ИЕРАРХИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

Альберт Воронин

Аннотация. *При векторном подходе задача принятия решений посредством декомпозиции свойств альтернатив представляется иерархической системой критериев. Возникает проблема обратного перехода к оценке и сравнению альтернатив в целом. Эта проблема предполагает решение задачи композиции критериев по уровням иерархии. Задача решается методом вложенных скалярных сверток.*

Ключевые слова*: многокритериальный выбор альтернатив, иерархические системы, декомпозиция и композиция критериев, вложенные скалярные свертки, принятие решений.*

ACM Classification Keywords: *H.4.2 Information Systems Applications: Types of Systems: Decision Support.*

Conference*: The paper is selected from XIV*[th] *International Conference "Knowledge-Dialogue-Solution" KDS 2008, Varna, Bulgaria, June-July 2008*

Содержание проблемы

В достаточно общем виде [1] задача принятия решений может быть представлена схемой $\{\{x\},Y\} \to x*$, где $\{x\}$ – множество объектов (альтернатив); *Y* – функция выбора (правило, устанавливающее предпочтительность на множестве альтернатив); *x** – выбранные альтернативы (одна или более). Если в процессе решения предпринимается целостный подход, то механизм выбора отражается непосредственным использованием функции *Y.* При этом осуществляется оценка объекта в целом, и альтернатива выбирается по непосредственному сравнению объектов как гештальтов (целостных образов объектов без детализации свойств). Для лица, принимающего решение (ЛПР) в этом случае функция выбора *Y* при сравнении альтернатив означает «нравится» или «не нравится». Сложнее обстоит дело, если возникает вопрос, *почему* нравится (или не нравится).

В теории принятия решений более распространен так называемый векторный подход, при котором объект оценивается не в целом, а по результатам сравнения отдельных его свойств. В отличие от откровенно субъективного целостного подхода, здесь намечается возможность формализации процесса принятия решений.

Механизм векторного подхода требует при выделении свойств альтернатив осуществить декомпозицию (разложение) функции *Y* на совокупность (вектор) функций выбора *y*. Под *декомпозицией* функции выбора *Y* понимается [2] ее эквивалентное представление посредством определенной совокупности других функций выбора, *y*, *композицией* которых является исходная функция выбора *Y*. Выделение свойств альтернатив является декомпозицией, приводящей к иерархической структуре свойств. Свойства первого иерархического уровня могут подразделяться на наборы следующих конкретных свойств и т.д. Глубина деления определяется стремлением дойти до тех свойств, которые удобно сравнивать одно с другим. Удобнее всего сравнивать те свойства, которые оцениваются в числах.

Свойства, для которых существуют объективные численные характеристики, принято называть критериями. Более строго: **критериями** называются количественные показатели свойств объекта, числовые значения которых являются мерой качества объекта оценки по отношению к данному свойству. Получение набора критериев – конечный итог иерархической декомпозиции. Количество уровней зависит от требуемой глубины декомпозиции. Для каждого начального свойства глубина декомпозиции может быть различной.

После выполнения этапа декомпозиции и оценки отдельных свойств должна быть решена проблема обратного перехода к требуемому сравнению альтернатив в целом. Эта проблема предполагает решение задачи *композиции* критериев по уровням иерархии, что достаточно непросто, особенно при значительной глубине декомпозиции свойств. В простейшем и наиболее распространенном случае (двухуровневая иерархия) задача композиции решается традиционным получением однократной скалярной свертки критериев. Но уже при наличии трехуровневой иерархии требуются другие подходы.

Можно утверждать, что *любая многокритериальная задача может быть представлена иерархической системой*, на нижних уровнях которой осуществляется оценка объекта по отдельным свойствам с помощью векторов критериев, а на верхнем уровне посредством механизма композиции получается оценка объекта в целом.

Постановка задачи

Качество альтернативы определяется иерархической системой векторов

$$y^{(j-1)} = \{y_i^{(j-1)}\}_{i=1}^{n^{(j-1)}}, \ j \in [2, m],$$

где $y^{(j-1)}$ – вектор критериев на (*j*-1)-м уровне иерархии, по компонентам которого оценивается качество свойств альтернативы на *j*-м уровне; *m* – количество уровней иерархии; $n^{(j-1)}$ – количество оцениваемых свойств (*j*-1)-го уровня иерархии. Численные значения *n* критериев $y^{(1)} = y$ первого уровня иерархии для данной альтернативы заданы. Ясно, что $n^{(1)} = n$ и $n^{(m)} = 1$.

Один и тот же критерий (*j*-1)-го уровня может участвовать в оценке нескольких свойств *j*-го уровня, т.е. в иерархии возможны перекрестные связи. Структурная схема системы критериев качества альтернативы показана на Рис.1.

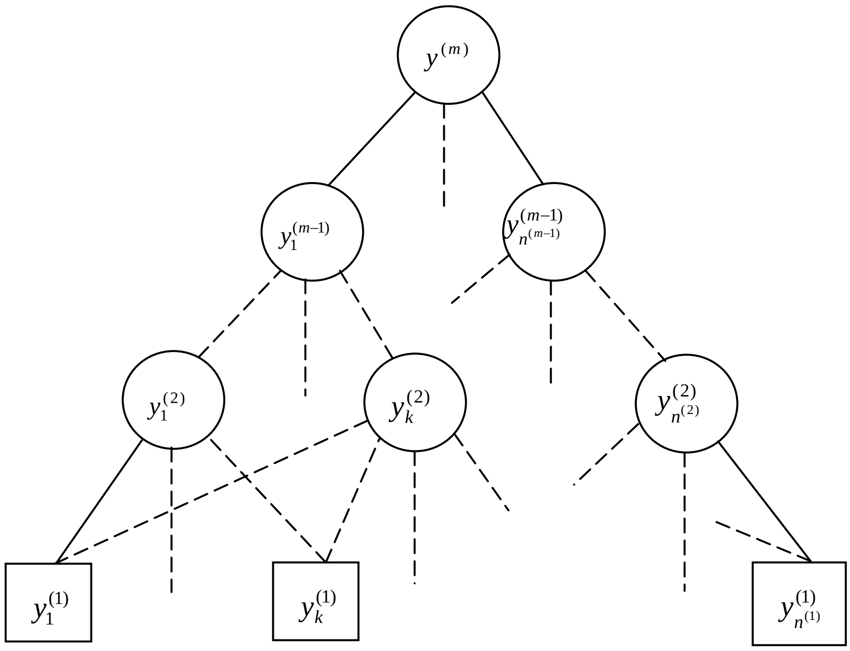

Рис.1

Важность (значимость) каждой из компонент критерия (*j*-1)-го уровня при оценке *k*-го свойства *j*-го уровня характеризуется коэффициентом приоритета, совокупность которых составляет систему векторов приоритета

$$p_{ik}^{(j-1)} = \{p_{ik}^{(j-1)}\}_{k=1}^{n^{(j)}}, \ j \in [2, m].$$

Требуется найти аналитическую оценку y^* и качественную оценку эффективности данной альтернативы, а из имеющихся альтернатив выбрать лучшую.

Метод решения

Для аналитической оценки эффективности иерархических структур предлагается применить метод вложенных скалярных сверток [3]. Композиция осуществляется по «принципу матрешки»: *скалярные свертки взвешенных компонент векторных критериев низшего уровня служат компонентами векторных критериев высшего уровня*. Скалярная свертка критериев, полученная на самом верхнем уровне, автоматически становится выражением для оценки эффективности всей иерархической системы в целом.

Алгоритм решения задачи методом вложенных скалярных сверток представляется итерационной последовательностью операций взвешенной скалярной свертки векторных критериев каждого уровня иерархии снизу доверху с учетом векторов приоритета на основе выбранной схемы компромиссов

$$\{(y^{(j-1)}, p^{(j-1)}) \to y^{(j)}\}_{j\in[2,m]}, \tag{1}$$

а поиск оценки эффективности всей иерархической системы (альтернативы) в целом выражается задачей определения скалярной свертки критериев на верхнем уровне иерархии:

$$y^* = y^{(m)}.$$

При использовании рекуррентной формулы (1) важным представляется рациональный выбор схемы компромиссов. Для метода вложенных скалярных сверток адекватной является *нелинейная схема компромиссов*, описанная в [4]. Установлено, что без потери общности предпосылкой для ее применения является то, что все частные критерии неотрицательны, подлежат минимизации и являются ограниченными:

$$0 \le y_i \le A_i, A = \{A_i\}_{i=1}^n,$$

где A – вектор ограничений.

Выражение для оценки k-го свойства альтернативы на j–м уровне иерархии с применением нелинейной схемы компромиссов имеет вид

$$y_k^{(j)}(p_k^{(j-1)}, y_{0k}^{(j-1)}) = \sum_{i=1}^{n_k^{(j-1)}} p_{ik}^{(j-1)}[1 - y_{0ik}^{(j-1)}]^{-1}, k \in [1, n^{(j)}], \tag{2}$$

где критерии (j-1)-го уровня нормированы, например, по формуле $y_0=y/A$. Таким образом, $y_{0ik}^{(j-1)}$ – компоненты нормированного вектора $y_0^{(j-1)}$, участвующие в оценке k-го свойства альтернативы на j-м уровне иерархии; $n_k^{(j-1)}$ – их количество; $n^{(j)}$ – число оцениваемых свойств на j-м уровне.

Коэффициенты приоритета p – это формальные параметры, имеющие двоякий физический смысл. С одной стороны, это коэффициенты приоритета, выражающие предпочтения ЛПР по отдельным критериям. С другой – это коэффициенты содержательной регрессионной модели, построенной на основе концепции нелинейной схемы компромиссов. Определение коэффициентов p на каждом уровне иерархии может быть выполнено путем оптимизации на симплексе с использованием дуального подхода, описанного в [4], или методом экспертных оценок по шкале баллов.

В последнем случае ЛПР или эксперт должен оценить относительное влияние каждого частного критерия низшего уровня иерархии на общую оценку k-го свойства альтернативы на следующем уровне в заданных условиях и соотнести свою оценку с соответствующей точкой на шкале, характеризуемой числом f. Допускается выбирать точки между числами или приписывать несколько критериев одной точке на шкале.

Областью определения коэффициентов приоритета $p \in \Gamma_p$ является симплекс

$$\Gamma_p = \{p \mid p_i \ge 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}. \tag{3}$$

Такая нормировка выполняется, если коэффициенты приоритета определить по формуле

$$p_{ik}^{(j-1)} = f_{ik} / \sum_{i=1}^{n_k^{(j-1)}} f_{ik}, k \in [1, n^{(j)}], j \in [2, m],$$

где $p_{ik}^{(j-1)}$ – i-я компонента вектора приоритета критерия на $(j-1)$-м уровне иерархии при расчете оценки эффективности k-го свойства j-го уровня; f_{ik} – оценка значимости i-го свойства $(j-1)$-го уровня для k-го свойства j-го уровня (определяется экспертами или ЛПР по шкале баллов).

В наиболее простом и достаточно распространенном случае формулируется и решается многокритериальная задача без приоритетов, когда ЛПР полагает, что все параметры значимости для всех свойств альтернативы *одинаковы*. В этом случае используется простейшая скалярная свертка по нелинейной схеме компромиссов в унифицированной форме [4].

Для того, чтобы формула (2) отражала идею метода вложенных скалярных сверток в соответствии с рекуррентной формулой (1), необходимо полученное выражение *нормировать*, т.е. получить относительный критерий $y_{0k}^{(j)} \in [0;1]$ такой, чтобы он был минимизируемым, а его предельная величина была единицей. Однако упомянутый выше способ нормализации критериев $y_0=y/A$ годится только для нижнего (первого) уровня иерархии, где предельные значения критериев (ограничения) обычно физически обоснованы и известны. Для других уровней приходится искать другие подходы. Так, в [3] рассмотрена возможность расчета условий нормировки, исходя из принципа «солидарной ответственности» критериев. В [5] и [6] предлагается использовать подход калибровочных вычислений нормирующего множителя. Рассмотренные методы довольно громоздки и не всегда физически прозрачны.

Конструкция нелинейной схемы компромиссов дает возможность нормировать свертку (2) не к максимальному (что в данном случае затруднительно), а к *минимальному* значению свертки критериев. Действительно, идеальными для минимизируемых критериев являются их нулевые значения. Положив в формуле (2)

$$y_{0ik}^{(j-1)} = 0, \forall i \in [1, n_k^{(j-1)}]$$

и учитывая нормировку (3), получим $y_{k\min}^{(j)} = 1$.

Нормировка к минимальному значению

$$\hat{y}_{0k}^{(j)} = \frac{y_{k\min}^{(j)}}{y_k^{(j)}} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n_k^{(j-1)}} p_{ik}^{(j-1)} [1 - y_{0ik}^{(j-1)}]^{-1}}$$

дает относительный, но *максимизируемый* критерий для *j*–го уровня. Действительно, при $y_{0ik}^{(j-1)} \to 1$ этот критерий обращается в ноль, а при $y_{0ik}^{(j-1)} \to 0$ он стремится к единице. Чтобы получить требуемый *минимизируемый* относительный критерий мы должны положить

$$y_{0k}^{(j)} = 1 - \hat{y}_{0k}^{(j)}$$

и окончательное выражение для рекуррентной формулы расчета аналитических оценок свойств альтернатив на всех уровнях иерархии приобретает вид

$$y_{0k}^{(j)} = 1 - \{ \sum_{i=1}^{n_k^{(j-1)}} p_{ik}^{(j-1)} [1 - y_{0ik}^{(j-1)}]^{-1} \}^{-1}, k \in [1, n^{(j)}], j \in [2, m] \ . \tag{4}$$

Качественная (лингвистическая) оценка альтернативы получается сопоставлением аналитической оценки с обращенной нормированной фундаментальной шкалой. Общее понятие о порядковой фундаментальной шкале описано в [7]. Интервальная нормированная обращенная шкала представлена Таблицей.

Таблица

Категория качества	Интервалы обращенной нормированной фундаментальной шкалы оценок y_0
Неприемлемое	1,0 – 0,7
Низкое	0,7 – 0,5
Удовлетворительное	0,5 – 0,4
Хорошее	0,4 – 0,2
Высокое	0,2 – 0,0

Модельный пример

Требуется найти количественную $y_0^* = y_0^{(3)}$ и качественную оценки проекта самолета по двум основным свойствам: комфортность, характеризуемая неизвестной пока оценкой критерия $y_{01}^{(2)}$ и надежность, которой сопоставляется неизвестная пока оценка критерия $y_{02}^{(2)}$. Свойство комфортности, в свою очередь, оценивается по трем критериям: расстояние между креслами в пассажирском салоне y_{01}, уровень шума в салоне y_{02} и уровень вибрации пола в салоне y_{03}. Надежность оценивается вероятностью отказов оборудования y_{04} и прочностью конструкции y_{05}. Кроме этих двух в оценке надежности принимает участие критерий уровня вибрации пола y_{03}, т.е. имеет место одна перекрестная связь. Все указанные критерии нормированы и приведены к одному способу экстремизации, а именно, все они подлежат *минимизации*. Критерии низшего уровня принимают участие в оценке свойств высшего уровня с коэффициентами приоритета $p_{ik}^{(j-1)}, j \in [2, m]$. Структурная схема трехуровневой иерархии критериев для оцениваемого проекта представлена на Рис.2.

Заданы следующие числовые значения величин. Критерии нижнего (первого) уровня иерархии: y_{01} =0,3; y_{02} =0,5; y_{03} =07; y_{04} =0,2; y_{05} =0,1. Коэффициенты приоритета: $p_{11}^{(1)}$ =0,7; $p_{21}^{(1)}$ =0,2; $p_{31}^{(1)}$ =0,1; $p_{32}^{(1)}$ =0,1; $p_{42}^{(1)}$ =0,45; $p_{52}^{(1)}$ =0,45; $p_{13}^{(2)}$ =0,5; $p_{23}^{(2)}$ =0,5.

На первом этапе композиции критериев, исходя из рекуррентной формулы (4), получим выражение для аналитической оценки свойства комфортности (второй уровень иерархии):

$$y_{01}^{(2)} = 1 - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_1^{(1)}} p_{i1}^{(1)} (1 - y_{0i1}^{(1)})^{-1}},$$

где $n_1^{(1)}$ =3 и $y_{011}^{(1)} = y_{01}; y_{021}^{(1)} = y_{02}; y_{031}^{(1)} = y_{03}$.

Подставляя численные значения, получим

$$y_{01}^{(2)} = 1 - \frac{1}{0{,}7\frac{1}{1-0{,}3} + 0{,}2\frac{1}{1-0{,}5} + 0{,}1\frac{1}{1-0{,}7}} = 0{,}42\,.$$

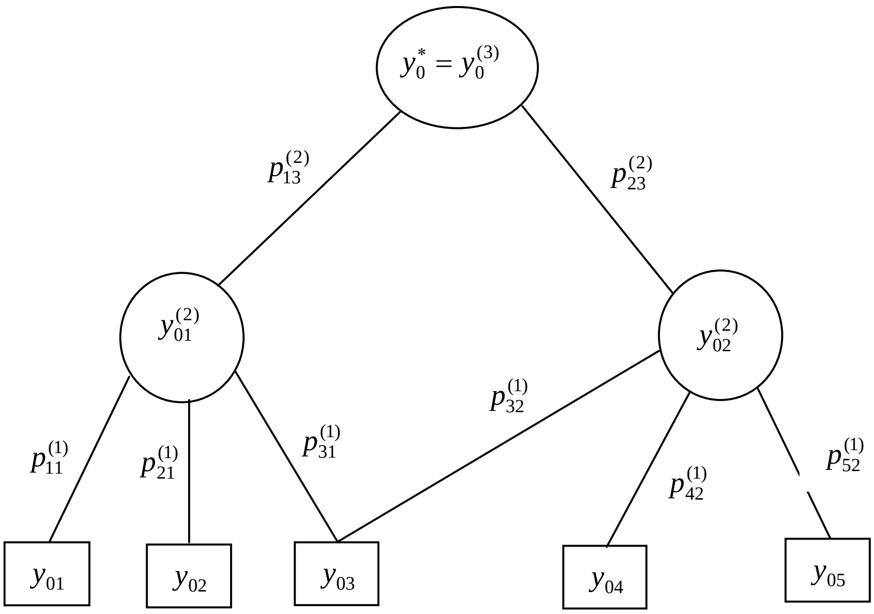

Рис.2

Сопоставляя эту аналитическую оценку с Таблицей, найдем, что свойство комфортности для данного проекта самолета качественно оценивается как *удовлетворительное*.

Выражение для аналитической оценки свойства надежности (тоже второй уровень иерархии) имеет вид

$$y_{02}^{(2)} = 1 - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_2^{(1)}} p_{i2}^{(1)} (1 - y_{0i2}^{(1)})^{-1}},$$

где с учетом перекрестной связи $n_2^{(1)}$=3 и $y_{012}^{(1)} = y_{03}; y_{022}^{(1)} = y_{04}; y_{032}^{(1)} = y_{05}$. Коэффициенты приоритета $p_{12}^{(1)} = p_{32}^{(1)}; p_{22}^{(1)} = p_{42}^{(1)}; p_{32}^{(1)} = p_{52}^{(1)}$.

Подставим численные значения и получим

$$y_{02}^{(2)} = 1 - \frac{1}{0{,}1\frac{1}{1-0{,}7} + 0{,}45\frac{1}{1-0{,}2} + 0{,}45\frac{1}{1-0{,}1}} = 0{,}16 .$$

В соответствии с Таблицей, качество свойства надежности для данного проекта оценивается как *высокое*.

На заключительном (втором) этапе композиции критериев формула (4) приобретает вид

$$y_0^* = y_0^{(3)} = 1 - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_3^{(2)}} p_{i3}^{(2)} (1 - y_{0i3}^{(2)})^{-1}},$$

где $n_3^{(2)}$=2 и $y_{013}^{(2)} = y_{01}^{(2)}; y_{023}^{(2)} = y_{02}^{(2)}$.

Подставляя численные значения, получим

$$y_0^* = 1 - \frac{1}{0{,}5\frac{1}{1-0{,}42} + 0{,}5\frac{1}{1-0{,}16}} = 0{,}32 .$$

По этой аналитической оценке качество данного проекта самолета в целом оценивается как *хорошее*.

Литература

Губанов В.А., Захаров В.В., Коваленко А.Н. Введение в системный анализ. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. – 232 с.

Макаров И.М., Виноградская Т.М., Рубчинский А.А., Соколов В.Б. Теория выбора и принятия решений. – М.: Наука, 1982. – 328 с.

Воронин А.Н. Вложенные скалярные свертки векторного критерия // Проблемы управления и информатики. – 2003. – № 5. – С. 10-21.

Воронин А.Н., Зиатдинов Ю.К., Козлов А.И. Векторная оптимизация динамических систем. – К.: Техніка, 1999. – 284с.

Воронин А.Н. Многокритериальная оценка и оптимизация иерархических систем. Proceedings of the XIII–th International Conference “Knowledge-Dialogue-Solution”, vol.1. –Varna, 2007. –P. 174-183.

Воронин А.Н. Метод многокритериальной оценки и оптимизации иерархических систем // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 3. – С. 84-92.

Saaty T.L. Multicriteria Decision Making: The Analytical Hierarchy Process. – N.Y.: McGraw-Hill, 1990. – 380 p.

Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 165 с.

Сведения об авторе

Воронин Альберт Николаевич *– профессор, доктор технических наук, профессор кафедры компьютерных информационных технологий Национального авиационного университета, проспект Комарова, 1, Киев-58, 03058 Украина.*