg/04-07-02.pdf.

[9] Буй Д.Б., Кахута Н.Д. Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 2. – С. 232-240.

[10] Скорняков Л.А. Элементы алгебры. – Москва: Наука, 1986. – 240ºс.

[11] http://www.sql-ex.ru/help/select2.php.

[12] Скорняков Л.А. Элементы теории структур. – Москва: Наука, 1982. – 160 с.

Информация об авторах

***Буй Дмитрий Борисович** – заведующий лабораторией проблем программирования, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики, Украина, Киев, 03680, пр. Глушкова 2, корп.6; e-mail: buy@unicyb.kiev.ua*

***Шишацкая Елена Владимировна** – инженер-программист лаборатории проблем программирования, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики, Украина, Киев, 03680, пр. Глушкова 2, корп.6; e-mail: shyshatskaja@unicyb.kiev.ua*