СТРУКТУРЫ, НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Владимир Донченко

Аннотация: *Рассмотрены общие проблемы, связанные с математическим моделированием структуры объекта и неопределённости в информации о нём., включая природу, источники и математические методы их описания - моделирования. Проведена систематизация методов описания неопределённости.*

Ключевые слова*: Структурность, неопределённость, обратные задачи, нечёткие множества, преобразование Хока, псевдообращение по Муру – Пенроузу.*

ACM Classification Keywords*: G.3 Probability and statistics, G.1.6. Numerical analysis: Optimization; G.2.m. Discrete mathematics: miscellaneous.*

Вступление

Прикладная математика является основой универсального метода верифицированного описания объектов внешнего мира с целью их эффективного использования. Собственно, все физические теории представляют собой математические модели для специальных предметных областей (физических явлений), реализующие ту или иную степень абстракции в описании исследуемой области. В связи с задачей моделирования вообще и математического в частности принципиальными являются два момента, которые хотелось бы отметить. Прежде всего – это представление о структуре объекта: обычным является использование оборотов «структура объекта», «описание структуры объекта», и т.д. Объект выступает для исследователя в виде того, что интуитивно понимается как «структура». Таким образом, методы передачи структуры в математическом моделировании являются принципиальными в математическом описании (представлением в виде математической модели) исследуемого объекта. Другим принципиальным моментом, характеризующим исследуемый с целью математического моделирования объект, является то, что часто передаётся классическим выражением «неопределённость в поведении» исследуемого объекта. Классическим математическим средством описания неопределённости в её статистическом, «случайном», проявлении является теория вероятностей и математическая статистика (ТВиМС). Вторая половина XX столетия в математике характеризуется интенсивными усилиями по созданию математических средств описания и оперирования с неопределённостью, альтернативных ТВиМС, к которым можно отнести теорию построения оценок с гарантированной точностью (теорию минимаксного оценивания), теорию нечётких множеств, а также преобразование Хока (ПХ). В то же время, многие надежды, связывавшиеся с появившимися теориями, не оправдались. В значительной мере это относится к теории нечётких множеств. Как представляется, многообразие методов математического описания неопределённости, к которым можно отнести: 1) детерминированный, в том числе обратные задачи; 2) статистический; 3) метод получения оценок с гарантированной точностью; 4) метод нечётких множеств; 5) ПХ, – порождает необходимость приведения их к общей основе. Это означает осмысление природы неопределённости, создание общего методологического подхода, который позволил с единой точки зрения рассматривать разнообразные математические методы её описания.

Предлагаемая работа посвящена обсуждению двух, как представляются автору принципиальных, автору концепций «структуры» и «неопределённости». В ней классифицированы основные математические методы «структурирования» исследуемого объекта, и изложена концепция «множественных моделей неопределённости», связывающая представление о неопределённости в поведении исследуемого объекта с экспериментом. Платформа «множественных моделей «неопределенности» позволяет с единых позиций рассматривать математические методы описания неопределенности, к которым отнесены: детерминированный с проблемой скрытых параметров; обратные задачи: статистический; метод оценки параметров с гарантированной точностью (минимаксный); преобразование Хока (Hough Transform); нечёткий. Для последнего вида описания неопределённости обсуждаются внутренние и внешние проблемы развития, в широких предположениях доказано утверждение, позволяющее говорить о нечёткости как о статистическом феномене.

«Структура объекта»: «связь» и «взаимная зависимость» основных частей объекта

В представлении о структуре объекта реализуется представление о том, что объект состоит из взаимосвязанных частей. Таким образом термин «структура» является эквивалентом термина «связи» между частями объекта, рассматриваемого как единое целое. Причем оба эти термина используется на интуитивном, не определяемом строго уровне Важно только отметить, что в таком контексте математические средства описания того, что называют «структурой» объекта, оказываются средствами описания «связей», взаимной зависимости, которые существуют между выделенными частями исследуемого объекта.

«Структура объекта» – математические средства передачи

Если посмотреть на математику в части её прикладных возможностей: прежде всего с точки зрения возможностей описания структуры исследуемого объекта, то следует отметить, что, для перечисления основных средств описания структуры хватит пальцев одной руки: это отношения, операции, функции, наборы подмножеств. Все основные структуры объектов в тех или иных областях, включая и саму математику, являются комбинацией четырёх основных, упомянутых выше. Чёткое выделение основных способов описания структур - связей в математике делает, с одной стороны, абсолютно прозрачными выражения вида: «структура группы», которой снабжено то или иное множество; «структура линейного пространства», характерная для исследуемого объекта; «структура топологического пространства», «структура поля» и т.д. С другой – лишний раз демонстрирует плодотворность реализации программы Георга Кантора: все математические объекты – это множества, структурированные тем или иным способом: с тем или иным вариантом связей между элементами исследуемого множества.

Заметим, что, что хотя функции, как и операции, можно рассматривать как частный случай отношений, исторически они используются специальным, а не частным образом. Не обращаясь к строгим определениям, отметим следующие принципиальные примеры перечисленных выше основных или базовых математических «структур». Важным примером отношений являются отношение частичного порядка на множестве действительных чисел; примером операций – операции сложения и умножения на множестве действительных чисел, а также – покоординатного умножения или покоординатного сложения для конечных наборов чисел (числовых векторов). Важным примером функций являются: норма, скалярное произведение, расстояние(метрика). Топология, в том числе и на множестве действительных чисел, задаётся подходящими наборами множеств: тех, которые интерпретируются как открытые с соответствующими ограничениями-требованиями. Могут задаваться наборы замкнутых множеств, или – наборы окрестностей. Как и топология, измеримое пространство задаётся парой: множество и алгебра или σ - алгебра его подмножеств. Напомним, что по своему предназначению измеримое пространство используется как область определения меры или как носитель информации о событиях в теории случайных процессов.

Выражение «множество с заданной на нём структурой абелевой группы» означает что на множестве задана коммутативная бинарная(обозначаемая обычно «+») и нульарнарная операции (выделен элемент, обозначаемый через 0) с определёнными свойствами(например, ассоциативность) и связанные между собой определённым образом(например, *a+0=a*). Точно таким же образом, «структура линейного пространства»(«векторного») для множества означает задание на нём структуры абелевой группы(«+») и континуального набора операций умножения на скаляр, связанных между собой (например, $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$). Собственно, «векторами» называют элементы множества, являющегося линейным (векторным) пространством. Выражение «задана структура топологического пространства» означает, что для последовательностей элементов множества имеет смысл предельный переход, точнее – заданы наборы множеств, которые интерпретируется как открытые, а отсюда появляются замкнутые, окрестности и т.д.

Становится понятным выражения «топологическое векторное пространство» или «задание структуры топологического векторного пространства» (для абстрактного множества). Это означает, что в линейном (векторном) пространстве задаются открытые (замкнутые) множества : определён предельный переход для последовательностей элементов(векторов), причём, такой предельный переход согласован с основными линейными операциями(сложение, умножение на скаляр).

Вводя такие классические алгебраические объекты, как «алгебра» и «модель», академик А.И.Мальцев [Мальцев,1970] определял «алгебру» как множество с тем или иным набором операций, а «модель» – как множество с фиксированным набором операций и отношений.

Что понимают под наблюдением (экспериментом, опытом, испытанием)?

Понятие неопределенности в поведении исследуемого явления или системы тесно вязано с понятием «опыта», «эксперимента», «наблюдения», «испытания», которые рассматриваются в рамках категории «опыта». Перечисленные понятия имеют общенаучное содержание и часто употребляются как эквивалентные. Кроме того, они употребляются как эквивалентные между собой и в теории вероятностей и математической статистике. В своем общенаучном смысле эти понятия предназначены для описания деятельности, связанной с непосредственной фиксацией фактов на уровне явления: в процессе непосредственного взаимодействия людей с внешним миром

Для выяснения конкретики общенаучного контента определения «эксперимент», «опыт», «наблюдение» обратимся к нейтральному, обезличенному источнику, каковым является, к примеру, БСЭ (Большая советская энциклопедия).

В т. 18 БСЭ на стр.463-464 отмечается, что категория «опыта» совпадает по своей сути с категорией «эксперимента» и «наблюдения». Что касается «эксперимента» и «наблюдения», то в том же издании БСЭ, но в томе 30 на стр.6 в статье, посвященной понятию «эксперимент» отмечается, что термин происходит от латинского experimentum: проба, опыт, – и означает «метод познания, при помощи которого в контролируемых и управляемых условиях исследуются явления действительности». В той же статье отмечается, что «эксперимент» отличается от «наблюдения» тем, что в первом осуществляется активное оперирование с объектом исследования. Таким образом, в цитируемых источниках понятия «эксперимент» и «наблюдение» различаются активностью или пассивностью в оперировании с исследуемым объектом. В то же время в статье, посвященной «наблюдению» в том же издании БСЭ на стр. 186 в т. 17 отмечается, что наблюдение, обычно, является частью «эксперимента». В той же статье в связи с «наблюдением» появляется сочетание «регистрация наблюдений». Таким образом, можно сделать вывод о том, что опыт или эксперимент является методом познания, который заключается в воссоздании стандартных условий наблюдения исследуемого явления и фиксации соответствующих результатов: того что при созданных условиях появляется. Конечно же, вне поля зрения сознательно оставляется обсуждение вопросов о том, как и каким именно образом обеспечивается создание тех или иных условий, а также вопрос о том, как формируется представление о том, что же именно считать результатом эксперимента.

Эмпирический аспект: наблюдение (эксперимент, опыт, испытание)

Таким образом, из приведённых выше цитирований можно сделать вывод, что принципиальными составляющими «эксперимента» являются:

- воссоздание условий наблюдения для явления, которое исследуется;
- фиксация результатов эксперимента: того, что появляется в результате воспроизведения условий эксперимента..

Воспроизведение условий может носить активный или пассивный характер. В первом случае говорят об «эксперименте», для характеризации второго – употребляют термин «наблюдении». Хотя – подчеркнём ещё раз – оба термина могут употребляться как эквивалентные.

Отметим также, что термин «наблюдение» может употребляться для обозначения части «эксперимента», которая заключается в фиксации (регистрации) результатов «эксперимента».

Анализ статистических подходов к определению эксперимента с небольшими вариациями повторяет выделение приведенных выше основных составляющих эксперименту, выдвигая специфические дополнительные условия в том, что касается «стохастического эксперимента»

«Опыт», «эксперимент», «наблюдение», «испытание»: теоретико-вероятностный контент

Понятия «опыта», «эксперимента», «наблюдения », «испытания» являются также специальными понятиями теории вероятностей. Они имеют, в основном, общий эмпирический контент. И это является естественным, поскольку статистические (теоретико-вероятностные) методы являются признанным математическим средствам моделирования неопределенности в изучении явлений, где она проявляется в виде случайности. Детальнее о случайности, как виде неопределённости, ниже.

В теоретико-вероятностных источниках в определениях понятий «опыт», «эксперимент», «наблюдение» отсутствует единство и единственность в определении понятий. В разных источниках употребляются разные варианты в применении к одним тех же, как можно понять из модельных примеров, объектам. Кроме того, в некоторых источниках обсуждаемые термины употребляются с эпитетами «стохастический», «вероятностный», «случайный». Еще раз заметим, что все они употребляются как эквивалентные. Ниже приводится анализ употребления соответствующих понятий в тех или иных источниках и у тех или иных авторов.

В основополагающей книге А.Н. Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей» на стр.12 отмечается, что «применение теории вероятностей к реальному миру опыта происходит в соответствии со следующей схемой.

1. Считается, что имеется определенный комплекс условий $\mathfrak{C}$, который может воспроизводиться неограниченное количество раз.

2. Изучается определенный круг событий, которые могут происходить при воссоздание условий $\mathfrak{C}$.

В таком почтенном источнике, как учебник Б.В. Гнеденко «Курс теории вероятностей», понятие наблюдения в виде «испытания» также связывается с комплексом условий $\mathfrak{C}$. Но – дополнительно – и со связанным с этим комплексом условий набором событий (там же, стр.21). Испытание понимается как воссоздание упомянутого комплекса условий и проверке того, выполняется ли при этом воссоздании условий то или иное событие, выбранное из набора событий (там же, стр. 26). Таким образом «испытания» – это „наблюдение", результаты которого используются для проверки того, выполняется ли исследуемое событие.

У Г. Крамера в классическом издании «Математические методы статистики» на стр. 157-158 понятие „эксперимента" не определяется явно, но выделяется такие, которые могут быть повторенными многократно при одних и тех же условиях. Среди этого типа экспериментов дополнительно выделяются те, для которых в серии экспериментов «результат … может изменяться от одного наблюдения к другому самым неправильным образом». Автор также замечает, что «....в этих случаях мы будем говорить, что имеем дело с последовательностью случайных экспериментов» (там же, стр.158).

В учебнике А.В. Скорохода «Элементы теории вероятностей и случайных процессов» уже в начале книги на стр.5 отмечается, что «одним из основных понятий теории вероятностей является понятие стохастического эксперимента». И дальше указывается, что «так называются эксперименты, результаты которых нельзя предусмотреть». Опять же понятие стохастического эксперимента объясняется примерами (там же, стр.5). А на стр.9 (там же) подчеркивается такая черта стохастических экспериментов, как «возможность повторять их большое число раз». Кроме того, в качестве важной черты стохастического эксперимента, отмечается наличие определенного, не состоящего из одного элемента «числа событий» с ним связанных, среди которых выделяются элементарные события. Отметим, что хотя понятие события не определяется, понятие элементарного события определяется строго (там же, стор.6,7).

В фундаментальном издании, которым является «Справочник по теории вероятностей и математической статистике», изданного авторским коллективом в составе В.С. Королюка, М.И. Портенко, А.В. Скорохода, А.Ф. Турбина, авторы на стр.5 отмечают, что «эксперимент определяется определенным комплексом условий, которые или воспроизводятся искусственно, или осуществляются независимо от воли экспериментатора. Кроме того, они отмечают, что эксперимент определяется также результатами эксперимента, то есть определенными событиями, которые наблюдаются как результат осуществления этого комплекса условий». Авторы также различают «детерминированные» и «случайные» или «вероятностные» эксперименты. К первым относят те, «в которых условия эксперимента однозначно определяют наступление (или не наступление) событий, которые ожидаются». Что же касается «случайных» или «вероятностных экспериментов», то они определяются как такие, в которых «при одних и тех же условиях возможно появление событий, которые исключают друг друга». Отметим, – о чём ниже, – что отмеченных свойств эксперимента недостаточно, чтобы его можно было назвать стохастическим.

В классическом издании «Теория вероятностей» М. Лоева на стр. 13 отмечается, что «...наука имеет дело с закономерностями в испытаниях, которые повторяются», а также что «... долгое время Homo sapiens изучал только детерминированные испытания, в которых условия (причины) полностью определяют результаты (последствия)». Определяются также «случайные испытания» (там же, стр. 13) как такие, в которых при воссоздании их многократно, наблюдаемая частота любого из возможных результатов группируется вокруг определенных чисел. Таким образом, и в этом издании используются понятия, которые связаны с определенным комплексом условий: «испытание» и «случайные испытания», причём последние связываются с теми, в которых частоты появления разных результатов из числа возможных группируются вокруг определенных чисел. Конечно, обязательной является многоразовость «испытаний и наличие разных, вообще говоря, результатов в разных испытаниях.

В энциклопедическом по широте охвата издании, каковым является двухтомник В.Феллера «Введение в теорию вероятностей и ее приложения», в первом томе, понятие эксперимента считается интуитивно ясным и объясняется большим количеством примеров, которым посвященный §2 первого раздела. Собственно, речь идет о формализованном варианте виртуального опыта в общенаучном понимании, который характеризуется фиксированным набором возможных результатов.

Приведённые выше варианты определения «эксперимента» в теории вероятностей являются типичными и для других изданий, среди которых отметим учебник И.И. Гихмана, А.В.Скорохода, М.Й Ядренко «Теория вероятностей и математическая статистика», монографию «Теория вероятностей. Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы» Ю.В. Прохорова и Ю.А. Розанова, обстоятельный учебник А.Н. Ширяева «Вероятность», учебник И.Н. Коваленко и А.А. Филипповой «Теория вероятностей и математическая статистика», надежный учебник А.А. Боровкова «Курс теории вероятностей». В последнем автор отождествляет случайность с неопределенностью, связывая эту случайность – неопределенность, с незнанием (там же, стр.9), хотя на следующей странице, ссылаясь на принцип неопределенности в физике, отмечает, что неопределенность может быть принципиально свойственной исследуемому явлению. Кроме того, определяя объекты изучения в теории вероятностей (там же, стр.1), автор отмечает, что ими являются явления, для которых, с одной стороны «... те или другие эксперименты или наблюдения могут быть воспроизведены многократно при одинаковых условиях». С другой стороны, на той же странице отмечается, что «теорию вероятностей интересуют те эксперименты, результат которых, выраженный каким-то образом, может изменяться от опыта к опыту». Автор также связывает с результатами определённые события, которые могут в связи с этими результатами рассматриваться, и отмечает, что в этом случае события называют «случайными». Таким образом, в определении „эксперимента" по Боровкову общенаучный контент этого понятия (комплекс условий и, возможность многократного его воссоздания) связывается с изменчивостью результатов от наблюдения к наблюдению. Б.А.Севастьянов в «Курсе теории вероятностей и математической статистики» называет возможность многоразового воссоздания условий в числе ключевых моментов «эксперимента», поскольку именно возможность многократного воссоздания позволяет делать вывод о наступлении или не наступлении тех или иных событий (понятие, которое автором не определяется). Автор называет такие события массовыми, хотя естественнее было бы отнести это название к явлению, по наблюдением которого можно сделать вывод о наступлении или нет исследуемых событий. У У. Гренадера и В. Фрайбергера в «Кратком курсе вычислительной вероятности и статистики» на стр. 10, отмечается возможность повторения эксперимента при одинаковых условиях, а М. Де Гроот в монографии «Оптимальные статистические решения» заявляет, что «статистика как наука занимается теориями и методами, которые используются для принятия решений в условиях неопределенности и неполной информации» (там же, стр.11). А на стр. 14 (там же) отмечается, что «эксперимент употребляется здесь (в работе – *примечание автора*) в самом широком понимании для обозначения, в сущности, любого процесса, все возможные результаты которого могут быть указаны заранее и действительный результат которого является одним из указанных». Автор вводит специальное обозначение S для множества результатов и называет его выборочным пространством эксперимента.

Подводя итоги в определении и использовании понятий «эксперимент», «опыт», «наблюдение», «испытание» – иногда с эпитетами «случайный» или «стохастический» – в теории вероятностей отметим, что они употребляются, как эквивалентные в общем русле общенаучного понимания эксперимента. Специально подчеркиваются и выделяются следующие важные отличительные черты того, что в теории вероятностей и математической статистике понимают под экспериментом.

1. Наличие фиксированного комплекса условий, при котором наблюдается исследуемое явление. Указанный комплекс условий может воспроизводиться активно или пассивно.
2. Возможность многократного воспроизведения комплекса условий (массовость).
3. Возможность описания всех возможных результатов. Это множество результатов называют пространством элементарных событий, выборочным пространством эксперимента и т. п. Вместо множества возможных результатов может рассматриваться множество возможных событий, которые могут иметь или не иметь место в связи с наблюдающимися результатами.
4. Случайность, которая связывается с изменчивостью результатов от эксперимента к эксперименту или с наступлением в разных экспериментах событий, которые исключают друг друга: с непредсказуемостью результатов ли, событий ли от эксперимента к эксперименту.

Основные элементы формализации наблюдения: условия, результат и его регистрация

Как следует из вышеприведенного анализа, двумя основными составляющими эксперимента и в общем эмпирическом контексте и в статистическом понимании являются условия эксперимента (будем называть их также комплексом условий) и его результаты: того, что при этих условиях появляется.

1. Что касается условий эксперимента, то они должны допускать возможность их многоразового воссоздания (массовость). Каждый из возможных комплексов условий, при котором можно проводить эксперимент будем обозначать κ, соответственно – через K будем обозначать совокупность разных вариантов возможных комплексов условий, при которых можно проводить эксперимент.
2. Результат эксперимента, будем обозначать его y, – это то, что может появиться при воспроизведении комплекса условий $\kappa \in K$. Через Y_κ будем обозначать, вообще говоря, – множество всех возможных результатов, которые могут появиться при воспроизведении условий κ, поскольку фиксация комплекса условий, вообще говоря, не гарантирует однозначного результата эксперимента.

Важно отметить, что термин «результат эксперимента» для обозначения того, что может появиться при воспроизведении комплекса условий (то, что выше обозначается через y), часто употребляют с другим контентом: в смысле фиксации результатов экспериментов, что, как отмечалось выше, иногда понимают как часть эксперимента и обозначают также термином «наблюдение», понимаемом в узком смысле.

В дальнейшем «регистрация результатов» будет рассматриваться как составляющая эксперимента.

Определение 1. Регистрацией результата эксперимента будем назвать фиксацию того, что определяет две составляющие эксперимента: условия κ и результат y – т.е. пару $s=(\kappa,y)$ «условие-результат». Соответственно, под регистрацией серии из N экспериментов (выборкой) будет пониматься последовательность пар

$$s_1,\ldots,s_N = (\kappa_1,y_1),\ldots,(\kappa_N,y_N). \quad (1)$$

Замечание 1. Как показывает анализ, результат эксперимента, как значение y, часто не отличают от «регистрации результата эксперимента» как того, что фиксируется в связи с проведённым экспериментом и обозначают одним и тем же термином «результат эксперимента».

Основные составляющие наблюдения: детализация условий

Необходимость учёта в одной серии экспериментов с разными условиями привела к необходимости структуризации условий наблюдения. Такая структуризация обеспечивает контролируемое изменение условий наблюдения от одного эксперимента серии к другому. При таком изменении часть комплекса условий остается, вообще говоря, неизменной по умолчанию, а часть изменяется контролируемым образом. Собственно: это означает, что любой из возможных комплексов $\kappa \in K$ условий проведения эксперимента представляется парой $\kappa=(x,f)$, в которой $x \in X$ обозначает вариативную, изменяемую от эксперимента к эксперименту часть, а f – неизменную по умолчанию для серии экспериментов часть комплексов условий наблюдения.

Определение 2. Экспериментом с управляемыми условиями (УпрУЭкс) будем называть такой, в котором условия представляются в виде $\kappa=(x,f)$, $x \in X$, $f \in \Im$, $K = X \times \Im$, x будем называть вариативной частью условий, f - частью условий по умолчанию, κ - полными условиями эксперимента.

Замечание 2. Отметим, что при детерминированном подходе неизменная часть условий ассоциируется с однозначностью связи результата наблюдения с вариативной частью условий, т.е. – с функцией (функцией отклика) от вариативной, изменяемой части условий. Само же исследование в рамках УпрУЭкс экспериментов в литературе называют моделью «вход-выход» системы с очевидным делением на то, что называют входом, выходом и функцией отклика системы.

Регистрация наблюдений: практика

Следует отметить, в экспериментальной практике регистрация эксперимента в смысле определения 1 подменяется другими вариантами того, что называют фиксацией $s\ ,\ldots s_N$. Такими вариантами в рамках выделенных выше составляющих эксперимента могут быть следующие:

$$s_1,\ldots,s_N = \begin{cases} y_1,\ldots,y_N \\ (x_1,y_1),\ldots,(x_N,y_N) \\ (\kappa_1,y_1),\ldots,(\kappa_N,y_N) \end{cases}. \quad (2)$$

Множественные модели неопределённости (МнМоН)

Определение 3. В рамках введённых выше понятий множественными моделями неопределённости для исследуемого явления будем называть такое описание неопределённости, которое базируется на множественности значений Y,Y_x,Y_κ: того, что появляется или может появиться в результате серии экспериментов в (2). В зависимости от того, как понимается регистрация эксперимента, это может быть:

$$Y = \bigcup_{i=1}^{N} \{ y_i \},$$

$$Y_x = \bigcup_{i:x_i = x} \{ y_i \}, x \in \bigcup_{i=1}^{N} \{ x_i \}, \qquad (3)$$

$$Y_\kappa = \bigcup_{i:\kappa_i = x} \{ y_i \}, \kappa \in \bigcup_{i=1}^{N} \{ \kappa_i \}$$

Собственно, (3) фиксирует множественность значений того, что может появиться при фиксированном комплексе условий. В первом случае из (3) комплекс условий по умолчанию является одинаковым для всех экспериментов серии, во втором – в серии экспериментов условия варьируются. Множество возможных вариантов условий в серии экспериментов определяется множеством $\bigcup_{i=1}^{N} \{ x_i \}$,а Y_x определяет множество значений *y* в тех экспериментах серии, в которой вариативная часть одна и та же и определяется вариативной частью $x \in \bigcup_{i=1}^{N} \{ x_i \}$. В третьем варианте то же касается $\bigcup_{i=1}^{N} \{ \kappa_i \}$, которое описывает множества всех возможных вариантов условий серии.

МнМоН: неопределённость в детерминированных наблюдениях

Для детерминированности характерна однозначная связь «полные условия – результат»:

$$\kappa \to y_\kappa, Y_\kappa = \{ y_\kappa \}, \kappa \in K . \qquad (4)$$

Однако, если в серии экспериментов условия изменчивы, а регистрация проводится в виде $y_1,...,y_N$ вместо $(x_1, y_1),...,(x_N, y_N)$ или $(\kappa_1, y_1),...,(\kappa_N, y_N)$, то возникает множественность (не одноэлементность) Y , которая, собственно, и является неопределённостью. Такая неопределённость в детерминированном эксперименте связана с проблемой скрытых параметров: дополнительных условий, которые нужно учитывать при регистрации эксперимента, чтобы явление стало детерминированным, т.е., чтобы наблюдения могли быть охарактеризованными в соответствии с (4).

МнМоН: случайность

Случайность в исследуемом явлении с одной стороны характеризуется тем, что связь возможных результатов с полными условиями эксперимента в (3) неоднозначна: для каждого из фиксированных условий в разных экспериментах могут появляться разные результаты:

$$\kappa \to Y_\kappa \neq \text{"одноэлементное множество"}, \ \kappa \in \mathrm{K} .$$

С другой стороны, для явления, которое называют случайным (а сам эксперимент – стохастическим), должен выполняться закон устойчивости частот. Этим термином обозначается предположение о том, что частоты тех или иных групп возможных результатов должны сходиться к предельному значению, которое на должно зависеть от серии экспериментов, по которому оно получено, но характеризовать само исследуемое явление: быть одинаковым для разных серий экспериментов.

МнМоН: гарантированные оценки (минимакс)

Этот подход связан с дальнейшей априорной структуризацией вариативной или функциональной части условий в рамках детерминированного описания явления: $x=(x^{(1)},x_V^{(2)})$ или $f=(f^{(1)},f^{(2)})$ и предположением о том, что в эксперименте фиксируется только одна из частей, например $x^{(1)}$ или $f^{(1)}$(наблюдаемая компонента), а про вторую – известно, что она принадлежит множеству $E_{x^{(1)}}$ или $E_{f^{(1)}}$ соответственно, которое определяется наблюдаемой компонентой.

МнМоН: интервальный подход

В модель наблюдений со структурированной вариативной частью очевидным образом вкладывается интервальная модель неопределённости. Действительно, достаточно предположить, что в обозначениях предыдущего пункта

$$y= f(x^{(1)})+x^{(2)},\ x^{(2)}\in(-\Delta_{x^{(1)}},\Delta_{x^{(1)}})=E_{x^{(1)}}.$$

МнМоН: нечёткие множества

Место нечёткости [Zadeh, 1962] во множественных моделях неопределённости может быть определено в рамках статистической интерпретации нечетких множеств [Donchenko, 1998, a) b)]. Эта интерпретация определяется следующей теоремой.

Теорема [Donchenko, 1998 a),b)]. Для нечёткого множества, задаваемого парой (E,μ) носитель-функция принадлежности, в случае, когда E - пространство с мерой, а μ- измерима, можно построить вероятностное пространство (Ω,B_Ω,P), событие $A\in B_\Omega$, полную группу событий $H_e=\{\eta=e\},e\in E$, $\eta - E$ - значная случайная величина, так, что

$$\mu(e)=P(A\,|\,H_e),e\in E.$$

МнМоН: обратные задачи

Важным классом неопределённостей в детерминированных задачах являются обратные задачи, т.е. задачи в которых необходимо определить множество возможных вариативных частей условий (входов), которые обеспечивают заданное значение результата (выхода). Отметим важную роль псевдообращения по Муру - Пенроузу [Алберт, 1977] и его развитию в работе [Кириченко, 1997] для линейных задач и для применения в задачах кластеризации и распознавания образов [Кириченко, Донченко., 2007].

МнМоН: преобразование Хока

Специальным случаем неопределённости является ПХ [Hough, 1962]. Этот вид неопределенности порождён множественностью возможных вариантов функций отклика в наблюдениях: $\kappa_i=(x_i,f_i),i=\overline{1,N}$. Простейшей моделью наблюдений такого рода может служить бинаризованное изображение, на котором представлено несколько прямых. Выборка представляет собой координаты точек изображения с единичным значением яркости. Детальнее с ПХ и его математической формализацией можно познакомиться в [Donchenko, 2003].

Заключение

В работе рассмотрены проблемы математического описания структуры(связей составляющих) исследуемого объекта, рассмотрены истоки неопределённости в поведении таких объектов. Перечислены основные математические средства описания структур - связей между составляющими элементами описываемого объекта. Приведены примеры основных структур и важных их комбинаций. Предложенная в работе концепция «множественных моделей неопределённости» связывает неопределённость с экспериментом и позволяет на единой основе рассматривать многообразие математических методов описания неопределённости. В работе также определено место каждого из математических методов в рамках предложенной концепции.

Литература

[Алберт, 1977] Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия, рекуррентное оценивание. – М.: Наука. – 1977.– 305 с.

[Donchenko, 2003] Donchenko V.S. Hough Transform and Uncertainty// Proceedings X International Conference “Knowledge – Dialog – Solution”. – June 16-23, 2003. – Varna (Bulgaria). – P.391-395.

[Донченко,1968,a)] Донченко В.С. Умовні розподіли та нечіткі множини // Вісник Київського університету. – 1998.–Вип. №3 – С. 175-179.

[Донченко,1968,b)] Донченко В.С. Імовірність та нечіткі множини .// Вісник Київського університету.

Серія фізико-математичні науки. – 1998. – Вип. №4. – С. 141-144

[Hough] Hough P.V.C. Method and Means for Recognizing Complex Patterns. - U.S. Patent 3069354. – December 1962.

[Кириченко, 1997] Кириченко Н.Ф. Аналитическое представление псевдообратных матриц //Киб. и СА.- №2. –1997.– С.98-122.

[Кириченко, Донченко, 2007] Кириченко Н.Ф., Донченко. В.С. Псевдообращение в задачах кластеризации// Киб. и СА.- №4, 2007– С.98-122.

[Мальцев,1970] Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М .: Наука.–1970. – 392 с.

[Zadeh, 1965] Zadeh, Lotfi. Fuzzy Sets// Information and Control. – June, 1965. – 8(3).–P. 338-353.

Информация об авторе

Владимир С. Донченко – *Профессор; Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики, Украина, e-mail: voldon@unicyb.kiev.ua*