ОДИН КЛАСС ОТРАСЛЕВЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИЙ ПРИБЫЛИ ДЛЯ ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКИ

Игорь Ляшенко

Аннотация: *Исследуется вопрос построения эколого-экономической производственной функции отрасли, мощности которой распределены по технологиям. Установлены двойственные соотношения, связывающие производственную функцию и функцию прибыли и позволяющие одну из них восстанавливать по другой. Для случая конечного числа технологий и линейности функций затрат экономических и экологических ресурсов указан эффективный путь построения производственной функции.*

Ключевые слова: *экологическая экономика, экономические и экологические ресурсы, производственная функция, функция прибыли, параметрическая задача линейного программирования, двойственные задачи.*

ACM Classification Keywords: *G.1.6 Optimization – Constrained optimization, J.4 Social and Behavioral sciences – Economics*

Conference: *The paper is selected from XIVth International Conference "Knowledge-Dialogue-Solution" KDS 2008, Varna, Bulgaria, June-July 2008*

Введение

Объектом настоящего исследования является экологическая экономика, в которой действуют рыночные механизмы совершенной конкуренции. Рассматривается отрасль, выпускающая однородную продукцию и при этом использующая n видов производственных факторов текущего пользования (экономических ресурсов) и m видов лимитов на загрязнения окружающей среды (экологических ресурсов). В отрасли имеются различные технологические процессы производства, характеризующиеся различными затратами экономических ресурсов и различными выбросами загрязнений в окружающую среду при выпуске единицы продукции отрасли. Интенсивности использования технологий ограничены имеющимися в отрасли мощностями.

В работе Петрова А.А. и Поспелова И.Г. [Петров, Поспелов, 1979] была обоснована целесообразность использования производственных функций, построенных на основе информации о распределении мощностей по технологиям, в макроэкономических моделях роста. Впервые распределения мощностей по технологиям были использованы в [Hauthakker, 1955] для анализа производственных функций типа Кобба-Дугласа. В работах [Johansen, 1969], [Johansen, Hersoug, 1969], [Johansen, 1972] был предложен подход к построению производственной функции на основе информации о распределении ее мощностей по технологиям. В работе [Hildenbrand, 1981] изучались некоторые свойства соответствия между распределениями мощностей по технологиям и производственными функциями. В работе [Шананин, 1979] для доказательства однозначности этого соответствия использовались функции прибыли. В работе [Шананин, 1984] исследование этого соответствия производилось на основе изучения преобразований, связывающих функции прибыли с распределением мощностей по технологиям и производственными функциями. Однако все это касалось производственных функций и функций прибыли, зависимых только от экономических ресурсов.

В последнее время большой интерес исследователей проявляется к изучению экологический экономики и построению соответствующих эколого-экономических производственных функций. Актуальным стало установление соответствия между производственной функцией и функцией прибыли для экологической экономики рыночного типа. Настоящая работа и посвящается этому вопросу. При этом применяется методика, описанная в работе Шананина А.А. [Шананин, 1984].

Основной текст

Предположим, что при создании мощности осуществляется выбор технологии, по которой эта мощность функционирует. Тогда в любой фиксированный момент времени мощности отрасли оказываются распределенными по технологиям.

Каждая технология характеризуется вектором $x=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ затрат экономических ресурсов на выпуск единицы продукции, а также при этом вектором $z=(z_1,z_2,...,z_m)^T$ выбросов загрязнений в окружающую среду. Предположим, что существует локально суммируемая, неотрицательная функция $\mu(x,z)$, определенная на R^+_{n+m} и такая, что для каждого ограниченного борелевского множества $D\subset R^+_{n+m}$ суммарная мощность $M(D)$ технологий (*x*, *z*) равна

$$M(D)=\int_D \mu(x,z)dxdz.$$

Функция $\mu(x,z)$ является распределением мощностей по технологиям. Множество $D_\mu=\left\{(x,z)\in R^+_{n+m}\,\middle|\,\mu(x,z)>0\right\}$ называется множеством допустимых технологий. Считается, что $D_\mu\subset R^+_{n+m}$ имеет положительную меру Лебега.

Суммарная мощность отрасли

$$M=\int_{R^+_{n+m}} \mu(x,z)dxdz.$$

Для полной загрузки мощностей отрасли необходимо, чтобы поток экономических и экологических ресурсов, который поступает в распоряжение отрасли, был не меньше таких величин

$$L_i=\int_{R^+_{n+m}} x_i\mu(x,z)dxdz,\quad i=1,...,n;$$

$$S_j=\int_{R^+_{n+m}} z_j\mu(x,z)dxdz,\quad j=1,...,m.$$

Пусть $l=(l_1,l_2,...,l_n)^T$ – вектор потоков экономических ресурсов, $s=(s_1,s_2,...,s_m)^T$ - вектор потоков экологических ресурсов, поступающих в распоряжение отрасли. Если $l_i<L_i$, $1\le i\le n$, или $s_j<S_j$, $1\le j\le m$, то нельзя полностью загрузить все мощности. Обозначим через $u(x,z)$ степень загрузки мощности, соответствующей технологии (*x*, *z*). Предполагается, что $u(x,z)$ – измеримая по Лебегу функция, определенная на R^+_{n+m}. Рассмотрим задачу о такой загрузке мощностей отрасли, при которой имеющиеся потоки экономических ресурсов *l* и экологических ресурсов *s* распределяются так, чтобы суммарный выпуск продукции был максимальным:

$$\int_{R^+_{n+m}} u(x,z)\mu(x,z)dxdz\to\max_{u(x,z)},\tag{1}$$

$$\int_{R^+_{n+m}} xu(x,z)\mu(x,z)dxdz\le l,\tag{2}$$

$$\int_{R^+_{n+m}} zu(x,z)\mu(x,z)dxdz\le s,\tag{3}$$

$$0\le u(x,z)\le 1.\tag{4}$$

В работе Шананина А.А. [Шананин, 1984] доказаны утверждения, которые вытекают из обобщенной леммы Неймана-Пирсона, о существовании решения аналогичной задачи, в которой учитываются только затраты экономических ресурсов:

$$\int_{R^+_{n+m}} u(x)\mu(x)dx \to \max_{u(x)},$$

$$\int_{R^+_{n+m}} xu(x)\mu(x)dx \le l,$$

$$0 \le u(x,z) \le 1.$$

Наше исследование состоит в обобщении результатов работы [Шананин, 1984] на случай задачи (1) – (4). В большой степени это переформулировка соответствующих теорем и эколого-экономическая интерпретация полученных результатов. Главная цель – это показать применимость результатов [Шананин, 1984] для случая экологической экономики и показать, как эффективно строить в аналитическом виде производственную функцию при конечном числе линейных технологий.

Теорема 1. При $l \ge 0, \quad s \ge 0$ задача оптимизации (1) – (4) имеет решение $u^*_{ls}(x,z)$.

Доказательство этой теоремы осуществляется аналогично [Шананин, 1984].

Теорема 2. Пусть $u^*_{ls}(x,z)$ – оптимальное решение задачи (1) – (4) при $l \ge 0, \quad s \ge 0$. Тогда существуют такие не равные нулю одновременно числа $p_0 \ge 0, \quad p = (p_1,...,p_n) \ge 0, \quad q = (q_1,...,q_m) \ge 0$, что

$$u^*_{ls} = \begin{cases} 1 \quad \textit{при} \quad \textit{почти} \quad \textit{всех} \quad (x,z) \in D_\mu \cap \{(x,z) | px + qz < p_0\}, \\ 0 \quad \textit{при} \quad \textit{почти} \quad \textit{всех} \quad (x,z) \in D_\mu \cap \{(x,z) | px + qz \ge p_0\} \end{cases} \tag{5}$$

и что

$$p_i \left[l_i - \int_{R^+_{n+m}} x_i u^*_{ls}(x,z)\mu(x,z)dxdz \right] = 0, \quad i = 1,...,n, \tag{6}$$

$$q_j \left[s_j - \int_{R^+_{n+m}} z_j u^*_{ls}(x,z)\mu(x,z)dxdz \right] = 0, \quad j = 1,...,m. \tag{7}$$

При этом $p_0 > 0$, если $l > 0, \quad s > 0$.

Доказательство этой теоремы осуществляется аналогично [Шананин, 1984].

Теорема 3. Пусть $p_0 > 0, \quad p \ge 0, \quad q \ge 0$. Тогда функция Хевисайда $u^*_{ls}(x,z) = \theta(p_0 - px - qz)$ является оптимальным решением задачи (1) – (4) при условии, что

$$l = \int_{R^+_{n+m}} x\theta(p_0 - px - qz)\mu(x,z)dxdz < +\infty, \tag{8}$$

$$q = \int_{R^+_{n+m}} z\theta(p_0 - px - qz)\mu(x,z)dxdz < +\infty. \tag{9}$$

Доказательство этой теоремы осуществляется аналогично [Шананин, 1984].

<u>Замечание 1.</u> Утверждения теорем 1 и 3 следуют из обобщенной леммы Неймана-Пирсона [Петров, Поспелов, Шананин, 1996] при дополнительном условии, что функции $\mu(x,z), x_1\mu(x,z),...,x_n\mu(x,z), z_1\mu(x,z),...,z_m\mu(x,z)$ суммируемы на R^+_{n+m}.

Определение 1. Эколого-экономической производственной функцией $F(l,s)$ будем называть функцию, которая сопоставляет векторам $l \geq 0, \quad s \geq 0$ оптимальное значение функционала (1) в задаче (1) – (4).

При заданном распределении мощностей по технологиям $\mu(x,z)$ эколого-экономическая производственная функция $F(l,s)$ определяет максимальный выпуск продукции отрасли по вектору l потоков экономических ресурсов и вектору s потоков экологических ресурсов, поступающих в распоряжение отрасли, при условии, что эти потоки оптимально распределяются между мощностями отрасли. Величины потоков экономических и экологических ресурсов и их распределение между мощностями определяются рыночными экономическими механизмами функционирования отрасли, состоящей из множества независимых конкурирующих фирм. Учитывая теоремы 2 и 3, опишем класс экономических механизмов, которые обеспечивают оптимальное распределение между мощностями (фирмами) потоков экономических и экологических ресурсов, поступающих в распоряжение отрасли экологической экономики.

Предположим, что все продукты распределяются посредством актов купли-продажи, причем каждый продукт продается и покупается по одной и той же цене. Пусть $p_0 > 0$ – цена на выпускаемую отраслью продукцию, $p = (p_1,...,p_n) \geq 0$ - вектор цен на экономические ресурсы, $q = (q_1,...,q_m) \geq 0$ - вектор цен на экологические ресурсы (плата за лимиты), которые используются отраслью. Прибыль от выпуска единицы продукции по технологии (x, z) при заданных ценах p_0, p и q равна $p_0 - px - qz$. Предположим, что прибыльные технологии (x, z), т.е. удовлетворяющие условию $p_0 - px - qz > 0$, действуют на полную мощность и обеспечиваются необходимыми для этого экономическими и экологическими ресурсами. Обозначим через $G(p_0;p,q) = \left\{(x,z)\middle|(x,z) \in R^+_{n+m}, p_0 > px + qz\right\}$ множество прибыльных при ценах p_0, p, q технологий (фирм). Предположим, что убыточные технологии, т.е. удовлетворяющие условию $p_0 - px - qz < 0$, не используются (убыточные фирмы не функционируют) и не обеспечиваются экономическими и экологическими ресурсами. Экономические механизмы, удовлетворяющие сформулированным выше предположениям, представляют экономические механизмы рыночного типа.

При ценах $p_0 > 0, \quad p \geq 0, \quad q \geq 0$ суммарный выпуск отрасли равен

$$g_0(p_0;p,q) = \int\limits_{G(p_0;p,q)} \mu(x,z)dxdz; \tag{10}$$

суммарные затраты отраслью экономических ресурсов i–го вида, $1 \leq i \leq n$, равны

$$g_i(p_0;p,q) = \int\limits_{G(p_0;p,q)} x_i\mu(x,z)dxdz; \tag{11}$$

суммарные затраты отраслью экологических ресурсов j–го вида, $1 \leq j \leq m$, равны

$$h_j(p_0;p,q) = \int\limits_{G(p_0;p,q)} z_j\mu(x,z)dxdz; \tag{12}$$

суммарная прибыль отрасли равна

$$\Pi(p_0;p,q) = \int\limits_{G(p_0;p,q)} (p_0 - px - qz)\mu(x,z)dxdz. \tag{13}$$

Определение 2. Назовем $g_0(p_0;p,q)$ функцией предложения продукции; $g_i(p_0;p,q)$ - функцией спроса на экономический ресурс i–го вида, $1 \leq i \leq n$; $h_j(p_0;p,q)$ - функцией спроса на экологический ресурс j–го вида, $1 \leq j \leq m$; $\Pi(p_0;p,q)$ - функцией прибыли отрасли.

<u>Следствие.</u> При любых $p_0 > 0,\quad p_1 \ge 0,...,p_n \ge 0,\quad q_1 \ge 0,...,q_m \ge 0$, если $g_i(p_0;p,q) < +\infty$, $1 \le i \le n$, $h_j(p_0;p,q) < +\infty$, $1 \le j \le m$, то справедливо тождество

$$g_0(p_0;p,q) = F\left(g(p_0;p,q),h(p_0;p,q)\right). \tag{14}$$

где $g_0(p_0;p,q) = \left(g_1(p_0;p,q),...,g_n(p_0;p,q)\right)$, $h_0(p_0;p,q) = \left(h_1(p_0;p,q),...,h_m(p_0;p,q)\right)$.

Покажем, что определенная выше эколого-экономическая производственная функция $F(l,s)$ обладает свойствами, которые обычно постулируются в неоклассической теории производства.

Теорема 4. Функция $F(l,s)$, определенная на R^+_{n+m}, монотонно не убывает по каждому аргументу, вогнута, обращается в нуль на $R^+_{n+m} \setminus \operatorname{int} R^+_{n+m}$.

Доказательство этой теоремы осуществляется аналогично [Шананин, 1984].

Теорема 5. Функция $F(l,s)$ непрерывна на R^+_{n+m}.

Доказательство этой теоремы осуществляется аналогично [Шананин, 1984].

Лемма. Пусть $p_0 > 0$, $p = (p_1,...,p_n) \ge 0$, $q = (q_1,...,q_m) \ge 0$. Тогда для любого измеримого по Лебегу множества $U \subset R^+_{n+m}$ выполняется неравенство

$$\int_U (p_0 - px - qz)\mu(x,z)dxdz \le \int_{G(p_0;p,q)} (p_0 - px - qz)\mu(x,z)dxdz = \Pi(p_0;p,q).$$

Доказательство этой леммы очевидно.

Теорема 6. Пусть $(L,S) \in \operatorname{int} R^+_{n+m}$. Предположим, что существует такой вектор $(p,q) \in R^+_{n+m}$, что $F(L,S) = g_0(1;p,q),\quad g(1;p,q) \le L,\quad h(1;p,q) \le S,\quad p\left[L - g(1;p,q)\right] = 0,\quad q\left[S - h(1;p,q)\right] = 0$ и множество $E_\mu = \left\{(x,z) \in R^+_{n+m} \,\middle|\, \left(1 - p^1x - q^1z\right)\mu(x,z) < 0,\quad (1 - px - qz)\mu(x,z) < 0\right\}$ имеет положительную меру при любых $\left(p^1,q^1\right) \ge 0,\quad \left(p^1,q^1\right) \ne (p,q)$ из некоторой открытой окрестности (p,q). Тогда производственная функция $F(l,s)$ дифференцируема в точке $l = L,\quad s = S$ и

$$\left.\frac{\partial F(l,s)}{\partial l_i}\right|_{\substack{l=L,\\ s=S}} = p_i,\quad i = 1,...,n, \tag{15}$$

$$\left.\frac{\partial F(l,s)}{\partial s_j}\right|_{\substack{l=L,\\ s=S}} = q_j,\quad j = 1,...,m. \tag{16}$$

Доказательство этой теоремы осуществляется аналогично [Шананин, 1984].

<u>Замечание 2.</u> При нарушении условий, изложенных в теореме 6, производственная функция $F(l,s)$ может быть недифференцируемой в точке $l = L,\quad s = S$.

Важным показателем локального поведения производственной функции $F(l,s)$ в окрестности точки $l = L,\quad s = S$ является эластичность производства

$$\varepsilon(L,S) = \frac{1}{F(L,S)}\left(\sum_{i=1}^n L_i \left.\frac{\partial F(L,S)}{\partial l_i}\right|_{\substack{l=L,\\ s=S}} + \sum_{j=1}^m S_j \left.\frac{\partial F(L,S)}{\partial s_j}\right|_{\substack{l=L,\\ s=S}}\right). \tag{17}$$

Теорема 7. Предположим, что $F(l,s)$ дифференцируема в точке $l = L > 0, \quad s = S > 0$ и что выполняются соотношения $F(L,S) = g_0(1;p,q), \quad g(1;p,q) \le L, \quad h(1;p,q) \le S, \quad p\left[L - g(1;p,q)\right] = 0, \quad q\left[S - h(1;p,q)\right] = 0$, $p = (p_1,...,p_n) \ge 0$, $q = (q_1,...,q_m) \ge 0$ и равенства (15) - (16). Тогда $\varepsilon(L,S) < 1$.

Доказательство этой теоремы очевидно и не представляет трудностей.

Теорема 8. Существуют такие вектора $p = (p_1,...,p_n) > 0$ и $q = (q_1,...,q_m) > 0$, что функция $F(l,s)$ дифференцируема в точке $l = g(1;p,q), \quad s = h(1;p,q)$, причем выполняются равенства

$$\left.\frac{\partial F(l,s)}{\partial l_i}\right|_{\substack{l=g(1;p,q),\\ s=h(1;p,q)}} = p_i, \qquad \left.\frac{\partial F(l,s)}{\partial s_j}\right|_{\substack{l=g(1;p,q),\\ s=h(1;p,q)}} = q_j. \tag{18}$$

Доказательство этой теоремы осуществляется аналогично [Шананин, 1984].

Замечание 3. Для функции Кобба-Дугласа $Al^{\alpha}s^{1-\alpha}$ $(0 \le \alpha \le 1, \quad A > 0)$ и для *CES*–функции $A\left[\alpha l^{-\rho} + (1-\alpha)s^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$ $(0 \le \alpha \le 1, \quad A > 0, \rho \in (-1,0) \cup (0,+\infty))$ при любых $l > 0, \quad s > 0$ выполняется соотношение $\varepsilon(L,S) = 1$. Поэтому из теорем 7 и 8 следует, что не существует такого локально суммируемого на R_2^+ распределения по технологиям $\mu(x,z)$, для которого соответствующей производственной функцией $F(l,s)$ являлась бы функция Кобба-Дугласа или *CES*–функция. Однако, как доказано в [Hauthakker, 1955], функция типа Кобба-Дугласа

$$F(l,s) = Al^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2+1}}s^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2+1}}, \quad A > 0, \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 1$$

является производственной функцией для некоторого распределения мощностей по технологиям вида

$$\mu(x,z) = Bx^{\alpha_1-1}z^{\alpha_2-1}.$$

Теорема 9. При любых $p_0 > 0$, $p = (p_1,...,p_n) \ge 0$, $q = (q_1,...,q_m) \ge 0$ выполняется соотношение

$$\Pi(p_0;p,q) = \sup_{\substack{l\ge 0,\\ s\ge 0}}\left[p_0F(l,s) - pl - qs\right]. \tag{19}$$

Причем, если $g(p_0;p,q) < \infty$, $h(p_0;p,q) < \infty$, то супремум в (19) достигается в точке $l = g(p_0;p,q)$, $s = h(p_0;p,q)$.

Доказательство этой теоремы осуществляется аналогично [Шананин, 1984].

Теорема 10. При любых $p_0 > 0$, $l = (l_1,...,l_n)^T \ge 0$, $s = (s_1,...,s_m)^T \ge 0$ выполняется соотношение

$$F(l,s) = \frac{1}{p_0}\inf_{\substack{p\ge 0,\\ q\ge 0}}\left[\Pi(p_0;p,q) + pl + qs\right]. \tag{20}$$

Причем, если $l > 0, \quad s > 0$, то инфинум в (20) достигается в точке $(p,q) \in R_{n+m}^+$ такой, что $F(l,s) = g_0(p_0;p,q), \; g(p_0;p,q) \le l, \; h(p_0;p,q) \le s, \; p\left[l - g(p_0;p,q)\right] = 0, \; q\left[s - h(p_0;p,q)\right] = 0$.

Доказательство этой теоремы осуществляется аналогично [Шананин, 1984].

Соотношения (19), (20) в некотором смысле являются двойственными и позволяют восстанавливать функцию прибыли отрасли экологической экономики при известной отраслевой производственной функции либо наоборот: восстанавливать отраслевую производственную функцию $F(l,s)$ при известной функции прибыли $\Pi(p_0;p,q)$.

Однако при этом для нахождения отраслевой производственной функции $F(l,s)$ все равно приходится решать задачу оптимизации (1) – (4) в функциональном пространстве, что представляет немалую трудность. Задача значительно упрощается, если рассматривать конечное число N технологий и линейные функции затрат экономических и экологических ресурсов:

$$x_{ik} \geq 0, \quad i = 1,...,n, \quad k = 1,...,N; \quad z_{jk} \geq 0, \quad j = 1,...,m, \quad k = 1,...,N.$$

В этом случае задача (1) – (4) приобретает вид

$$\sum_{k=1}^{N} u_k M_k \to \max, \tag{21}$$

$$\sum_{k=1}^{N} x_{ik} u_k M_k \leq l_i, \quad i = 1,...,n, \tag{22}$$

$$\sum_{k=1}^{N} z_{jk} u_k M_k \leq s_j, \quad j = 1,...,m, \tag{23}$$

$$0 \leq u_k \leq 1, \quad k = 1,...,N. \tag{24}$$

В случае, когда требуется аналитический вид производственной функции $F(l,s)$, эффективным методом решения задачи (21) – (24) является переход к двойственной задаче параметрического линейного программирования

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j s_j + \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \to \min, \tag{25}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{ik} M_k + \sum_{j=1}^{m} \beta_j z_{jk} M_k + \gamma_k \geq M_k, \quad k = 1,...,N, \tag{26}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_i \geq 0, \quad i = 1,...,n, \\ &\beta_j \geq 0, \quad j = 1,...,m, \\ &\gamma_k \geq 0, \quad k = 1,...,N, \end{aligned} \tag{27}$$

блок ограничений в которой не содержит параметров l, s и поэтому сравнительно просто находятся все опорные решения $\alpha^1, \beta^1, \gamma^1; ...; \alpha^R, \beta^R, \gamma^R$, представляющие неотрицательные кусочно-постоянные функции от аргументов l, s.

В точке оптимума целевые функции (21) и (27) совпадают. Поэтому отраслевой эколого-экономической производственной функцией будет

$$F(l,s) = \min\left[\alpha^1 l + \beta^1 s + \gamma^1 e, ..., \alpha^R l + \beta^R s + \gamma^R e\right], \tag{28}$$

где $e = (1,1,...,1)^T$ – единичный вектор размерности N.

Заключение

Таким образом, в работе построены отраслевые производственная функция и функция прибыли для экологической экономики. Установлена связь между этими функциями. Предложен метод построения производственной функции для линейной экономики с конечным числом технологических способов.

Литература

[Петров, Поспелов, 1979] Петров А.А., Поспелов И.Г. Системный анализ развивающейся экономики: к теории производственных функций. 1 // Изв. Ан СССР. Сер. техн. кибернетика. – 1979. – №2. – с. 18-27.

[Hauthakker, 1955] Hauthakker H.S. The Pareto-Distribution and Cobb-Douglas Production Function in Activity Analysis // Rev. Econ. Stud. – 1955/56. – Vol. 23(1), #60. – p. 27-31.

[Johansen, 1969] Johansen L. Outline of an Approach to Production Studies // Memorandum from Inst. of Economics. Univ. of Oslo. – 28 April, 1969.

[Johansen, Hersoug, 1969] Johansen L., Hersoug T. Derivation of macro production functions from distributions of micro units with respect to input coefficients. Some mathematical illustrations // Mem. Inst. Econ. Univ. of Oslo. – 18 October, 1969.

[Johansen, 1972] Johansen L. Production function. – Amsterdam-London: North Holland Co., 1972. – 274 p.

[Hildenbrand, 1981] Hildenbrand W. Short-run production functions based on micro-data // Econometrica. – 1981. – v. 49, #5. – p. 1095-1125.

[Шананин, 1979] Шананин А.А. К теории производственных функций. – В кн.: Модели и алгоритмы программного метода планирования. – М., ВЦ АН СССР, 1979. – с. 24-50.

[Шананин, 1984] Шананин А.А. Исследование одного класса производственных функций, возникающих при макроописании экономических систем // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1984. – т. 24, №12. – с. 1799-1811.

[Петров, Поспелов, Шананин, 1996] Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. – М.: Энергоатомиздат, 1996. – 544 с.

Информация об авторе

Игорь Ляшенко – *д.ф.-м.н., профессор, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики, ул. Васильковская, 42, кв. 44, Киев-03022, Украина;*
e-mail: lyashenko@univ.kiev.ua