О ЗАДАЧЕ НАХОЖДЕНИЯ СТРОГОЙ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЙ РАНЖИРОВКИ В ВИДЕ МЕДИАНЫ КЕМЕНИ-СНЕЛЛА

Павел Антосяк, Алексей Волошин

Аннотация: *Рассматривается задача, возникающая во многих приложениях, построения на основе индивидуальных предпочтений экспертов результирующей (коллективной) ранжировки в виде медианы Кемени-Снелла. Приводятся теоретические результаты, полученные авторами, на основании которых предлагаются алгоритмы, позволяющие решать задачи большой размерности.*

Ключевые слова: *ранжирование, медиана Кемени-Снелла; принципы Кондорсе, Борда, Парето; последовательный анализ вариантов, декомпозиция.*

***ACM Classification Keywords**: H4.2 Decision support*

Введение

Задача построения на основе индивидуальных экспертных предпочтений результирующего (коллективного) порядка возникает во многих приложениях, в первую очередь, в социологии и политологии. Регулярно публикуются рейтинги высших учебных заведений (насчитывающие тысячи единиц), стран (как правило, от 150 до 200) по десяткам критериев. Один из основных рейтингов – индекс развития человеческого потенциала, учитывающий демографическую ситуацию в стране, развитие рынка труда, материальное благосостояние, уровень охраны здоровья, доступность и качество образования и т.д. Актуальной задачей для Украины, переживающей перманентное состояние выборов, является задача построения списка кандидатов в депутаты Верховного Совета из 450 индивидуумов от партий (блоков). Как понимают авторы, эта задача решается эвристически на основе неизвестных и непонятных принципов, хотя в идеале результирующий список должен отражать предпочтение каждого делегата съезда, насчитывающего сотни и тысячи участников.

В докладе приводятся в обзорной форме основные теоретические результаты, полученные авторами в последние годы, на основании которых предлагаются алгоритмические процедуры решения указанной задачи. В основе численных алгоритмов лежит методология последовательного анализа вариантов [Михалевич, 1965] [Волкович, Волошин, 1978] в конкретизации [Волошин, 1987]. Авторы придерживаются понятий и определений, приведенных в [Волошин, 2006].

1. Постановка задачи

Пусть на фиксированном множестве объектов $O=\{o_1,...,o_n\}$ экспертами, нормированные коэффициенты компетентности α_l, $l\in L=\{1,...,m\}$, которых известны, заданы матрицы строгих парных сравнений $P^{(l)}$, $l\in L$. Элементы $p_{ij}^{(l)}\in\{-1,1\}$ матриц $P^{(l)}$ являют собой результат сравнения l-ым экспертом объектов o_i и o_j, $i,j\in I=\{1,...,n\}$, $i\neq j$:

$$p_{ij}^{(l)}=\begin{cases}1, \text{если объект } o_i \text{ лучше } o_j \text{ по мнению } l-\text{го эксперта,}\\ -1, \text{если по мнению } l-\text{го эксперта } o_i \text{ хуже } o_j.\end{cases}$$

Одним из методов нахождения результирующей ранжировки является вычисление медианы Кемени-Снелла:

$$R^* \in \underset{R\in\Re}{\mathrm{Argmin}}\{d(R) = \sum_{l\in L}\alpha_l d(R,P^{(l)})\}, \tag{1.1}$$

где $\Re$ – множество всех матриц, которые отвечают строгой ранжировке n объектов, $d(R,P^{(l)}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|r_{ij} - p_{ij}^{(l)}\right|$ – расстояние Хемминга между R и $P^{(l)}$.

В работе [Антосяк, 2007] задача (1.1) сводится к эквивалентной задаче вида:

$$(i_1^*,...,i_n^*) \in KS = \underset{(i_1,...,i_n)\in\Omega}{\mathrm{Argmax}}\{F(i_1,...,i_n) = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} a_{i_k i_j}\}, \tag{1.2}$$

где $a_{i_k i_j} = \sum_{l\in L}\alpha_l p_{i_k i_j}^l$; Ω – множество всех возможных перестановок множества индексов I; $(i_1,...,i_n)$ – элемент множества Ω (вариант задачи (1.2)).

2. Процедуры локализации интервалов изменнения оптимальных рангов объектов

Определение 2.1. Для $\forall R \le r$, $R,r \in I$, множество $\{R,R+1,...,r-1,r\}$ назовем интервалом $[R,r]$ изменения рангов.

Выберем произвольный объект с индексом $i \in I$.

Определение 2.2. Ранг $r_i \in I$ назовем оптимальным рангом i-го объекта, если существует оптимальный вариант $(i_1^*,i_2^*,...,i_{r_i-1}^*,i_{r_i}^* = i,i_{r_i+1}^*,...,i_{n-1}^*,i_n^*) \in KS$.

Множество всех оптимальных рангов i-го объекта обозначим через $\Re_i$.

Пусть

$$r_i^* = \underset{j\in\Re_i}{\mathrm{argmax}}\, j,\ R_i^* = \underset{j\in\Re_i}{\mathrm{argmin}}\, j,$$

соответвенно, минимальный и максимальный оптимальные ранги i-о объекта.

*Определение 2.3.*Интервал изменения рангов $[R_i^*,r_i^*]$ назовем интервалом изменения оптимальных рангов i-го объекта.

Под локализацией интервала изменения оптимальных рангов i-го объекта будем понимать процедуру построения такого интервала $[R_i^{(k_i^{loc})},r_i^{(k_i^{loc})}]$, что

$$I \supseteq ... \supseteq [R_i^{(k_i^{loc}-1)},r_i^{(k_i^{loc}-1)}] = [R_i^{(k_i^{loc})},r_i^{(k_i^{loc})}] \supseteq [R_i^*,r_i^*].$$

На каждом k_i-ом ($k_i \ge 1$) шаге процедуры локализации интервала изменения оптимальных рангов i-го объекта будем рассматривать вопрос о возможности $R_i^{(k_i-1)} \in \Re_i$ и $r_i^{(k_i-1)} \in \Re_i$.

Пусть $V_{i(n-1)}^q$ $(1 \le q \le n-1)$ – множество всех возможных размещений без повторений множества индексов $I \setminus \{i\}$ из $(n-1)$-го элемента по q. Элемент множества $V_{i(n-1)}^q$ будем записывать как $(i_1,...,i_q)$.

Пусть *extr* – это *max* или *min*. Обозначим

$$S_{iq}^{(k_i)} = \underset{(i_1,\dots,i_q)\in DV_{iq}^{(k_i)}}{\operatorname{extr}} \sum_{j=1}^{q} a_{ii_j}\,, \tag{2.1}$$

где $DV_{iq}^{(k_i)} = \{(i_1,\dots,i_q) | (R_i^{(k_i-1)} + j) \in DI_{i_j jq}^{(k_j)}, j = \overline{1,q}\}$, $DI_{ijq}^{(k_i)} = [R_j^{(k_j)}, r_j^{(k_j)}] \cap [R_i^{(k_i-1)} + 1, R_i^{(k_i-1)} + q]$, для $\forall\ j \in I \setminus \{i\}$, если (2.1) – задача на максимум. Иначе, $DV_{iq}^{(k_i)} = \{(i_1,\dots,i_q) | (r_i^{(k_i-1)} - j) \in DI_{i_j jq}^{(k_j)}, j = \overline{1,q}\}$, $DI_{ijq}^{(k_i)} = [R_j^{(k_j)}, r_j^{(k_j)}] \cap [r_i^{(k_i-1)} - q, r_i^{(k_i-1)} - 1]$, для $\forall\ j \in I \setminus \{i\}$.

Теорема 2.1 (Необходимые условия оптимальности задачи (1.2)). Для каждого оптимального варианта $(i_1^*,\dots,i_n^*)$ задачи (1.2) для $\forall\ t,h \in I$, $t < h$, используются следующие неравенства:

$$\sum_{j=t+1}^{h} a_{i_t^* i_j^*} \geq 0\,,$$

$$\sum_{j=t}^{h-1} a_{i_h^* i_j^*} \leq 0\,.$$

Как следствие имеем

Утверждение 2.1 (Достаточные условия локализации).

I. Для задачи (2.1) на максимум. Если $S_{iq}^{(k_i)} < 0$ хотя бы для одного $q \in \{1, r_i^{(k_i-1)} - R_i^{(k_i-1)}\}$, то $R_i^{(k_i-1)} \notin \Re_i$.

II. Для задачи (2.1) на минимум. Если $S_{iq}^{(k_i)} > 0$ хотя бы для одного $q \in \{1, r_i^{(k_i-1)} - R_i^{(k_i-1)}\}$, то $r_i^{(k_i-1)} \notin \Re_i$.

3. Процедуры фиксации результирующего отношения между двумя объектами

Выберем произвольные индексы $i, j \in I$, $i \neq j$. Обозначим $o_i \overset{KS}{\succ} o_j$, если в коллективном порядке, который отвечает медиане Кемени-Снелла, объект o_i лучше, чем объект o_j.

Замечание 3.1. Следует отметить, что введенное обозначение используется нами тогда и только тогда, когда не существует ни одного оптимального варианта задачи (1.2) такого, что $(i_1^*,\dots,i_t^* = j,\dots,i_h^* = i,\dots,i_n^*)$, $1 \leq t < h \leq n$.

Известно [Литвак, 1982], что медиана Кемени-Снелла удовлетворяет условию Парето. То есть, если в индивидуальных предпочтений экспертов $o_i \succ o_j$, то $o_i \overset{KS}{\succ} o_j$. Следовательно, приняв во внимание правило построения элементов a_{ij}, имеем

Утверждение 3.1. Если $a_{ij} = 1$, то $o_i \overset{KS}{\succ} o_j$.

Из определения интервала изменения оптимальных рангов следует

Утверждение 3.2. Если $r_i^{(k_i^{loc})} \leq R_j^{(k_j^{loc})}$, то $o_i \overset{KS}{\succ} o_j$.

Для любого $i \in I$ введем обозначение:

$$K_i^- = \{k \in I \,|\, a_{ik} < 0, k \neq i\}\,,\ K_i^+ = \{k \in I \,|\, a_{ik} > 0, j \neq i\}\,,$$

$$S_i^- = \sum_{k \in K_i^-} a_{ik} \text{ , } S_i^+ = \sum_{j \in K_i^+} a_{ik} \text{ .}$$

Лемма 3.1. Если $a_{ij} > -S_i^-$, то $o_i \overset{KS}{\succ} o_j$.

Если положительную величину a_{ij} рассматривать как «выигрыш» i-го объекта в парных «поединках» с j-м объектом, то результат леммы 3.1 следующий: если «выигрыш» i-го объекта в парных «поединках» с j-м объектом больше, чем его суммарный «проигрыш», то $o_i \overset{KS}{\succ} o_j$.

Лемма 3.2. Если $a_{ij} < -S_i^+$, то $o_i \overset{KS}{\prec} o_j$. То есть, если «проигрыш» i-го объекта в парных «поединках» с j-м объектом менше, чем его суммарный «выигрыш», то $o_i \overset{KS}{\prec} o_j$.

Если же обозначить

$$K_{ij}^- = \{k \in I \mid a_{ik} < 0, k \neq i, k \neq j, R_j^{(k_j^{loc})} < R_k^{(k_k^{loc})} < r_i^{(k_i^{loc})} \text{ або } R_j^{(k_j^{loc})} < r_k^{(k_k^{loc})} < r_i^{(k_i^{loc})}\},$$

$$K_{ij}^+ = \{k \in I \mid a_{ik} > 0, k \neq i, k \neq j, R_i^{(k_i^{loc})} < R_k^{(k_k^{loc})} < r_j^{(k_j^{loc})} \text{ або } R_i^{(k_i^{loc})} < r_k^{(k_k^{loc})} < r_j^{(k_j^{loc})}\},$$

$$S_{ij}^- = \sum_{k \in K_{ij}^-} a_{ik} \text{ , } S_{ij}^+ = \sum_{k \in K_{ij}^+} a_{ik} \text{ ,}$$

то из доказательства лемм 3.1, 3.2 и утверждения 3.2 получаем справедливость следующих утверждений.

Утверждение 3.3. Если $a_{ij} > -S_{ij}^-$, то $o_i \overset{KS}{\succ} o_j$.

Утверждение 3.4. Если $a_{ij} < -S_{ij}^+$, то $o_i \overset{KS}{\prec} o_j$.

Тогда, приняв во внимание замечание 1, имеем

Утверждение 3.5. Если в результате утверждений 3.1−3.4 было установлено $o_i \overset{KS}{\succ} o_k$ и $o_k \overset{KS}{\succ} o_j$, то $o_i \overset{KS}{\succ} o_j$.

4. Процедуры декомпозиции

Пусть $\{I_1,...,I_q\}$, $2 \le q \le n$, некоторое разбиение множества индексов I такое, что $I_t \bigcap I_h = \varnothing$ при $t \neq h$ и $\bigcup_{k=1}^{q} I_k = I$. Понятие декомпозиции задачи (1.2) имеет следующее содержание.

В случае, когда для каждого оптимального варианта $(i_1^*,...,i_n^*)$ задачи (1.2) выполняется:

$$\text{если } j \in I_h \text{ и } i_t^* = j \text{, то } \sum_{k=0}^{h-1} \dim(I_k) < t \le \sum_{k=0}^{h} \dim(I_k) \;\; (I_0 = \varnothing), \tag{4.1}$$

будем говорить, что декомпозиция $\{I_1,...,I_q\}$ является необходимой. Если же существует оптимальный вариант $(i_1^*,...,i_n^*)$ задачи (1.2), для которого выполняется (4.1), то будем говорить, что декомпозиция $\{I_1,...,I_q\}$ допустима.

Декомпозиция задачи (1.2) осуществляется на основании следующих утверждений.

Лемма 4.1. Пусть существует набор индексов $I^{(1)} \subset I$ такой, что $a_{ij} \geq 0$ для $\forall\, i \in I^{(1)}$, $j \in I \setminus I^{(1)}$. Тогда декомпозиция $\{I^{(1)}, I \setminus I^{(1)}\}$ является допустимой.

Лемма 4.2. Пусть существует набор индексов $I^{(2)} \subset I$ такой, что $a_{ij} > 0$ для $\forall\, i \in I^{(2)}$, $j \in I \setminus I^{(2)}$. Тогда декомпозиция $\{I^{(2)}, I \setminus I^{(2)}\}$ является необходимой.

В терминах интервалов изменений оптимальных рангов справедливыми являются:

Утверждение 4.1. Пусть существует набор индексов $I^{(3)} \subset I$ такой, что $r_i^{(k_i^{loc})} \leq R_j^{(k_j^{loc})}$ для $\forall\, i \in I^{(3)}$, $j \in I \setminus I^{(3)}$. Тогда декомпозиция $\{I^{(3)}, I \setminus I^{(3)}\}$ является необходимой.

Утверждение 4.2. Пусть существует набор индексов $I^{(4)} \subset I$ такой, что $r_i^{(k_i^{loc})} \leq R_j^{(k_j^{loc})}$ для $\forall\, i \in I^{(4)}$, $j \in I \setminus I^{(4)}$ что $a_{ij} < 0$. Тогда декомпозиция $\{I^{(4)}, I \setminus I^{(4)}\}$ возможна (то есть, она либо допустима, либо необходима).

Обозначим через $I^* \subset I$ наименьшее такое множество, для которого выполняются условия леммы 1 или леммы 2.

Кластеризация (или классификация) неформально определяется как процесс объединения объектов в группы с "похожими" признаками. В этом случае I^* - это класс «фактических лидеров» (они выигрывают в парных сравнениях у произвольного кандидата, который не входит в этот класс) для заданного профиля предпочтений.

Утверждение 4.3 (следствие из леммы 4.2). В условиях леммы 4.2 I^* содержит всех победителей Копленда для соответствующих предпочтений задачи (1.2).

5. Локальный поиск

Для нахождения локально-оптимальных решений задачи (1.3) на сокращенном множестве вариантов в работе [Антосяк, 2006] предлагается алгоритм нахождения строгого результируюшего ранжирования на основе метода вектора спада.

В качестве окрестности фиксированной точки x рассматривается множество следующих инвертирований:

$$x(j_1, j_2, \ldots, j_s) = (x_1, \ldots, -x_{j1}, \ldots, -x_{j2}, \ldots, -x_{j_s}, \ldots, x_N), \tag{5.1}$$

$$1 \leq j_1 < \ldots < j_s \leq N,\ 1 \leq s \leq N.$$

Поскольку не всякое инвертирование вида (5.1) дает допустимый вариант, то вводится множество допустимых инвертирований:

$$DI = \{(j_1, \ldots, j_s) \mid x(j_1, \ldots, j_s) \in D, 1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_s \leq N, 1 \leq s \leq N\}.$$

В качестве вектора спада задачи (1), в некоторой окрестности точки $x \in D$ будем рассматривать вектор:

$$R(x) = [\Delta(x, x(j_1, \ldots, j_s))],$$

$$\Delta(x, x(j_1, \ldots, j_s)) = F(x(j_1, \ldots, j_s)) - F(x),\ (j_1, \ldots, j_s) \in DI.$$

Основной проблемой реализации метода является построение на каждом k - м шаге i ($k = 1,2,\ldots$) точек окрестностей. Учитывая практический аспект, во-первых, предлагается ограничиваться рассмотрением случая $s = 2$; во-вторых, для находжения точек окрестности предлагается процедура определения допустимых инвертирований, в-третьих, поиск в окрестности происходит до первого «улучшения».

«Двойственным» к рассмотренному подходу является поход, реализованный в работе [Антосяк, 2005], в которой рассматривается построение ациклического отношения, которое в некотором смысле является самым близким к «идеальной точке».

Пусть R - бинарное отношение, на котором целевая функция задачи (1.1) достигает своего минимального значения, но которое не является ацикличным. $R = (r_{ij})$, $i, j \in I$, – матрица данного бинарного отношения. Поскольку $R \notin \Re$, то R не может выступать в качестве решения. Такое бинарное отношение назовем «идеальной точкой» задачи (1.1).

Известно [Макаров, 1982], что для случая, который рассматривается нами (в силу свойств матриц индивидуальных парных сравнений), отсутствие (наличие) циклов эквивалентна отсутствию (наличию) циклов длины 3.

Определение 5.1. Цикличностью элемента r_{ij}, $i, j \in I$, матрицы, которая отвечает бинарному отношению R, назовем количество циклов длины 3, в которых объекты o_i и o_j находятся в отношении $o_i R o_j$.

Определение 5.2. Элемент с ненулевой цикличностью назовем цикличным элементом бинарного отношения R.

Для фиксированного, но любого, объекта $o_k \in O$, $k \in I$, определим множество пар индексов:

$$\tilde{N}_k = \{(i, j) \mid r_{ij} = 1, i \in I_k^1, j \in I_k^{-1}\},$$

где

$$I_k^{-1} = \{i \mid r_{ki} = -1, i \in I \setminus \{k\}\},\ I_k^1 = \{i \mid r_{ki} = 1, i \in I \setminus \{k\}\}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 5.1. Множество $C = \bigcup_{i \in I} C_i$ описывает множество всех циклических элементов бинарного отношения R.

Утверждение 5.2. Отношение R ацикличное тогда и только тогда, когда $C = \varnothing$.

Ацикличность бинарного лтношения R предлагается достигать путем последовательного исключения его циклических элементов.

6. Медиана Кемени-Снелла и принципы Кондорсе и Борда

В данной работе в принцип Кондорсе вкладывается следующеее. Положительная (отрицательная) величина a_{ij} (разница между «суммарной компетентностью» группы экспертов, которые отдали предпочтение объекту o_i над объектом o_j и «суммарной компетентностью» группы экспертов, которые отдали предпочтение объекту o_j над объектом o_i) рассматривается как «выигрыш» («проигрыш») – результат «победы» («поражения») объекта o_i над объектом o_j. Сильным победителем Кондорсе объявим тот объект, коотрый имеет «выигрыш» у каждого другого объекта. Если же некоторый объект не имеет «проигрышей» ни от одного из других объектов, то по определению он объявляется слабым победителем Кондорсе. В принцип Борда вкладывается следующее. За правило подсчета баллов берется величина

$$S(o_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} .$$

Под коллективным порядком (сильным) Кондорсе понимают коллективное предпочтение, построенное по следующему принципу [Мулен, 1991]: сильный победитель Кондорсе исключается из рассмотрения, для кандидатов (объектов), которые остались, снова ищется победитель, который занимает второе место в коллективном предпочтении и так далее Аналогичным способом можно определить коллективный порядок для слабых победителей Кондорсе (в случае отсутствия сильных) и коллективный порядок Борда. Обозначим через K и B – соответственно все строгие коллективные порядки Кондорсе (единственный сильный или же все слабые) и все коллективные порядки Борда для индивидуальных предпочтений задачи (1.1)

Утверждение 6.1 (О медиане Кемени-Снелла и коллективных порядках Кондорсе). Если $K \neq \varnothing$, то $K = KS$.

Как известно [Мулен, 1991], правила Кондорсе и обобщенное правило Борда в определенном смысле являются «несовместимыми» – существуют профили, при которых победитель Кондорсе не может быть победителем Борда ни при какой системе баллов.

Утверждение 6.2 (Достаточное условие совпадения медианы Кемени-Снелла с коллективным порядком Борда). Пусть для некоторого оптимального варианта $(i_1^*, i_2^*, ..., i_n^*) \in KS$ выполняется условие:

$$i_k^* \in \underset{i \in \{i_k^*, ..., i_n^*\}}{\operatorname{Arg\,max}} \{S(o_i) = \sum_{\substack{j \in \{i_k^*, ..., i_n^*\} \\ j \neq i}} a_{ij}\} , \ k = \overline{1, n-1} .$$

Тогда $(i_1^*, i_2^*, ..., i_n^*) \in B$.

Утверждение 6.3 (О колективном порядке Кондорсе, Борда и медиане Кемени-Снелла). Если $K \neq \varnothing$ и выполняются условия утверждения 6.2, то $(K = KS) \bigcap B \neq \varnothing$.

7. Медиана Кемени и коэффициент согласованности

Пусть m экспертов ($m > 2$) задали ранжировки альтернатив по индивидуальным предпочтениям. Для характеристики степени согласованности экспертов при парном сравнении альтернатив вводится коэффициент согласованности [Литвак, 1982]:

$$V = \frac{8 \sum_{i \neq j} C_{b_{ij}}^2}{m(m-1)n(n-1)} - 1 ,$$

где b_{ij} – число экспертов, отдавших предпочтение объекту o_i по сравнению с объектом o_j.

Значения V изменяются от 1, при полном совпадении ранжировок экспертов, до 0, когда согласованность оценок экспертов отсутствует.

В роботах[Кузьмин 1974], [Тюрин, 1978] указывется на связь, которая существует между мерами близости и коэффициентами ранговой корреляции по Кенделлу [Кузьмин, 1974]. Коэффициент ранговой корреляции по Кенделлу для ранжировок $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ $\tau(P^{(1)}, P^{(2)})$, а также мера близости Кемени $d(P^{(1)}, P^{(2)})$, удовлетворяют при отсутствии связанных рангов следующему соотношению:

$$\tau(P^{(1)},P^{(2)}) = 1 - \frac{2d(P^{(1)},P^{(2)})}{n(n-1)}.$$

Рассмотрим задачу нахождения строгой результирующей ранжровки в виде медианы Кемени (это частный случай медианы Кемени-Снелла, когда не учитывается компетентность экспертов [Тоценко,2002]). Тогда справедливым будет следующий результат.

Теорема 7.1. Для медианы Кемени и коэффициента согласованности V справедлива оценка:

$$\frac{n(n-1)}{2}\left[m - \sqrt{m(1+V(m-1))}\right] \le d(R^*) \le \frac{n(n-1)}{2}(m-1)(1-V).$$

Заключение

На основе предложенных процедур построен декомпозиционный алгоритм решения задачи (1.1). Осуществлена его программная реализация с использованием ресурса высокоэффективных кластерных систем СКИТ-1 и СКИТ-2 Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАНУ. Получены первые результаты, позволяющие сделать вывод о его перспективности. Окончательные результаты будут опубликованы.

Библиография

[Волошин, 2006] Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Теорія прийняття рішень .-Київ:ВПЦ КУ, 2006. –304с.

[Антосяк, 2007] Антосяк П.П. До правил голосування Кондорсе і Борда// Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2007. – № 4. – С. 50−55.

[Михалевич, 1965] Михалевич В.С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение. I. II// Кибернетика. – 1965. − №1. – С. 45-55; − №2. – С. 85-88.

[Волкович, Волошин, 1978] Волкович В.Л., Волошин А.Ф. Об одной схеме метода последовательного анализа и отсеивания вариантов// Кибернетика. – 1978. – №4. – С. 98-105.

[Волошин, 1987] Волошин А.Ф. Метод локализации области оптимума в задачах математического программирования// Доклады АН СССР. – 1987. –т. 293, №3.– С. 549-553.

[Литвак, 1982] Литвак Б.Г. Экспертная информация: Методы получения и анализа. – М.: Радио и связь, 1982. – 184 с.

[Антосяк, 2006] Антосяк П.П. Алгоритм побудови колективного ранжування на основі методу вектора спаду// Вісник Київського університету. Вип.4 Серія: фіз.-мат. науки, Київ, 2006. – С.145-147.

[Антосяк, 2005] Антосяк П.П., Волошин О.Ф. Алгоритм знаходження медіани Кемені-Снелла методом ідеальної точки// Вісник Київського університету. Вип.3 Серія: фіз.-мат. науки, Київ, 2005.

[Макаров, 1982] Макаров И.М. и др. Теория выбора и принятия решений. – М.: Наука, 1982. – 328 с.

[Мулен, 1991] Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991. – 464 с.

[Кузьмин, 1974] Кузьмин В.Б., Овчинников С.В. Об измерениях в порядковых шкалах//Автоматика, 1974, №11.

[Тюрин, 1978] Тюрин Ю.Н. Непараметрические методы статистики. – М.: Знание, 1978.

[Тоценко, 2002] Тоценко В.Г. Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. – Київ: Наукова думка, 2002. – 381 с.

Сведения об авторах

***Антосяк Павел Павлович** – Ассистент, Ужгородский национальный университет, математический факультет. Ужгород, Украина. E-mail: antosp@ukr.net*

***Волошин Алексей Федорович** – Профессор, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики. Киев, Украина. E-mail: ovoloshin@unicyb.kiev.ua*