МЕРА ОПРОВЕРЖИМОСТИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ ЭКСПЕРТОВ, РАССТОЯНИЯ В МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКЕ И ПРОЦЕССЫ АДАПТАЦИИ

Александр Викентьев

***Аннотация**: В работе определяются и доказываются свойства расстояний на высказываниях экспертов в многозначной логике и изучается мера опровержимости таких высказываний. Получены обобщения на общий случай результатов, доказанных ранеее в случае 2-значного и 3-значного исчислений [1].*

***Ключевые слова**: многозначные экспертные высказывания, метрика на высказываниях (expert statements, metric).*

***ACM Classification Keywords**: I.2.6. Исскуственный интеллект, изучение баз знаний, процессы адаптации (Artificial Intelligence - knowledge acquisition).*

***Conference**: The paper is selected from XIV[th] International Conference "Knowledge-Dialogue-Solution" KDS 2008, Varna, Bulgaria, June-July 2008*

Введение

В настоящее временя появляется все больший интерес к построению логических решающих функций на основе анализа экспертной информации, заданной в виде вероятностных логических высказываний нескольких экспертов, реализации адаптивных методов и согласования высказываний [1-8] .

В данной работе предложено записывать высказывания экспертов в виде формул многозначной логики Лукасевича [3]. При организации поиска логических закономерностей требуются как расстояния между высказываниями экспертов и формулами в моделях (по базе знаний) в произвольный текущий момент времени, так и мера опровержимости. Последняя позволяет ранжировать высказывания по степени их нетривильности, важности. Планируемая обработка сообщений экспертов в различные моменты (срезы) времени показывает, что поскольку гипотезы-предположения у экспертов вообще говоря меняются, то расстояния и мера опровержимости тоже могут изменяться. Значит происходит адаптация во времени как самой теории, так и расстояний между высказываниями и их опровержимостей. Аппарат для обработки таких знаний подготовлен в работах Викентьева А.А., начатых совместно с Лбовым Г.С. и Кореневой Л.Н., а согласования знаний- высказываний в работах Лбова-Герасимова [4-6] в классе логических решающих функций. Сигнал о смене класса моделей (а значит и теории) будет исходить либо от самих экспертов (по их изменяющимся знаниям) или при получении неправильных результатов при использовании старой (базы знаний) теории. В случае n=2, n=3 проведены теоретические исследования по указанным выше вопросам. Здесь рассмотрен случай для произвольного n . Конечно, не все ранее доказанные результаты для малых n переносятся на общую ситуацию.

Ясно, что различные высказывания экспертов (и соответствующие им формулы) несут в себе разное количество информации, а значит, возникает вопрос о ранжировании высказываний экспертов и сравнении их по информативности (мере опровержимости). Для решения этих задач в работе будут введены и найдены свойства расстояния между формулами. Подробно рассмотрена мера опровержимости рассматриваемых формул.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 07-01-00331а.

Определение расстояния между высказываниями экспертов

Определение 1.1. Множество элементарных высказываний $S^n(\varphi)$, используемых при написании формул многозначной логики φ, назовем *носителем формулы* φ.

Определение 1.2. Назовем *носителем совокупности знаний* $S^n(\Sigma)$, объединение носителей формул, входящих в Σ, т.е. $S^n(\Sigma) = \bigcup_{\varphi\in\Sigma} S^n(\varphi)$.

Определение 1.3. Назовем *множеством возможных значений носителя* совокупности знаний $Q^n(\Sigma) = \{\varphi_{\frac{k}{n-1}} \mid \varphi \in S(\Sigma), k = 1,.., n-1\}$.

Определение 1.4. *Моделью* М назовем любое подмножество $Q^n(\Sigma)$ такое, что М не содержит одновременно $\varphi_{\frac{k}{n-1}}$ и $\varphi_{\frac{l}{n-1}}$ $\forall k \neq l \quad \forall \varphi \in Q(\Sigma)$

Множество всех моделей будем обозначать $P^n(S(\Sigma))$. Для упрощения записи, верхний индекс у формул, означающий значность высказывания, будем опускать когда это не вызывает трудностей.

Лемма 1.1. (о числе моделей $P^n(S(\Sigma))$)

$| P(S(\Sigma)) |= n^{|S(\Sigma)|}$.

Доказательство: докажем утверждение по индукции.
Пусть $S(\Sigma) = \{A\}$; $| S(\Sigma) |= 1$. Тогда $P(S) = \{\{A\},\{A_{\frac{n-2}{n-1}}\},..,\{A_{\frac{1}{n-1}}\}\{\}\}$.

$| P(S(\Sigma)) |= n$

Пусть верно для $| S(\Sigma) |= k-1$; $S(\Sigma) = \{A^1, A^2,.., A^{k-1}\}$; $P(S(\Sigma)) = n^{|S(\Sigma)|}$;

Докажем для $| S(\Sigma) |= k$, т.е. $S(\Sigma) = \{A^1, A^2,...A^k\}$.

$P(S(\Sigma')) = P(S(\Sigma)) \cup \{M \cup \{A_1^k\} \mid M \in P(S(\Sigma))\} \cup \{M \cup \{A^k_{\frac{n-2}{n-1}}\} \mid M \in P(S(\Sigma)) \cup .. \cup \{M \cup \{A^k_{\frac{1}{n-1}}\} \mid$
$M \in P(S(\Sigma))\}\}$

Докажем это. Очевидно, что

$P(S(\Sigma')) \supseteq P(S(\Sigma)) \cup \{M \cup \{A_1^k\} \mid M \in P(S(\Sigma))\} \cup \{M \cup \{A^k_{\frac{n-2}{n-1}}\} \mid M \in P(S(\Sigma)) \cup .. \cup \{M\{A^k_{\frac{1}{n-1}}\} \mid$
$M \in P(S(\Sigma))\}\}$

Докажем обратное включение.
Пусть $M \in P(S(\Sigma'))$. Тогда

если $A_l^k \in M$, где $l \in \{\frac{n-1}{n-1}, \frac{n-2}{n-1},..,0\}$, тогда $M \setminus A_l^k \in P(S(\Sigma))$

если $A_l^k \notin M$, то $M \in P(S(\Sigma))$

Следовательно,

$P(S(\Sigma')) \subseteq P(S(\Sigma)) \cup \{M \cup \{A^k\} \mid M \in P(S(\Sigma))\} \cup \{M \cup \{A^k_{\frac{n-2}{n-1}}\} \mid M \in P(S(\Sigma)) \cup .. \cup \{M \cup \{A^k_{\frac{1}{n-1}}\} \mid$
$M \in P(S(\Sigma))\}\}$

Значит,

$| P(S(\Sigma')) |=| P(S(\Sigma)) | + | P(S(\Sigma)) | +...+ | P(S(\Sigma)) |= n \mid P(S(\Sigma)) |= n * n^{|S(\Sigma)|} = n^{|S(\Sigma)|+1} = n^{|S(\Sigma')|}$.

ч.т.д.

Определение 1.5. Элементарная формула A принимает на модели M значение $\frac{k}{n-1}$, k =1, .., $n-1$, если $A_{\frac{k}{n-1}} \in M$, т.е. $M \models A_{\frac{k}{n-1}} \Leftrightarrow A_{\frac{k}{n-1}} \in M$.

Определение 1.6. Элементарная формула A принимает на модели M значение 0, если $A_{\frac{k}{n-1}} \notin M \ \forall k = 1,..,n-1$.

Далее, используя определенные выше формулы, полагаем:

3) $M \models (A \& B)_{\frac{k}{n-1}} \Leftrightarrow (M \models A_{\frac{p}{n-1}}$ и $M \models B_{\frac{q}{n-1}})\ \min(p,q) = k$

4) $M \models (A \vee B)_{\frac{k}{n-1}} \Leftrightarrow (M \models A_{\frac{p}{n-1}}$ и $M \models B_{\frac{q}{n-1}})\ \max(p,q) = k$

5) $M \models (\neg A)_{\frac{k}{n-1}} \Leftrightarrow M \models A_{\frac{n-1-k}{n-1}}$

Во всех остальных случаях формулы принимают значения 0.

Введем обозначения:

$$Mod_{S(\Sigma)}(A)_{\frac{k}{n-1}} = \{M \mid M \in P(S(\Sigma)), M \models A_{\frac{k}{n-1}}\}$$

$$Mod_{S(\Sigma)}(A_0) = \{M \mid M \in P(S(\Sigma)), M \not\models A_{\frac{k}{n-1}}, \forall k = 1,...,n-1\}$$

Таким образом, любой формуле φ такой, что $S(\varphi) \subseteq S(\Sigma)$ соответствует совокупность $Mod_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}$, $k = 1,..,n-1$ моделей из $P(S(\Sigma))$, на которых φ принимает значения $\frac{k}{n-1}$, $k = 1,..,n-1$ соответственно.

Сформулируем некоторые теоретико-модельные свойства.

Лемма 1.2.

1) $Mod_{S(\Sigma)}((A \& B)_{\frac{k}{n-1}}) = \bigcup_{p=k}^{n-1}((Mod_{S(\Sigma)}(A)_{\frac{p}{n-1}} \cap Mod_{S(\Sigma)}(B)_{\frac{k}{n-1}}) \cup (Mod_{S(\Sigma)}(A)_{\frac{k}{n-1}} \cap Mod_{S(\Sigma)}(B)_{\frac{p}{n-1}})$;

2) $Mod_{S(\Sigma)}((A \vee B)_{\frac{k}{n-1}}) = \bigcup_{p=0}^{k}((Mod_{S(\Sigma)}(A)_{\frac{p}{n-1}} \cup Mod_{S(\Sigma)}(B)_{\frac{k}{n-1}}) \cup (Mod_{S(\Sigma)}(A)_{\frac{k}{n-1}} \cup Mod_{S(\Sigma)}(B)_{\frac{p}{n-1}}$;

3) $Mod_{S(\Sigma)}(\neg A)_{\frac{k}{n-1}} = Mod_{S(\Sigma)}(A)_{\frac{n-1-k}{n-1}}$;

4) $\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma)}(A)_{\frac{k}{n-1}} = P(S(\Sigma)) / Mod_{S(\Sigma)}(\neg A)_1$

Определение 1.7. Назовем формулы φ и ψ *эквивалентными* (далее коротко $\varphi \equiv \psi$), если $\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}} = \bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma)}(\psi)_{\frac{k}{n-1}}$, т.е. они имеют одно и тоже множество моделей в каждом значении истинности. Это отношение является *отношением эквивалентности*.

Определение 1.8. *Расстоянием* между формулами φ и ψ (такое, что $S(\varphi) \cup S(\psi) \subseteq S(\Sigma)$) на множестве $P(S(\Sigma))$ назовем величину (обобщающую нормированную симметрическую разность для многозначного случая, что является естественным обобщением расстояния для (классической) 2- и 3-значной логик):

$$\rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \psi) = \frac{|\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_0)| + |\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_0 \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}$$

Свойства расстояния

Утверждение (Свойства расстояния $\rho_{S(\Sigma)}$)

Для любых формул φ,ψ таких, что $S(\varphi)\cup S(\psi)\subseteq S(\Sigma)$ справедливы утверждения:

1) $0\le \rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi)\le 1$;

2) $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi)=\rho_{S(\Sigma)}(\psi,\varphi)$;

3) $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi)=0\Leftrightarrow \varphi\equiv\psi$;

4) $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi)=1\Leftrightarrow \bigcup\limits_{l=1}^{n-1}\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}(Mod(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}\overline{\cup}Mod(\psi)_{\frac{l}{n-1}})=P(S(\Sigma))$, где $\overline{\cup}$ - прямое объединение

5) $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi)\le \rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\chi)+\rho_{S(\Sigma)}(\chi,\psi)$

6) Если $\varphi^1\equiv\varphi^2$, то $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi^1,\psi)=\rho_{S(\Sigma)}(\varphi^2,\psi)$;

Доказательство:

1) Очевидно, что $0<\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi)<1$, причем верхняя и нижняя границы достижимы. Приведем примеры формул, на которых они достигаются.

$\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\varphi)=0$; Пусть φ - формула, не принимающая значение $\frac{k}{n-1},\quad k=1,..,n-2$, тогда $\neg\varphi$ - так же не принимает значение $\frac{k}{n-1},\quad k=1,..,n-2$. Тогда $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\neg\varphi)=1$.

2) Данное свойство очевидно, из определения расстояния и симметричности операций.

3) Докажем прямую (слева направо) импликацию.

$$\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi)=0\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n-1}(|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}|+|Mod_{S(\Sigma)}(\psi)_{\frac{k}{n-1}}|)-2\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{q=1}^{n-1}|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{p}{n-1}}\&\psi_{\frac{q}{n-1}})|=0$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}|+|Mod_{S(\Sigma)}(\psi)_{\frac{k}{n-1}}|=2\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{q=1}^{n-1}|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{p}{n-1}}\&\psi_{\frac{q}{n-1}})| \qquad \textbf{(1)}$$

По определению:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}|=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-1}|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_{\frac{s}{n-1}})|;$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(|Mod_{S(\Sigma)}(\psi)_{\frac{k}{n-1}}|=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-1}|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{s}{n-1}}\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|;$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n-1}(|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}|+|Mod_{S(\Sigma)}(\psi)_{\frac{k}{n-1}}|)=$$

$$=2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{s=1}^{n-1}|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_{\frac{s}{n-1}})|+\sum_{k=1}^{n-1}|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)|+\sum_{k=1}^{n-1}|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_0\&\psi_{\frac{k}{n-1}})| \qquad \textbf{(2)}$$

Если из (2) вычесть (1), то получается

$\sum\limits_{k=1}^{n-1}(|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)|+|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_0\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|)=0$; откуда следуют импликации

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n-1}|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}}\&\psi_0)|=0\quad\Rightarrow\quad \bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}\subseteq\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\psi)_{\frac{k}{n-1}} \qquad \textbf{(3)}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}|Mod_{s(\Sigma)}(\varphi_0\&\psi_{\frac{k}{n-1}})|=0\ \Rightarrow\ \bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}\supseteq\bigcup_{k=1}^{n-1}Mod(\psi)_{\frac{k}{n-1}} \qquad \textbf{(4)}$$

$\Rightarrow$ Из (3), (4) получаем $\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\varphi)_{\frac{k}{n-1}} = \bigcup_{k=1}^{n-} Mod_{s(\Sigma)}(\psi)_{\frac{k}{n-1}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \psi$

Докажем обратное: если $\varphi = \psi$, то $\rho(\varphi,\psi) = 0$.

По определению $\varphi \equiv \psi$ означает, что $\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma)}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}} = \bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma)}(\psi)_{\frac{k}{n-1}}$

$$\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\varphi)_{\frac{k}{n-1}} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\psi)_{\frac{k}{n-1}} \Rightarrow Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_0) = \varnothing$$

$$| Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_0) | = 0 \ \ \forall k \Rightarrow | Mod(\varphi_0 \& \psi_{\frac{k}{n-1}}) | = 0 \ \ \forall k$$

$$\Rightarrow \rho(\varphi,\psi) = \frac{|\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_0)| + |\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\psi_{\frac{k}{n-1}} \& \varphi)|}{n^{|S(\Sigma)|}} = 0.$$

4) $\rho(\varphi,\psi) = 1 \Leftrightarrow | Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_0)| + |\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_0 \& \psi_{\frac{k}{n-1}})| = n^{|S(\Sigma)|}$ **(5)**

$$n^{|S(\Sigma)|} = |\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_0)| + |\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\psi_{\frac{k}{n-1}} \& \varphi_0)| + |\bigcup_{p=1}^{n-1}\bigcup_{q=1}^{n-1} Mod(\varphi_{\frac{p}{n-1}} \& \psi_{\frac{q}{n-1}})| + | Mod(\varphi_0 \& \psi_0)|$$

Из (5) и вычислений получаем, что:

$$\bigcup_{p=1}^{n-1}\bigcup_{q=1}^{n-1} Mod(\varphi_{\frac{p}{n-1}} \& \psi_{\frac{q}{n-1}})| + | Mod(\varphi_0 \& \psi_0)| = 0;$$

т.е. φ и ψ одновременно не принимает значение 0. Если φ принимает значение не 0, то ψ обязательно равно 0; т.е. $\bigcup_{l=1}^{n-1}\bigcup_{k=1}^{n-1} (Mod(\varphi)_{\frac{k}{n-1}} \bar{\cup} Mod(\psi)_{\frac{l}{n-1}}) = P(S(\Sigma))$. Т.е. модели $Mod(\varphi)_{\frac{k}{n-1}}$ $\forall k = \overline{1, n-1}$ и $Mod(\psi)_{\frac{l}{n-1}}$ $\forall l = \overline{1, n-1}$ образуют пересекающие множества, такие что их объединение заполняет все наше пространство.

5) $$\rho(\varphi,\chi) = \frac{|\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \chi_0)| + \bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\varphi_0 \& \chi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}$$

$$\rho(\varphi,\psi) = \frac{|\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_0)| + |\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\varphi_0 \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}$$

$$\rho(\varphi,\chi) = \frac{|\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\psi_{\frac{k}{n-1}} \& \chi_0)| + |\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\psi_0 \& \chi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}$$

$$Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \chi) = \bigcup_{l=0}^{n-1} (\varphi_{\frac{k}{n-1}} \chi_0 \psi_{\frac{l}{n-1}}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(\varphi,\chi) n^{|S(\Sigma)|} = |\bigcup_{k=1}^{n-1}\bigcup_{l=0}^{n-1} Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \chi_0 \& \psi_{\frac{l}{n-1}})| + |\bigcup_{k=1}^{n-1}\bigcup_{l=0}^{n-1} Mod(\varphi_0 \& \chi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_{\frac{l}{n-1}})|$$

$$\rho(\varphi,\psi) n^{|S(\Sigma)|} = |\bigcup_{k=1}^{n-1}\bigcup_{l=0}^{n-1} Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_0 \& \chi_{\frac{l}{n-1}})| + |\bigcup_{k=1}^{n-1}\bigcup_{l=0}^{n-1} Mod(\varphi_0 \& \psi_{\frac{k}{n-1}} \& \chi_{\frac{l}{n-1}})|$$

$$\rho(\psi,\chi)n^{|S(\Sigma)|} = |\bigcup_{k=1}^{n-1}\bigcup_{l=0}^{n-1} Mod(\psi_{\frac{k}{n-1}} \& \chi_0 \& \varphi_{\frac{l}{n-1}})| + |\bigcup_{k=1}^{n-1}\bigcup_{l=0}^{n-1} Mod(\psi_0 \& \chi_{\frac{k}{n-1}} \& \varphi_{\frac{l}{n-1}})|$$

$$\rho(\varphi,\chi)n^{|S(\Sigma)|} = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1} |Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \chi_0 \& \psi_{\frac{l}{n-1}})| + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1} |Mod(\varphi_0 \& \chi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_{\frac{l}{n-1}})| +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1} |Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \chi_0 \& \psi_0)| + \sum_{k=1}^{n-1} |Mod(\varphi_0 \& \chi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_0)|$$

$$\rho(\varphi,\psi)n^{|S(\Sigma)|} = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1} |Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_0 \& \chi_{\frac{l}{n-1}})| + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1} |Mod(\varphi_0 \& \psi_{\frac{k}{n-1}} \& \chi_{\frac{l}{n-1}})| +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1} |Mod(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_0 \& \chi_0)| + \sum_{k=1}^{n-1} |Mod(\varphi_0 \& \chi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_0)|$$

$$\rho(\psi,\chi)n^{|S(\Sigma)|} = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1} |Mod(\psi_{\frac{k}{n-1}} \& \chi_0 \& \varphi_{\frac{l}{n-1}})| + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1} |Mod(\psi_0 \& \chi_{\frac{k}{n-1}} \& \varphi_{\frac{l}{n-1}})| +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1} |Mod(\psi_{\frac{k}{n-1}} \& \chi_0 \& \varphi_0)| + \sum_{k=1}^{n-1} |Mod(\psi_0 \& \chi_{\frac{k}{n-1}} \& \varphi_0)|$$

$\Rightarrow \rho(\varphi,\chi) \le \rho(\varphi,\psi) + \rho(\psi,\chi)$;

6) $\varphi^1 \equiv \varphi^2$ обозначает, что $\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\varphi^1)_{\frac{k}{n-1}} \equiv \bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\varphi^2)_{\frac{k}{n-1}}$

$\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\varphi^1_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_0) \equiv \bigcup_{k=1}^{n-1} Mod(\varphi^2_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_0)$ очевидно.

ч.т.д.

Следующая лемма дает возможность упрощения вычисления расстояния в нашей ситуации.

Лемма (о локальности вычисления расстояния и поведении при расширении)

Для любого $S(\Sigma_0)$ т. что $S(\varphi) \cup S(\psi) \subseteq S(\Sigma_0)$ и любого $S(\Sigma_1)$, т. что $S(\Sigma_0) \subset S(\Sigma_1)$ имеет место равенство: $\rho_{S(\Sigma_0)}(\varphi,\psi) = \rho_{S(\Sigma_1)}(\varphi,\psi)$.

Доказательство

Рассмотрим $S(\Sigma_1) = S(\Sigma_0) \cup \{\chi\}, \quad \chi \notin S(\Sigma_0)$.

При этом $P(S(\Sigma_1)) = P(S(\Sigma_0)) \cup (\bigcup_{k=1}^{n-1}\{M \cup \{\chi_{\frac{k}{n-1}}\} \mid M \in P(S(\Sigma_0))\})$ и $|P(S(\Sigma_1))| = n|P(S(\Sigma_0))|$

Также $|\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma_1)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi)| = n|\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma_0)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_0)|$

т.о. $P(S(\Sigma_1)) = \overbrace{\underbrace{P(S(\Sigma_0))}_{1} \cup \underbrace{\bigcup_{k=1}^{n-1} \underbrace{\{M \cup \{\chi_{\frac{k}{n-1}}\} \mid M \in P(S(\Sigma_0))\}}_{1}}_{n-1}}^{n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho_{S(\Sigma_1)}(\varphi,\psi) = \frac{|\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma_1)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_0)| + |\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma_1)}(\varphi_0 \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma_1)|}} =$$

$$= \frac{n\,|\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma_0)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \,\&\, \psi_0)| + n\,|\bigcup_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma_0)}(\varphi_0 \,\&\, \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n \cdot n^{|S(\Sigma_0)|}} = \rho_{S(\Sigma_0)}(\varphi,\psi)$$

Пусть теперь $|S(\Sigma_1) \setminus S(\Sigma_0)| = |\{A^1,...,A^m\}| = m \geq 1$.

Тогда $\rho_{S(\Sigma_0)}(\varphi,\psi) = \rho_{S(\Sigma_0)\cup\{A^1\}}(\varphi,\psi) = ... = \rho_{S(\Sigma_0)\cup\{A^m\}}(\varphi,\psi) = \rho_{S(\Sigma_1)}(\varphi,\psi)$.

ч.т.д.

Определение и свойства меры опровержимости

Подход к определению меры опровержимости основывается на естественном предположении: чем больше моделей на которых высказывание принимает значение не равное 1, тем высказывание легче опровержимо. Поскольку возможных значений не равных 1 несколько, то предлагаем учитывать их монотонными весами по всем этим значениям и для каждого такого значения истинности нормированными.

Перейдем к более формальному определению. Мера опровержимости $I_{S(\Sigma)}(\varphi)$ для формул из $\Phi(\Sigma) = \{\varphi \mid S(\varphi) \subset S(\Sigma)\}$ задается равенством

$$I_{S(\Sigma)}(\varphi) = \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}},$$

где α_i удовлетворяет условиям: $\begin{cases} 0 \leq \alpha_i \leq 1; \\ \alpha_i + \alpha_{n-1-i} = 1 \ \forall i = 0,...,\dfrac{n-1}{2}; \\ \alpha_k \geq \alpha_i \ \forall k \leq i; \end{cases}$

Лемма (свойства меры $I_{S(\Sigma)}$) Для любых формул $\varphi, \psi \in \Phi(\Sigma)$ справедливы

1) $0 \leq I_{S(\Sigma)}(\varphi) \leq 1;$
2) $I_{S(\Sigma)}(\varphi) + I_{S(\Sigma)}(\neg\varphi) = 1;$
3) $I_{S(\Sigma)}(\varphi \,\&\, \psi) \geq \max\{I_{S(\Sigma)}(\varphi), I_{S(\Sigma)}(\psi)\}$;
4) $I_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi) \leq \min\{I_{S(\Sigma)}(\varphi), I_{S(\Sigma)}(\psi)\}$;
5) $I_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi) + I_{S(\Sigma)}(\varphi \,\&\, \psi) = I_{S(\Sigma)}(\varphi) + I_{S(\Sigma)}(\psi)$;

Доказательство:

1) Неравенство очевидно, так как. $Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}})$ попарно не пересекаются, а в объединении дают все множество $P(S(\Sigma))$. Свойство 1 доказано.

2) $I_{S(\Sigma)}(\varphi) + I_{S(\Sigma)}(\neg\varphi) =$

$$= \alpha_0 \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_0)|}{n^{|S(\Sigma)|}} + \alpha_{n-1} \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_1)|}{n^{|S(\Sigma)|}} + \sum_{i=1}^{n-2} (\alpha_i + \alpha_{n-1-i}) \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} = \frac{|P(S(\Sigma))|}{n^{|S(\Sigma)|}} = 1;$$

3) Распишем подробно, что такое $I_{S(\Sigma)}(\varphi \,\&\, \psi)$:

$$I_{S(\Sigma)}(\varphi \& \psi)=\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i \frac{|Mod_{S(\Sigma)}((\varphi \& \psi)_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\Big(\sum_{k=i}^{n-1}\Big(\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}+\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}\Big)\Big)-\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}};$$

Распишем подробно $I_{S(\Sigma)}(\varphi)$:

$$I_{S(\Sigma)}(\varphi)=\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}=\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\sum_{k=i}^{n-1}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}+\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\sum_{k=0}^{i}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}-\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}};$$

$$I_{S(\Sigma)}(\varphi \& \psi)-I_{S(\Sigma)}(\varphi)=\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{k=i}^{n-1}\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}-\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{k=i}^{n-1}\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{i}(\alpha_k-\alpha_i)\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}+\sum_{ki=0}^{n-2}\sum_{k=i}^{n-1}\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}\geq 0;$$

Получили, что $I_{S(\Sigma)}(\varphi \& \psi)\geq I_{S(\Sigma)}(\varphi)$. По симметрии получим аналогичное неравенство для ψ: $I_{S(\Sigma)}(\varphi \& \psi)\geq I_{S(\Sigma)}(\psi)$

=> $I_{S(\Sigma)}(\varphi \& \psi)\geq \max\{I_{S(\Sigma)}(\varphi), I_{S(\Sigma)}(\psi)\}$.

Свойство 3 доказано.

4) Распишем подробнее $I_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi)$:

$$I_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi)=\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}((\varphi \vee \psi)_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\Big(\sum_{k=0}^{i}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}+\sum_{k=0}^{i}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}\Big)-$$

$$-\sum_{i=0}^{n-2}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}};$$

Распишем подробнее $I_{S(\Sigma)}(\varphi)$:

$$I_{S(\Sigma)}(\varphi)=\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}=\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\sum_{k=i}^{n-1}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}+\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i\sum_{k=0}^{i}\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}}-\alpha_i\frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}};$$

Вычислим разность двух полученных выше равенств:

$$I_{S(\Sigma)}(\varphi) - I_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi) = \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i \sum_{k=i}^{n-1} \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} + \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i \sum_{k=0}^{i} \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{k} \alpha_i \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{i}{n-1}} \& \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} - \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i \sum_{k=0}^{i} \alpha_i \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}} \geq \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{i} \alpha_i \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \& \psi_{\frac{i}{n-1}})|}{n^{|S(\Sigma)|}};$$

Получили, что $I_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi) \leq I_{S(\Sigma)}(\varphi)$. По симметрии получим аналогичное неравенство для ψ: $I_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi) \leq I_{S(\Sigma)}(\psi)$

=> $I_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi) \leq \min\{I_{S(\Sigma)}(\varphi), I_{S(\Sigma)}(\psi)\}$.

Свойство 4 доказано.

5) Из формул, полученных при доказательстве пунктов 3)- 4) непосредственно следует формула:

$I_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi) + I_{S(\Sigma)}(\varphi \& \psi) = I_{S(\Sigma)}(\varphi) + I_{S(\Sigma)}(\psi)$.

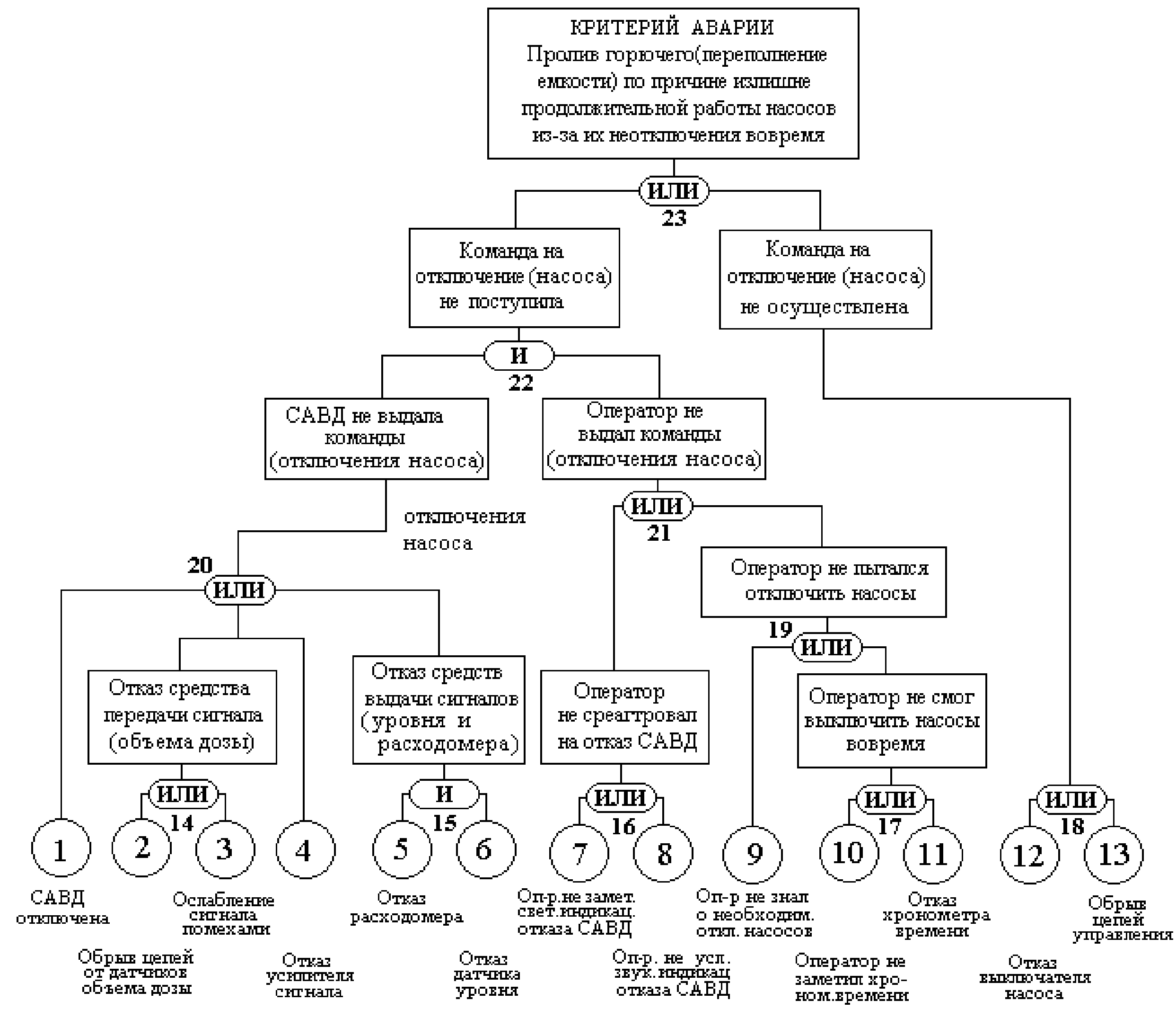

Рис.1. Дерево “отказа“ заправочной операции

Заметим, что связь меры опровержимости с введенным выше расстоянием не такая простая как в случаях логик при n=2 или 3. Для введения расстояния было перебрано много вариантов, для них желаемые свойства, с точки зрения экспертов, не выполнялись. Так что надеяться на другие случаи не приходится и можно констатировать, что в общем случае нет тесной связи между расстоянием и мерой опровержимости.

Рассмотрено дерево событий (рис.1), используемого для анализа причин возникновения аварийных ситуаций при автоматизированной заправке емкости. Структура дерева событий включает одно головное событие (авария, инцидент), которое соединяется с набором соответствующих нижестоящих событий (ошибок, отказов, неблагоприятных внешних воздействий), образующих причинные цепи (сценарии аварий).

Проанализированы из дерева различные высказывания об отказах заправочной станции и найдены расстояния между различными формулами и их меры опровержимости при различных n. Результаты показали адекватность предлагаемого подхода и качественную похожесть результатов на случаи n=2 и n=3. Для больших n ситуация такова: нами рассмотрено несколько задач по вычислению расстояния между формулами для различных n. Из полученных таблиц следует, что расстояния различны для различных n. И с ростом n расстояния все меньше и меньше отличаются друг от друга. Аналогичная ситуация со значениями меры опровержимости.

Заключение

Предложенные расстояния и мера опровержимости могут использоваться в изучении баз знаний, их пополнений, кластеризации, выявлению противоречивости, а так же в вопросах распознавания образов и адаптивных методах построения логических решающих функций по вероятностным высказываниям.

Литература

[1] Лбов Г.С., Старцева Н.Г. Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999.

[2] Кейслер Г., Чэн Ч.Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977.

[3] Карпенко А.С. Логики Лукасевича и простые числа. –Москва: «Наука» 2000.

[4] G.Lbov, M.Gerasimov. Constructing of a Consensus of Several Experts Statements. In: Proc. of XII Int. Conf. ”Knowledge-Dialogue-Solution”, 2006, pp. 193-195.

[5] G.S. Lbov, M.Gerasimov. Interval Prediction Based on Experts’ Statements. In: Proc. of XIII Int. Conf. ”Knowledge-Dialogue-Solution”, 2007, Vol. 2, pp. 474-478.

[6] G.S.Lbov, M.K.Gerasimov. Determining of Distance Between Logical Statements in Forecasting Problems. In: Artificial Intelligence, 2’2004 [in Russian]. Institute of Artificial Intelligence, Ukraine.

[7] A.Vikent’ev. Measure of Refutation and Metrics on Statements of Experts (Logical Formulas) in the Models for Some Theory. In: Int. Journal ”Information Theories & Applications”, 2007, Vol. 14, No.1, pp. 92-95.

Author's Information

Vikent’ev Alexandr A. - *Institute of Mathematics, SB RAS, Akadem. Koptyug St., bl.4, Novosibirsk, Russia;*
e-mail: vikent@math.nsc.ru