ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ

Игорь Горбань

Аннотация: *Для описания физических процессов в непредсказуемо меняющихся статистических условиях предложены гиперслучайные марковские модели. Введены новые определения понятий сходимости в среднеквадратическом последовательности гиперслучайных величин и последовательности гиперслучайных функций, позволившие ввести понятия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости гиперслучайных функций. Обобщено понятие марковского процесса на случай гиперслучайных процессов. Получены прямое и обратное уравнения Колмогорова, описывающие диффузионные гиперслучайные процессы. Исследованы винеровский и гауссовский марковский гиперслучайные процессы.*

Keywords*: теория гиперслучайных явлений, марковский процесс, сходимость в среднеквадратическом.*

ACM Classification Keywords*: G.3 Probability and Statistics*

Введение

Для описания различных физических эффектов широко используются вероятностные подходы. Теория вероятности создавалась, а затем развивалась в первую очередь для описания физических событий, величин, процессов и полей, обладающих свойством статистической устойчивости. Под статистической устойчивостью или стабильностью понимается существование определенного предела частоты соответствующего математического объекта (события, величины, процесса или поля) при устремлении объема выборки к бесконечности. Статистически ненеустойчивые физические явления (а они составляют подавляющее большинство реальных явлений) с трудом поддаются описанию известными вероятностными методами.

Для описания и изучения статистически нестабильных явлений недавно [1] на базе классической теории вероятностей и математической статистики была предложена новая физико-математическая теория гиперслучайных явлений, рассматривающая как математические, так и физические аспекты проблемы учета статистической неустойчивости физических явлений.

Математическими моделями гиперслучайных физических явлений (событий, величин, процессов, полей) являются соответствующие математические объекты, под которыми понимается множество случайных событий, величин или функций, каждый элемент которого ассоциируется с определенными статистическими условиями $g \in G$.

В настоящее время сформированы математические основы новой теории, однако, остаются еще не изученными многие вопросы, представляющие прикладной интерес, в частности вопросы ее применения для решения статистических задач физики.

Целью настоящей статьи является разработка основ построения гиперслучайных марковских моделей для решения таких задач.

Сходимость в среднеквадратическом, непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость гиперслучайных функций

В работах [1, 2] были введены понятия четырех типов сходимости последовательностей гиперслучайных величин и гиперслучайных функций в предположении, что для всех элементов последовательности статистические условии одинаковы. Это предположение существенно ограничивает класс решаемых задач. В этой связи представляется целесообразным переопределить понятия сходимости, в частности понятие сходимости в среднеквадратическом.

Пусть имеется последовательность гиперслучайных величин $\mathrm{X} = \{X_1, ..., X_N\}$ и гиперслучайная величина X. Для всех $X_1, ..., X_N$ и X определены условия $g \in G$ и условные функции распределения $F_1(x_1 / g)$,..., $F_1(x_N / g)$ и $F(x / g)$.

Тогда последовательность X сходится в среднеквадратическом к X, если при $N \to \infty$ и $g_N \to g$

$$\mathrm{M}[\left|X_N / g_N - X / g\right|^2] \to 0,$$

т.е. случайная последовательность $X_1 / g_1, ..., X_N / g_N$ сходится в среднеквадратическом к случайной величине X / g. При этом будем писать

$$\underset{\substack{N \to \infty \\ g_N \to g}}{\mathrm{l.i.m.}} X_N / g_N = X / g$$

или $\underset{N \to \infty}{\mathrm{l.i.m.}} X_N = X$.

Аналогично, пусть имеется последовательность гиперслучаных функций $\mathrm{X}(t) = \{X_1(t), ..., X_N(t)\}$ $(t \in T)$ и гиперслучайная функция $X(t)$, для которой определены условные функции распределения $F_1(x_1; t / g)$,..., $F_1(x_N; t / g)$ и $F(x; t / g)$.

Тогда последовательность $\mathrm{X}(t)$ сходится к $X(t)$ в среднеквадратическом, если для всех $t \in T$ при $N \to \infty$ и $g_N \to g$

$$\mathrm{M}[\left|X_N(t) / g_N - X(t) / g\right|^2] \to 0,$$

т.е. $\underset{\substack{N \to \infty \\ g_N \to g}}{\mathrm{l.i.m.}} X_N(t) / g_N = X(t) / g$.

Заметим, что в приведенных определениях сходимости последовательности гиперслучайных величин и последовательности гиперслучайных функций в отличие от предложенных в работах [1, 2] определениях этих же понятий не обязательно совпадение статистических условий последовательности и объекта, к которому эта последовательность стремиться ($g_1, ..., g_N, g$ могут быть в общем случае разными).

Гиперслучайную функцию $X(t)$ $(t \in T)$ будем называть гиперслучайной функцией второго порядка, если математическое ожидание нижней границы квадрата этой функции ограничено для всех $t \in T$: $\mathrm{M}_I[X^2(t)] < \infty$.

Новое понятие сходимости последовательностей гиперслучайных функций позволяет ввести понятия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости.

Гиперслучайную функцию второго порядка $X(t) = \{X(t) / g_t \in G\}$ будем называть непрерывной в среднеквадратическом в точке t, если

$$\underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{l.i.m.}} X(t + \Delta t) = X(t),$$

т. е. для всех условий g_t, $g_{t+\Delta t} \in G$

$$\lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ g_{t+\Delta t} \to g_t}} \mathrm{M}[\left|X(t + \Delta t) / g_{t+\Delta t} - X(t) / g_t\right|^2] = 0.$$

Гиперслучайную функцию $X(t)$ второго порядка назовем дифференцируемой в среднеквадратическом в точке t , если существует функция $X'(t)$ (производная), описываемая следующим выражением:

$$X'(t) = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t},$$

т. е. для всех условий $g_t, g_{t+\Delta t} \in G$

$$\lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ g_{t+\Delta t} \to g_t}} \mathrm{M}\left[\left| \frac{X(t+\Delta t)/g_{t+\Delta t} - X(t)/g_t}{\Delta t} - X'(t)/g_t \right|^2 \right] = 0 .$$

Гиперслучайную функцию $X(t)$ второго порядка будем называть интегрируемой на интервале $T(\tau)$, если при произвольном разбиении интервала $T(\tau)$ на N интервалов $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ независимо от выбора точек t_n существует функция $Y(\tau)$ (интеграл гиперслучайной функции $X(t)$), определяемая выражением

$$Y(\tau) = \lim_{\substack{\max \Delta t_n \to 0 \\ g_{t_n} \to g_t}} \sum_n X(t_n)\,\Delta t_n = \int_{T(\tau)} X(t)\,\mathrm{d}t ,$$

т. е. для всех $g_{t_n}, g_t \in G \; (n = \overline{1, N})$

$$\lim_{\max \Delta t_n \to 0} \mathrm{M}\left[\left| \sum_n X(t_n)/g_{t_n}\,\Delta t_n - \int_{T(\tau)} X(t)/g_t \mathrm{d}t \right|^2 \right] = 0 .$$

Иначе, гиперслучайная функция $X(t)$ второго порядка непрерывна, дифференцируема или интегрируема, если непрерывны условия и соответственно непрерывны, дифференцируемы или интегрируемы составляющие случайные функции $X(t)/g_t$ для всех $g_t \in G$.

Заметим, что на основании известных теорем для случайных функций справедливы следующие утверждения.

1) Гиперслучайная функция $X(t)$ второго порядка непрерывна в среднеквадратическом в точке t тогда и только тогда, когда для всех $g_t \in G$ математические ожидания $m_{x/g_t}(t)$ случайных функций $X(t)/g_t$ непрерывны в точке t, а ковариационные функции $R_{x/g_{t_1}g_{t_2}}(t_1, t_2)$ этих случайных функций непрерывны в точке $t = t_1 = t_2$.

2) Гиперслучайная функция $X(t)$ второго порядка дифференцируема в точке в t тогда и только тогда, когда для всех $g_t \in G$ математические ожидания $m_{x/g_t}(t)$ случайных функций $X(t)/g_t$ дифференцируемы в точке t и в точке $t_1 = t_2$ существуют смешанные производные второго порядка $\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} R_{x/g_{t_1}g_{t_2}}(t_1, t_2)$ от ковариационных функций $R_{x/g_{t_1}g_{t_2}}(t_1, t_2)$.

3) Гиперслучайная функция $X(t)$ второго порядка с математическими ожиданиями $m_{x/g_t}(t)$ и ковариационными функциями $R_{x/g_{t_1}g_{t_2}}(t_1, t_2)$ интегрируема, если существуют интегралы $\int_{T(\tau)} m_{x/g_t}(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_{T(\tau)} \int_{T(\tau)} R_{x/g_{t_1}g_{t_2}}(t_1, t_2) \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2$. При этом

$$\mathrm{M}\left[\int\limits_{T(\tau)} X(t)/g_t\,\mathrm{d}t\right] = \int\limits_{T(\tau)} m_{x/g_t}(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

$$\mathrm{M}\left[\int\limits_{T(\tau)}\int\limits_{T(\tau)} (X(t_1)/g_{t_1})(X(t_2)/g_{t_2})\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right] =$$

$$= \int\limits_{T(\tau)}\int\limits_{T(\tau)} R_{x/g_{t_1}g_{t_2}}(t_1,t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 + \int\limits_{T(\tau)} m_{x/g_{t_1}}(t)\mathrm{d}t \int\limits_{T(\tau)} m_{x/g_{t_2}}(t)\mathrm{d}t\,.$$

Непрерывный марковский гиперслучайный процесс

Пусть $X_0 = X(t_0),\ldots,X_N = X(t_N)$ — значения непрерывного гиперслучайного процесса $X(t)$ в произвольные моменты времени $t_0 < t_1 < \ldots < t_N$. Гиперслучайный процесс $X(t)$ назовем марковским, если для любого момента времени t_N и любого условия $g_{t_N} \in G$ одномерная условная плотность вероятности

$$\begin{aligned} &f_1(x_N;t_N;g_{t_N}/x_0,\ldots,x_{N-1};t_0,\ldots,t_{N-1};g_{t_0},\ldots,g_{t_{N-1}}) = \\ &= f_1(x_N;t_N;g_{t_N}/x_{N-1};t_{N-1};g_{t_{N-1}}). \end{aligned} \tag{1}$$

Отсюда следует, что многомерная плотность вероятности марковского гиперслучайного процесса $X(t)$ может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} &f_N(x_0,\ldots,x_N;t_0,\ldots,t_N;g_{t_0},\ldots,g_{t_N}) = \\ &= f_1(x_0;t_0;g_{t_0})\prod_{n=1}^{N}\Pi(x_n;t_n;g_{t_n}/x_{n-1};t_{n-1};g_{t_{n-1}}), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\Pi(x_n;t_n;g_{t_n}/x_{n-1};t_{n-1};g_{t_{n-1}}) = f_1(x_n;t_n;g_{t_n}/x_{n-1};t_{n-1};g_{t_{n-1}})$ – плотность вероятности перехода случайной величины $X(t)/g_t$, находящейся в состоянии x_{n-1} в момент времени t_{n-1} в условиях $g_{t_{n-1}}$ в состояние x_n в момент времени t_n в условиях g_{t_n}.

Из выражения (1) следует, что если значения гиперслучайного процесса в любые несовпадающие моменты времени независимы при всех условиях g_t [1], то процесс – марковский. Обратное утверждение неверно.

Плотность вероятности перехода $\Pi(x;t;g_t/x';t';g_{t'})$ является неотрицательной величиной, нормированной к единице:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Pi(x;t;g_t/x';t';g_{t'})\mathrm{d}x = 1\,.$$

Кроме того, эта плотность вероятности обладает свойством сингулярности:

$$\lim_{\substack{t\to t'\\ g_t\to g_{t'}}}\Pi(x;t;g_t/x';t';g_{t'}) = \delta(x-x')$$

и удовлетворяет обобщенному уравнению Маркова (уравнению Смолуховского)

$$\Pi(x;t;g_t/x_0;t_0;g_{t_0}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Pi(x;t;g_t/x';t';g_{t'})\Pi(x';t';g_{t'}/x_0;t_0;g_{t_0})\mathrm{d}x'\,.$$

Для марковского гиперслучайного процесса $X(t)$ плотность вероятности перехода $\Pi(x;t;g_t/x_0;t_0;g_{t_0})$ из состояния x_0 в момент времени t_0 в условиях g_{t_0} в состояние x в момент времени t в условиях g_t определяется уравнением

$$-\frac{\partial}{\partial t_0}\Pi(x;t;g_t/x_0;t_0;g_{t_0}) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_\nu(x_0;t_0;g_{t_0})}{\nu!}\frac{\partial^\nu \Pi(x;t;g_t/x_0;t_0;g_{t_0})}{\partial x_0^\nu}, \tag{3}$$

где

$$A_\nu(x_0;t_0;g_{t_0}) =$$
$$= \lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ g_{t_0+\Delta t}\to g_{t_0}}}\frac{1}{\Delta t}\mathrm{M}\left[(X(t_0+\Delta t;g_{t_0+\Delta t}/x_0;t_0;g_{t_0}) - X(t_0;g_{t_0}/x_0;t_0;g_{t_0}))^\nu\right].$$

Это выражение прямо следует из известной теоремы для случайного марковского процесса [3, 4].

Случайная величина $X(t_0+\Delta t;g_{t_0+\Delta t}/x_0;t_0;g_{t_0}) - X(t_0;g_{t_0}/x_0;t_0;g_{t_0})$ представляет собой приращение состояния, происходящее за время Δt. Поэтому коэффициенты $A_\nu(x_0;t_0;g_{t_0})$ можно трактовать как локальные скорости изменения начальных моментов ν-го порядка приращения состояния.

По аналогии с уравнениями, описывающими диффузионные случайные процессы, гиперслучайные процессы, описываемые уравнением (3) с коэффициентами, равными нулю для всех $\nu \geq 3$, будем называть диффузионным или первым (обратным) уравнением Колмогорова:

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial t_0}\Pi(x;t;g_t/x_0;t_0;g_{t_0}) =\\ &= a(x_0;t_0;g_{t_0})\frac{\partial}{\partial x_0}\Pi(x;t;g_t/x_0;t_0;g_{t_0}) + \frac{1}{2}b(x_0;t_0;g_{t_0})\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\Pi(x;t;g_t/x_0;t_0;g_{t_0}),\end{aligned} \tag{4}$$

а уравнение

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\Pi(x;t;g_t/x_0;t_0;g_{t_0}) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x;t;g_t)\Pi(x;t;g_t/x_0;t_0;g_{t_0})\right] +\\ &+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[b(x;t;g_t)\Pi(x;t;g_t/x_0;t_0;g_{t_0})\right]\end{aligned} \tag{5}$$

– уравнением Фоккера – Планка – Колмогорова или прямым уравнением Колмогорова, где $a(x_0;t_0;g_{t_0}) = A_1(x_0;t_0;g_{t_0})$ – коэффициент сноса, а $b(x_0;t_0;g_{t_0}) = A_2(x_0;t_0;g_{t_0})$ – коэффициент диффузии.

Гиперслучайные марковские процессы, описываемые уравнениями (4), (5), будем называть диффузионными.

Уравнения (4) и (5) – зависимые.

Из уравнения (5) следует уравнение для одномерной плотности вероятности

$$\frac{\partial}{\partial t}f_1(x;t;g_t) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x;t;g_t)f_1(x;t;g_t)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[b(x;t;g_t)f_1(x;t;g_t)\right]. \tag{6}$$

Гиперслучайный диффузионный марковский процесс будем называть однородным во времени, если плотность вероятности перехода $\Pi(x;t;g_t/x_0;t_0;g_{t_0})$ не зависит прямо от времени t, t_0 и условий g_t, g_{t_0}, а определяется лишь их разностями $\tau = t - t_0$, $g_\tau = g_t - g_{t_0}$:

$\Pi(x;t;g_t/x_0;t_0;g_{t_0})=\Pi(x/x_0;\tau;g_\tau)$. Одномерная плотность вероятности такого процесса $f_1(x)$, а также коэффициенты сноса $a(x)$ и диффузии $b(x)$ не зависят от времени и условий.

Если непрерывный гиперслучайный марковский процесс стационарен в узком смысле при всех условиях [2], то он однороден. Это следует из известной теоремы для случайных марковских процессов [4]. Обратное утверждение неверно.

Из соотношения (6) следует, что для стационарного в узком смысле при всех условиях диффузионного однородного гиперслучайного марковского процесса

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[b(x)f_1(x)\right]=2a(x)f_1(x)+C,$$

где C – константа, определяемая из условия нормировки.

Стохастическим дифференциальным уравнением, описывающим гиперслучайный процесс, будем называть уравнение вида

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=h(x,t,g_t)+g(x,t,g_t)n(t;g_t),$$

где $h(x,t,g_t)$ и $g(x,t,g_t)$ — детерминированные функции, удовлетворяющие условиям Липшица

$$\left|h(x,t,g_t)-h(y,t,g_t)\right|+\left|g(x,t,g_t)-g(y,t,g_t)\right|\le L\left|x-y\right| \quad (L=\mathrm{const}>0),$$

$n(t)=\left\{n(t;g_t),\ g_t\in G\right\}$ – гиперслучайный гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием и спектральной плотностью мощности $N_0(g_t)/2$, зависящей от условий g_t в момент времени t.

Заметим, что в данном случае гиперслучайный белый шум отличается от описанного в работе [1] гиперслучайного белого шума при всех условиях тем, что статистические условия и спектральная плотность мощности могут быть разными для разных моментов времени t.

Рассмотрим два примера диффузионных гиперслучайных марковских процессов: винеровский и гауссовский марковский.

Винеровский гиперслучайный процесс

Разберем следующую задачу статистической механики. Пусть в газе или жидкости находится микрочастица единичной массы. Температура среды T непредсказуемо меняется в пределах $[T_1,T_2]$. При фиксированной температуре T скорость теплового движения молекулы в фиксированном направлении представляет собой случайную величину, описываемую в приближении Максвелла гауссовским законом распределения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией kT/m [5], где k – постоянная Больцмана, m – масса молекулы.

Из-за непредсказуемого изменения температуры среды скорость теплового движения молекулы статистически нестабильна и может быть описана гиперслучайной величиной, границы дисперсии которой равны kT_1/m, kT_2/m. Молекулы, сталкиваясь с частицей, вызывают ее перемещение. В каждый фиксированный момент времени происходит большое число таких столкновений. Силу удара $N(t;g_t)$, вызывающего движение частицы вдоль заданного направления, можно рассматривать как гиперслучайную функцию гауссовского типа (при фиксированных статистических условиях g_t (температуре среды) сила удара описывается гауссовской случайной функцией в виде гауссовского белого шума с нулевым математическим ожиданием и спектральной плотностью мощности $N_0(g_t)/2$).

При этом скорость движения частицы $V(t;g_t)$ также оказывается гиперслучайной функцией.

На основании второго закона Ньютона эта скорость описывается следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\frac{\mathrm{d}v(t;g_t)}{\mathrm{d}t}=n(t;g_t)\,. \tag{7}$$

Решением уравнения при нулевом начальном условии ($v(0;g_t)=0$) является чисто диффузионный (винеровский) гиперслучайный процесс

$$v(t;g_t)=\int_0^t n(t_1;g_{t_1})\,\mathrm{d}t_1\,. \tag{8}$$

Из выражения (8) видно, что значение процесса в текущий момент времени t в условиях g_t определяется множеством статистических условий в момент времени t и предшествующие ему моменты времени $t_1<t$. Это значение зависит от частоты встречаемости в реализации тех или иных условий.

Гиперслучайный винеровский процесс обладает свойствами, похожими (но не идентичными) свойствам случайного винеровского процесса:

- гиперслучайный винеровский процесс является центрированным ($m_v(t)=\mathrm{M}\left[V(t;g_t)\right]=0$),
- дисперсия этого процесса описывается интегралом:

$$\sigma_v^2(t)=\int_0^t\int_0^t \mathrm{M}\left[n(t_1;g_{t_1})n(t_2;g_{t_2})\right]\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2=\int_0^t\frac{N_0(g_{t_1})}{2}\mathrm{d}t_1$$

- (в частном случае, когда условия g не зависят от времени t дисперсия содержит линейный множитель: $\sigma_v^2(t)=\dfrac{N_0(g)}{2}t$),
- процесс – гауссовский. Его плотность вероятности описывается выражением

$$f_1(v;t;g_t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v(t)}\exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_v^2(t)}\right), \tag{9}$$

- процесс – марковский (т.к. описывается выражением $v(t_3)=v(t_2;g_{t_2})+\int_{t_2}^{t_3}n(t,g_t)\mathrm{d}t$),
- процесс имеет нулевой коэффициент сноса ($a(v;t;g_t)=0$) и коэффициент диффузии $b(v;t;g_t)=\dfrac{N_0(g_t)}{2}$, в общем случае зависящий от времени.

Границы дисперсии $\sigma_{ix}^2(t)$, $\sigma_{sx}^2(t)$ винеровского гиперслучайного процесса описываются выражениями

$$\sigma_{iv}^2(t)=\frac{N_{i0}}{2}t\,,\qquad\qquad \sigma_{sv}^2(t)=\frac{N_{s0}}{2}t\,,$$

где N_{i0} и N_{s0} – соответственно нижняя и верхняя границы спектральной плотности мощности $N_0(g_t)$ гиперслучайного белого шума.

Отсюда следует, что диапазон изменения дисперсии расширяется пропорционально t.

Для гиперслучайного винеровского процесса с учетом приведенных свойств прямое уравнение Колмогорова имеет вид

$$\frac{\partial f_1(v;t;g_t)}{\partial t} = \frac{1}{4} N_0(g_t) \frac{\partial^2 f_1(v;t;g_t)}{\partial v^2},$$

а его решение описывается выражением (9).

Гауссовский марковский гиперслучайный процесс

Обобщением рассмотренного винеровского гиперслучайного процесса является гиперслучайный гауссовский марковский процесс $X(t)$, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению

$$\frac{\mathrm{d}x(t;g_t)}{\mathrm{d}t} + \alpha x(t;g_t) = \gamma\, n(t;g_t), \tag{10}$$

где α, γ — постоянные коэффициенты.

К такому уравнению можно прийти, в частности, рассматривая предыдущую задачу с учетом вязкости среды.

Тот факт, что рассматриваемый гиперслучайный процесс $X(t)$ является гауссовским следует из того, что $N(t;g_t)$ — гауссовский белый шум, а уравнение (10) — линейное. То, что гиперслучайный процесс $X(t)$ является марковским, следует из того, что случайный процесс $X(t;g_t)$ – марковский [4].

Общим решением однородного уравнения, соответствующего уравнению (10), является $x(t;g_t) = C\mathrm{e}^{-\alpha t}$, где C – константа. Частным решением этого уравнения является $x(t;g_t) = \gamma \mathrm{e}^{-\alpha t} \int_0^t \mathrm{e}^{\alpha t_1} n(t_1, g_{t_1}) \mathrm{d}t_1$, а его общим решением –

$$x(t;g_t) = x(0,g_0)\mathrm{e}^{-\alpha t} + \gamma \mathrm{e}^{-\alpha t} \int_0^t \mathrm{e}^{\alpha t_1} n(t_1, g_{t_1}) \mathrm{d}t_1, \tag{11}$$

где $x(0,g_0)$ – начальные условия в нулевой момент времени в условиях g_0.

Из выражения (11) видно, что значение процесса в текущий момент времени t в условиях g_t также как и для винеровского гиперслучайного процесса определяется множеством статистических условий g_{t_1} в предшествующие моменты времени $t_1 < t$ и в момент времени t. Но в отличие от винеровского процесса это значение зависит не от частоты встречаемости в реализации тех или иных условий g_{t_1}, а от последовательности следования этих условий.

Гиперслучайный гауссовский марковский процесс обладает свойствами, похожими (но не идентичными) свойствам случайного гауссовского марковского процесса:

- математическое ожидание гиперслучайного гауссовского марковского процесса не зависит от изменения во времени условий и определяется условиями g_0 в первоначальный момент времени: $m_x(t) = x(0;g_0)\mathrm{e}^{-\alpha t}$,
- дисперсия этого процесса $\sigma_x^2(t) = \frac{\gamma^2}{2} \int_0^t N_0(g_{t_1}) \mathrm{e}^{2\alpha(t_1 - t)} \mathrm{d}t_1$,
- ковариационная функция процесса $R_x(t_1,t_2) = \sigma_x^2(t)\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}$, где $\tau = t_2 - t_1;\ t = \min(t_1,t_2) \geq 0$,
- коэффициент сноса $a(x;t;g_t) = -\alpha x(t;g_t)$, а коэффициент диффузии $b(x;t;g_t) = \gamma^2 \frac{N_0(g_t)}{2}$.

Нетрудно убедиться, что при $\alpha > 0$ границы дисперсии, $\sigma_{ix}^2(t)$, $\sigma_{sx}^2(t)$ и границы ковариационной функции $R_{ix}(t_1,t_2)$, $R_{sx}(t_1,t_2)$ гауссовского марковского гиперслучайного процесса описываются выражениями

$$\sigma_{ix}^2(t) = \frac{N_{i0}\gamma^2}{4\alpha}\left(1-\mathrm{e}^{-2\alpha t}\right), \qquad \sigma_{sx}^2(t) = \frac{N_{s0}\gamma^2}{4\alpha}\left(1-\mathrm{e}^{-2\alpha t}\right),$$

$$R_{ix}(t_1,t_2) = \sigma_{ix}^2(t)\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}, \qquad R_{sx}(t_1,t_2) = \sigma_{sx}^2(t)\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}.$$

Отсюда следует, что с ростом t диапазон изменения дисперсии гиперслучайного процесса постепенно возрастает, но при $t \to \infty$ стремится к независящему от времени интервалу $\left[\frac{N_{i0}\gamma^2}{4\alpha}, \frac{N_{s0}\gamma^2}{4\alpha}\right]$ (рис. 1,*а*). Дисперсия процесса в момент времени t определяется в первую очередь статистическими условиями в этот момент времени и непосредственно предшествующие ему моменты времени.

При увеличении величины τ (интервала между отсчетами) диапазон изменения ковариационной функции уменьшается и при $\tau \to \infty$ стремится к нулю (рис. 1,*б*). При этом коэффициент корреляции процесса $r_x(t_1,t_2) = \frac{R_x(t_1,t_2)}{\sigma_x^2(t)} = \mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}$ не зависит от изменения статистических условий во времени.

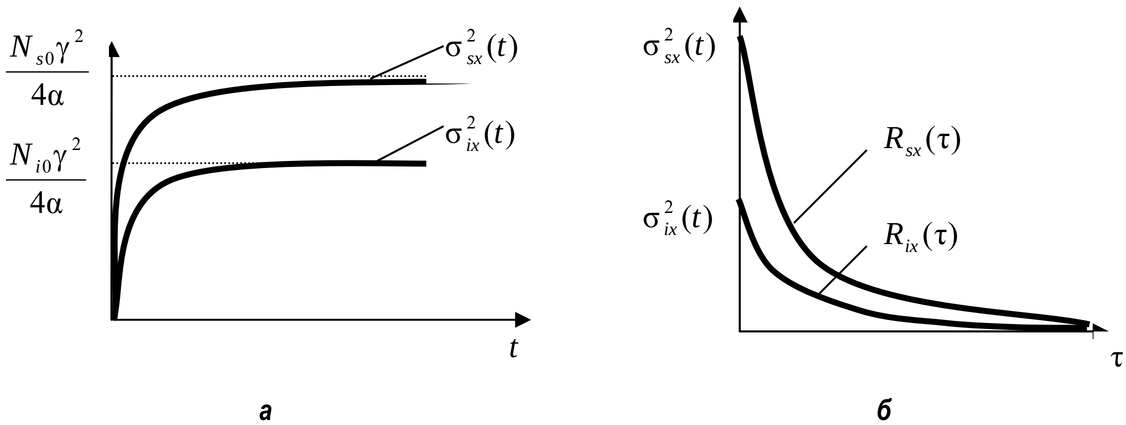

Рис. 1.

Прямое уравнение Колмогорова для плотности вероятности гауссовского гиперслучайного процесса имеет вид

$$\frac{\partial f_1(x;t;g_t)}{\partial t} = \alpha\frac{\partial}{\partial x}[x f_1(x;t;g_t)] + \frac{\gamma^2 N_0(g_t)}{2}\frac{\partial^2 f_1(x;t;g_t)}{\partial x^2}.$$

Решение этого уравнения описывается гауссовской функцией

$$f_1(x;t;g_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x(t)}\exp\left(-\frac{(x-m_x(t))^2}{2\sigma_x^2(t)}\right).$$

Выводы

1. Для описания физических процессов в непредсказуемо меняющихся статистических условиях предложены гиперслучайные марковские модели.

2. Предложены новые определения понятия сходимости в среднеквадратическом последовательности гиперслучайных величин и последовательности гиперслучайных функций, позволившие ввести понятия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости гиперслучайных функций.

3. Обобщено понятие марковского процесса на случай гиперслучайных процессов. Получены прямое и обратное уравнения Колмогорова, описывающие диффузионные гиперслучайные процессы.

4. Исследованы винеровский и гауссовский марковский гиперслучайные процессы. Установлено, что значения этих процессов определяются статистическими условиями в текущий момент времени и моменты времени, предшествующие ему. Дисперсия винеровского гиперслучайного процесса определяется частотой повторяемости статистических условий в моменты времени, предшествующие рассматриваемому. Дисперсия гауссовского марковского гиперслучайного процесса определяется в основном статистическими условиями в текущий и непосредственно предшествующие моменты времени. Математическое ожидание и коэффициент корреляции гиперслучайного гауссовского марковского процесса не зависят от изменения условий во времени.

Литература

[Горбань, 2007] Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений. К.: ИПММС НАН Украины, 2007. – 184 с.

[Горбань, 2006] Горбань И.И. Стационарные и эргодические гиперслучайные функции. // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2006. – № 6. – С. 54 – 70.

[Горбань, 2003] Горбань І.І. Теорія ймовірностей і математична статистика для наукових працівників та інженерів. – К.: Інститут проблем математичних машин і систем НАН України, 2003. – 244 с.

[Королюк и др., 1985] Королюк В.С. и др. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Наука, 1985. – 640 с.

[Яворский, Детлаф, 1968] Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике для инженеров и студентов ВУЗов. М.: Наука, 1968. – 940 с.

Сведения об авторе

***Горбань Игорь Ильич** – заместитель генерального директора по научной работе ГП „УкрНИУЦ”, доктор технических наук, профессор, Украина, Киев, ул. Святошинская, 2;*
e-mail: gorban@ukrndnc.org.ua.