АНАЛИЗ СВОЙСТВ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА ПРИ НЕЧЁТКО ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРАХ КРИТЕРИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ МЕТОДОМ БАЗИСНЫХ МАТРИЦ

Владимир Кудин, Григорий Кудин, Алексей Волошин

Аннотация: *Предложено применение метода базисных матриц для анализа модели Леонтьева (МЛ) с нечетко заданными некоторыми ее компонентами. МЛ можно интерпретировать, как задачу прогноза затрат-выпуска продукции на основе известной статистической информации при нечётко заданных значениях части элементов технологической матрицы, вектора ограничений и границах переменных. Такими элементами могут быть и цены на выпускаемую продукцию (вектор градиента целевой функции). Это существенно усложняет анализ МЛ.*

Ключевые слова: *модель Леонтьева, количественный и качественный анализ, нечёткое множество, базисная матрица, функция принадлежности.*

ACM Classification Keywords*: H.4.2 Information Systems Applications: Types of Systems: Decision Support.*

Введение

Математический аппарат нечётких множеств является формой задания неопределенных параметров, значения которых неизвестны до момента принятия решения. Одним из механизмов устранения неопределенности в задании параметров при построении модели является включение в контур принятия решения экспертов (ЛПР). ЛПР призваны качественно определить структуру модели, указать механизм устранения неопределённостей при ее формировании [Орловский, 1981]. Существенным осложнением модели Леонтьева (МЛ) [Леонтьев, 1972], [Гасс., 1961] есть включение ограничений на значение переменных [Орловский, 1981]. Одной из особенностей МЛ является то, что она включает в себе математические проблемы анализа ряда линейных систем таких как систем линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей ограничений (СЛАР), линейных алгебраических неравенств с соответствующей матрицей ограничений (СЛАН), а также и задач линейного программирования (ЗЛП) [Волошин, 1993], [Войналович, 1987], [Войналович, 1988], [Кудин, 2002]. Проведения качественного анализа модели [Орловский, 1981] предопределяет включение и количественного анализа непротиворечивости ее структурных элементов [Волошин,1993], [Войналович, 1987], [Войналович, 1988], [Кудин, 2002], а также влияние изменения ее компонент на свойства модели в целом. Можно выделить такие основные стадии анализа:

- проверки адекватности математического и машинного представления матрицы ограничений, нахождение величины ее ранга;
- направленной коррекции величины ранга матрицы ограничений изменением отдельных её элементов (при необходимости);
- выявление совместных свойств собственно МЛ и ограничений на переменные – разрешимости (неразрешимости);
- определение свойств ограничений МЛ (многогранного множества) и ограничений на переменные, проведения, при необходимости, направленных изменений;
- нахождение решений при разрешимости;

- установление свойств решений,
- анализ изменений в модели на структурные свойства областей (допустимости и решений).

Постановка задачи

Введем в рассмотрение варианты МЛ, к которым можно прийти в результате эквивалентных преобразований канонической модели:

1. СЛАР вида

$$Au = C \, , \tag{1}$$

2.. СЛАН вида

$$Au \le C \, , \tag{2}$$

3. МЛП (модель линейного программирования) при наличии целевой функций вида

$$\max_{u \in R^m} Bu \, , \tag{3}$$

вида (2)-(3), в которой $A = \left\{a_{ij}\right\}_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,m}}}$ невырожденная квадратная матрица размерности $(m \times m)$, $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jm}),\ j \in J = I = \{1, 2, .., m\}$ – строки матрицы $\grave{A}$, $u = (u_1, u_2, ..., u_m)^T$ – вектор переменных, $B = (b_1, b_2, ..., b_m),\ C = (c_1, c_2,\ .., c_n)^T$ – вектора градиента целевой функции и ограничений модели, $a_j u \le c_j,\ j \in J$ полупространство, которое определено гиперплоскостью $a_j u = c_j,\ j \in J$.

Считаем, что компоненты вектора градиента (3) могут задаваться, как функции в виде $B(t)$, где $B(t) = (b_1(t),\ b_2(t),\ ...\ , b_m(t))$, которые зависят от аргумента t. Каждая компонента вектора b_r становится равной $b_r(t)$ при каждом $t \in T = \left[t_H, t_B\right]$. (Все определенные функции являются зависимыми от аргумента, в общем случае, $t \in (-\infty, +\infty)$, из класса C^2). Нечеткий интервал $T = \left[t_H, t_B\right]$ определяется как множество аргументов, на которых функция принадлежности имеет уровень не ниже λ. Такие изменения в элементах модели можно интерпретировать, как зависимость цен на продукцию r на интервале $t \in \left[t_H, t_B\right]$. Механизм формирования уровня λ (устранение нечеткости в системе, т. е. выбора интервала $T = \left[t_H, t_B\right]$) может быть разнообразным. В частности, пусть в системе имеется $P = \{1, 2,\ ...\ , p\}$ экспертов. Каждый эксперт формирует свою функцию принадлежности $\mu_p(t)$, $p \in P$ зависимой от параметра t. Эти функции являются кусочно-линейными, для которых эксперт устанавливает уровни значений $\lambda^{(p)},\ p \in P$. Это означает, что при указании уровня $\lambda^{(p)},\ p \in P$ ($1 \ge \mu_p(t) \ge \lambda^{(P)}$) каждым экспертом определяется интервал изменения значений $T_p,\ p \in P$, где $T_p = [t^{(-)}_{p(H)}, t^{(+)}_{p(B)}],\ p \in P$ [Орловский, 1981]. Результирующий интервал изменения переменной $T = \left[t_H, t_B\right]$ согласованный по P экспертам может определяться, например, как $T = \bigcap_{p=1}^{P} T_p$, что соответствует некоторой функции принадлежности $1 \ge \mu(t) \ge \lambda$. При каждом $t \in T = \left[t_H, t_B\right]$

формируется свой вариант $B(t)=(b_1(t),\ b_2(t),\ \dots,b_m(t))$ для (2),(3). Модель исследуется в пространстве E^m. Наличие в контуре принятия решения экспертов (фаза качественного анализа моделей (1),(2)-(3)) предопределяет последующую фазу (количественного анализа) - исследования при указанных уровнях $\lambda^{(p)},\ p=\{1,2,\dots.p\}$ указанных экспертами влияние изменения элементов $B(t)u$ при $t\in T$ на ранее выбранное оптимальное решение.

В работе предложено развитие методологии последовательного анализа [Волошин, 1987] и метода базисных матриц (МБМ) [Кудин, 2002] для проведения количественного анализа влияния функциональных изменений в МЛ на свойства оптимальных решения исходной задачи (2)-(3) при изменении элементов модели (3)) в виде $B(t)u$, $t\in T$.

Основные положения метода базисных матриц (МБМ)

В предлагаемом МБМ введены в рассмотрение строчные базисные матрицы [Войналович, 1987], [Войналович, 1988], [Кудін, 2002]. Базисные матрицы в ходе итераций решения задачи последовательно изменяются вводом-выводом из нее строк-нормалей ограничений. В общем случае в исследуемой модели количество ограничений превышает количество переменных вида (2), а в данном случае в МЛ $m=n$:

Определение 1. Матрицу $A_б$, составленную из m линейно независимых нормалей ограничений (2), будем называть базисной, а решение соответствующей ей системы уравнений $A_б u_0^T=C^0$ базисным. Две базисные матрицы отличающиеся одной строкой будем называть смежными.

Пусть: $\beta_{зj}$, $i,j\in I=\{1,2,\dots,m\}$ – элементы базисной подматрицы $A_б$, $e_{rз}$ – элементы матрицы $A_б^{-1}$, обратной к $A_б$; $e_k=(A_б^{-1})_k$.– столбец обратной матрицы. Решение $u_0=(u_{01},u_{02},\dots,u_{0m})$ системы уравнений $A_б u^T=c^0$, где, в общем случае, c^0 – подвектор С, компоненты которого состоят из правых частей ограничений (2), нормали которых образуют базисную матрицу $A_б$; $\alpha_r=(\alpha_{r1},\alpha_{r2},\dots,\alpha_{rm})$- вектор разложения нормали ограничения $a_r u_1\le c_r$ за строками базисной матрицы $A_б$, $\alpha_0=(\alpha_{01},\alpha_{02},\dots,\alpha_{0m})$ - вектор разложения градинта целевой функции (3) по строкам базисной матрицы $A_б$, .$\Delta_r=a_r u_0^T-c_r$ - невязка r-го ограничения (2) в вершине u_0; $J_б$, $J_Н$, $J=J_б\cup J_Н$ - множества индексов базисных и небазисных ограничений (2). В работе [Войналович, 1987] приведены формулы связи базисного решения, коэффициентов разложения нормалей ограничений и целевой функции (3), коэффициентов обратной матрицы, невязок ограничений и значений целевой функции при переходе к базисной матрице $\overline{A}_б$, которая образуется из матрицы $\overline{A}_б$ заменой ее строки a_k на a_l, которая не входит в базисную матрицу $A_б$. В новой базисной матрице $\overline{A}_б$ введённые величины будем называть элементами метода базисных матриц и будем обозначать черточкой сверху, т.е. $\overline{\beta}_{зj}$, $\overline{\alpha}_r$, $\overline{\Delta}_k$, $\overline{e}_{ri}$, $\overline{\alpha}_0$. Пусть $a_{i1},a_{i2},\dots,a_{im}$- нормали ограничений, $a_j u^T\le c_j$, $j\in J_б$, где $J_б=\{i_1,i_2,\dots,i_m\}$ - индексы ограничений, нормали которых образовывают строки базисной матрицы $A_б$, a_l - нормаль ограничения $a_l u\le c_l$, $\alpha_l=(\alpha_{l1},\alpha_{l2},\dots,\alpha_{lm})$- коэффициенты разложения вектора a_l по строкам базисной матрицы $A_б$.

Лемма 1. (Критерий линейной независимости системы векторов). Необходимым и достаточным условием линейной независимости строк матрицы модели $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{k-1}}, a_l, a_{i_{k+1}}, ..., a_{i_m}$, образованных заменой строки a_{i_k}, которая занимает k-ю строку в базисной матрице $A_{\acute{a}}$, строкой а $_l$, является выполнение условия $\alpha_{lk} \neq 0$.

Теорема 1. (О связи между смежными базисными матрицами). Между коэффициентами разложения нормалей ограничений (2) и целевой функции (3) за строками базисной матрицы, элементами обратных матриц, базисными решениями, невязками ограничений (2) и значениями целевой функции для двух смежных базисных матриц имеют место соотношения

$$\overline{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}, \ \overline{\alpha}_{ri} = \alpha_{r з} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{l з,} \quad r = \overline{0, n}; \ i = \overline{1, m}; \ з \neq k; \tag{4}$$

$$\overline{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}, \ \overline{e}_{ri} = e_{r з} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{l з,} \quad r = \overline{1, m}; \ i = \overline{1, m}; \ з \neq k; \tag{5}$$

$$\overline{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{1k}}\Delta_l, \qquad j = \overline{1, m}, \tag{6}$$

$$\overline{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}}, \ \overline{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \ r = \overline{1, n}; \quad r \neq k; \tag{7}$$

$$B\overline{u}_0 = Bu_0 - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \tag{8}$$

причем условием того, что матрица остаётся базисной при замещении вектором a_l k-й строки базисной матрицы $A_{\acute{a}}$, есть выполнение условия $\alpha_{lk} \neq 0$, условием допустимости опорного базисного решения есть $\alpha_{lk} < 0$, роста значений целевой функции $\alpha_{0k} < 0$.

Доказательство леммы 1 и теоремы 1 основывается на теоретических положениях, изложенных в [Войналович, 1987], [Войналович, 1988], [Кудин, 2002].

Соотношения (4)-(8) будут основополагающими при построении алгоритма поиска не только оптимального решения, но проведения анализа свойств МЛ методом базисных матриц.

Определение 2. Допустимое базисное решение u_0 оптимальное, если $Bu_0 \geq Bu$ для всех u, которые удовлетворяют (2).

Теорема 2. Для оптимальности базисного решения u_0 необходимо и достаточно неотрицательности коэффициентов разложения вектора нормали целевой функции (3) по строкам базисной матрицы $A_{\acute{a}}$, т.е. $\alpha_{ok} \geq 0$ для всех k$=\overline{1, m}$, причем задача (2),(3) с квадратной невырожденной матрицей ограничений имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\alpha_{0i} > 0, \ i = \overline{1, m}$, а необходимым и достаточным условием не единственности решения задачи есть $\exists \ i \in I$ таких, что $\alpha_{0i} = 0$, причём множество решений имеет ребра неограниченности.

Справедливость критерия оптимальности вытекает из формулы (8) теоремы 1.

Выводы

Применение симплексной идеологии на основе МБМ при анализе МЛ даёт возможность:

- исследовать свойства решений МЛП (2), (3) при изменениях в (3);
- проводить анализ свойств МЛ при изменении значений отдельных элементов и ее компонент;
- использовать решение исходной МЛ при анализе возмущенной модели;
- контролировать или направлено изменять величину ранга системы;
- находить решение квадратной системы уравнений за фиксированное количество шагов;
- строить начальные решения задач на основе тривиальных базисных матриц, которые исключает трудоёмкие начальные вычисления;
- применять схему анализа для задач, которые предусматривают многошаговость или многократность расчетов на моделях при изменениях в компонентах модели.

Литература

[Леонтьев, 1972] Леонтьев В.В., Форд Д. Межотраслевой анализ воздействия структуры экономики на окружающую среду// Экономика и математические методы.- 1972.-T.VII.-Вып.3.-C.370-400.

[Гасс, 1961] Гасс С. Линейное программирование. Физматгиз,-1961.

[Волошин, 1987] Волошин А.Ф. Метод локализации области оптимума в задачах математического программирования // Докл. АН СССР. - 1987. -293, N 3.- С. 549-553.

[Орловский, 1981] Орловский С.А Принятие решения при нечёткой исходной информации.- М:, Наука,-1981.- 206с.

[Волошин,1993] Волошин А.Ф. Войналович В.М., Кудин В.И. Предоптимизационые и оптимизационные схемы сокращения размерности задачи линейного программирования // Автоматика,N4, 1993.

[Войналович, 1987] Волкович В.Л., Войналович В.М., Кудин В.И. Релаксационная схема строчного симплекс метода // Автоматика .- 1987. -N4.-С. 79-86.

[Войналович, 1988] Волкович В.Л., Войналович В.М., Кудин В.И. Релаксационная схема двойственного строчного симплекс метода // Автоматика.-1988. -N 1.-С.39-46.

[Кудин, 2002] Кудин В.И. Применение метода базисных матриц при исследовании свойств линейной системы // Вестник Киевского университета. Серия физ.-мат. науки. - 2002.-2.- С. 56-61.

Сведения об авторах

Владимир Кудин - *д.т.н., с.н.с., Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики, Украина, E-mail: V_I_Kudin@mail.ru*

Григорий Кудин - *к.т.н., с.н.с., Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики, Украина, E-mail: Kuding@mail.univ.kiev.ua*

Алексей Волошин - *д.т.н., профессор, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики, Украина, E-mail: ovoloshin@unicyb.kiev.ua*