СЛОЖНЫЕ ЗАДАЧИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ И ВОЗМОЖНОСТИ ИХ РЕШЕНИЯ

Виктор Краснопрошин, Владимир Образцов

***Аннотация**: Рассматривается задача распознавания образов с обучением. Вводится понятие локальной разрешимости такой задачи и показано, что при некоторых, достаточно конструктивных условиях, задача распознавания является локально разрешимой. Получены критерий и два достаточных условия локальной разрешимости.*

***Ключевые слова**: Задача распознавания образов с обучением, локальный подход, критерий и достаточны условия локальной разрешимости.*

***ACM Classification Keywords:** I. Computing Methodologies; I.5 Pattern Recognition; I.5.1 Models; Subject descriptor: Models Deterministic*

***Conference**: The paper is selected from International Conference "Classification, Forecasting, Data Mining" CFDM 2009, Varna, Bulgaria, June-July 2009*

Введение

Задача распознавания образов с обучением, как и любая другая задача информатики, может оказаться сложной. Понятие сложности может быть определено по-разному. Чтобы не быть связанными конкретными свойствами задачи, мы определим сложность задачи как некоторую совокупность характеристик, следствием которых является структурируемость информации. К числу таких характеристик можно отнести, к примеру, большую размерность задачи или большой объем обучающей и контрольной выборок.

Надо заметить, что в рамках детерминистского подхода [Журавлев, 1978] вопросы сложности почти не рассматривались. Поэтому в принципиальном смысле важен следующий вопрос: *можно ли в рамках указанного подхода развить технику решения сложных задач распознавания образов*?

В данной работе показано, что ответ на сформулированный выше вопрос является положительным. Для этого нами введено понятие локальной разрешимости задачи распознавания образов с обучением и для широкого класса моделей алгоритмов определены критерий и достаточные условия локальной разрешимости. В содержательном смысле предложенный подход близок к широко используемой в математике технике, суть которой звключается в декомпозиции задачи.

Полученные результаты свидетельствуют, что понятие сложности задачи распознавания является вполне конструктивным. А т.к. практические задачи с большими размерностью и/или объемами выборок становятся все более актуальными, то и результаты решения подобных задач приобретают несомненную важность.

Локально разрешимые задачи распознавания

Рассмотрим произвольную модель распознающих операторов $\mathfrak{M}$ и некоторую задачу распознавания $Z=(I_0,\tilde{S}^q)$ из Z_2^{ql} [Журавлев, 1978]. Предположим, что задано t подмножеств $\tilde{S}_1^q,\ldots,\tilde{S}_t^q$ и $\tilde{S}_m^1,\ldots,\tilde{S}_m^t$ ($t\in\mathbb{N}$) контрольной $\tilde{S}^q$ и обучающей $\tilde{S}_m$ выборок соответственно, таких что

$$\begin{cases} (\tilde{S}_i^q \neq \varnothing, \tilde{S}_m^i \neq \varnothing) \forall i \in \{1,2,...,t\} \\ (\tilde{S}^q = \bigcup_{i=1}^{t} \tilde{S}_i^q, \tilde{S}_i^q \bigcap \tilde{S}_j^q = \varnothing \; if \; i \neq j) \;\; 1 \leq i,j \leq t \\ (\tilde{S}_m^i \subseteq \tilde{S}_m) \;\; \forall i \in \{1,2,...,t\} \end{cases} \tag{1}$$

Информацию $Z_i = ((\tilde{S}_m^i, I(\tilde{S}_m^i)), \tilde{S}_i^q)$, $i = 1,2,...,t$ назовем **подзадачей** задачи Z. Нетрудно заметить, что при $t > 1$ подзадачи $Z_1,...,Z_t$ однозначно определяются подмножествами $\tilde{S}_i^q$ и $\tilde{S}_m^i$ ($i = 1,2,...,t$), удовлетворяющими условию (1). Обратное утверждение, в общем случае, неверно.

Предположим, что модель $\mathfrak{M}$ представляется совокупностью параметрических функций $(\xi_\delta^{(m)}, \eta_\lambda^{(l)})$ с областью изменения параметров $\Omega \times \Lambda$. При фиксированных (δ, λ) набор $(\xi_\delta^{(m)}, \eta_\lambda^{(l)})$ определяет распознающий оператор $B(\xi_\delta^{(m)}, \eta_\lambda^{(l)}) \in \mathfrak{M}$, т.е.:

$$\mathfrak{M}(\xi_\delta^{(m)}, \eta_\lambda^{(l)}) = \bigcup_{\delta \in \Omega} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B(\xi_\delta^{(m)}, \eta_\lambda^{(l)}) \tag{2}$$

Используя условие (1) каждой подзадаче Z_i ($i = 1,2,...,t$) и модели $\mathfrak{M}$ можно поставить в соответствие **подмодель** $\mathfrak{M}_i$, в которой набор функций (определяющий ее в указанном выше смысле) является сужением [Мальцев, 1970] исходного набора на подмножество $\tilde{S}_m^i$ ($i = 1,2,...,t$). Полученные при этом подмодели будем называть **локальными** [МЭ, 1977] в $\mathfrak{M}$.

Таким образом, подзадачи Z_i ($i = 1,2,...,t$) порождают в модели $\mathfrak{M}$ некоторую совокупность локальных подмоделей $\mathfrak{M}_1,...,\mathfrak{M}_t$. Нетрудно заметить, что имеет смысл соответствующее сужение распознающего оператора $B(\xi_\delta^{(m)}, \eta_\lambda^{(l)})$, которое мы обозначим $B_i \, (i = 1,2,...,t)$.

Пусть $A_{\mathfrak{M}}$ - некоторая модель алгоритмов, порожденная распознающими операторами $\mathfrak{M}$ и решающим правилом $c \in C(c_0, c_1)$. Задачу $Z = (I_0, \tilde{S}^q)$ назовем **локально-разрешимой** в модели $A_{\mathfrak{M}}$, если

$$\begin{gathered} \exists Z_1,...,Z_t (t > 1) \exists B \in \mathfrak{M} \, \forall c \in C(c_0, c_1) \, \forall S^u \in \tilde{S}^q \\ (c(B(I_0, S^u) = c(B(I_0^i, S^u)) \end{gathered} \tag{3}$$

Непосредственно из определения для таких задач получаем

$$((\mathfrak{M}_i(Z_i) \bigcap R_c(Z_i) \neq \varnothing)_{i=1}^t \Rightarrow (\mathfrak{M}(Z) \bigcap R_c(Z) \neq \varnothing)).$$

Т.е. корректность локальных подмоделей на задачах $Z_1,...,Z_t$ с необходимостью влечет корректность исходной модели на Z. Подход к построению корректных алгоритмов, основанный на таком свойстве информации является локальным [МЭ, 1977].

Основную задачу данного подхода можно сформулировать следующим образом:

Необходимо определить условия на $\mathfrak{M}$ и $Z \in Z_2^{ql}$, при которых задача распознавания является локально разрешимой в соответствующей модели алгоритмов $A_{\mathfrak{M}}$.

В дальнейшем ограничимся случаем, когда совокупность подзадач $Z_1,...,Z_t (t > 1)$ удовлетворяет дополнительному условию:

$$(\tilde{S}_m = \bigcup_{i=1}^{t} \tilde{S}_m^i, \;\; \tilde{S}_m^i \bigcap \tilde{S}_m^j = \varnothing \;\; if \;\; i \neq j) \;\; 1 \leq i,j \leq t \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что каждой задаче Z однозначно соответствует некоторый набор подзадач $Z_1,...,Z_t$, для которых имеют место условия (1), (4). Верно и обратное, т.е. каждому набору подзадач $Z_1,...,Z_t$ можно поставить в соответствие некоторую задачу $Z \in Z_2^{ql}$. Иными словами, в условиях (1), (4), соответствие между Z и $Z_1,...,Z_t (t > 1)$ взаимно-однозначно с точностью до перестановок объектов в $\tilde{S}_m$ и $\tilde{S}^q$.

Критерий локальной разрешимости

Покажем возможность построения алгоритмов распознавания с использованием описанного выше локального подхода и определим условия локальной разрешимости задач из множества Z_2^{ql}.

В [Журавлев, 1978] введено понятие распознающего оператора линейно зависящего от параметров. Формальное объединение таких операторов названо линейной моделью. Опишем данную модель в виде (2). Для этого используем некоторую идеализацию процесса построения решений задачи Z в $\mathfrak{M}(\xi_\delta^{(m)},\eta_\lambda^{(l)})$. Предположим, что он реализуется в два этапа: на первом – строится проекция объектов $\tilde{S}^q$ на обучающую выборку $\tilde{S}_m$, а на втором – полученные оценки проектируются на классы $K_1,...,K_l$. Определим наборы функций и $\xi_\delta^{(m)} = (\xi_\delta^1,...,\xi_\delta^m)$ и $\eta_\lambda^{(l)} = (\eta_\lambda^1,...,\eta_\lambda^l)$ такие, что

$$\forall S \in \{S\}\ (\xi_\delta^i : S \times S_i \to \mathbb{R}) \forall S_i \in \tilde{S}_m (i = 1,2,...,m) \forall \delta \in \Omega \tag{5}$$

$$(\eta_\lambda^j : (\mathbb{R})^m \to \mathbb{R})\ \forall \lambda \in \Lambda\ (j = 1,2,...,l) \tag{6}$$

Тогда распознающие операторы модели $\mathfrak{M}(\xi_\delta^{(m)},\eta_\lambda^{(l)})$ представимы в виде суперпозиции

$$B = \eta_\lambda^l \circ \xi_\delta^m, \text{ где } \delta \in \Omega, \lambda \in \Lambda \tag{7}$$

Нетрудно заметить, что такие операторы (по построению функций $\xi_\delta^{(m)}$ и $\eta_\lambda^{(l)}$) реализуют отображение $Z \in Z_2^{ql}$ в пространство вещественных матриц $\mathbb{R}^{ql}$.

Пусть $L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^l)$ - пространство линейных операторов из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^l$. Модель (2) с распознающими операторами (7), для которых

$$\eta_\lambda^{(l)} \in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^l)$$

назовем **полулинейной** (обозначим ее $\mathfrak{M}(\xi_\delta^{(m)}, L^{ml})$), а соответствующее семейство $A_{\mathfrak{M}}$ - полулинейным.

Заметим, что рассмотрение таких моделей не уменьшает общности полученных в дальнейшем результатов. Так в [Журавлев, 1978] показано, что многие известные эвристические модели (в том числе – с разделяющими гиперплоскостями, потенциальных функций, вычисления оценок) являются полулинейными в указанном выше смысле. В тоже время, существуют модели (например, с предварительным преобразованием информации из Z [Krasnoproshin, 2006]) в которых процесс построения решений реализуется другими наборами функций типа (5), (6). Однако и они, в свою очередь, могут быть сделаны полулинейными.

Обозначим $\eta_\lambda^{(l)}(i,j)$ - матрицу пространства $\mathbb{R}^{ml}$ $(1 \le i \le m, 1 \le j \le l)$, соответствующую линейному оператору $\eta_\lambda^{(l)} \in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^l)$.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{M}(\xi_\delta^{(m)},L^{ml})$ - полулинейная модель с произвольными функциями $\xi_\delta^{(m)}$ вида (5). Задача $Z \in Z_2^{ql}$ локально разрешима в $A_{\mathfrak{M}}$ тогда и только тогда, когда

$$\exists Z_1,...,Z_t (t>1)\ \exists \xi_\delta^{(m)}\ \ \eta_\lambda^{(l)} \in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^l)$$
$$\forall i=\{1,2,...,t\}\ \forall S^u \in \tilde{S}_i^q\ (u=1,2,...,q)\ \forall j\in\{1,2,...,l\}$$
$$(\sum_{S_v\in\tilde{S}_m^i} \xi_\delta^v(S^u,S_v)\cdot\eta_\lambda^l(v,j)=0)$$

Теорема 1 дает критерий локальной разрешимости произвольной задачи $Z\in Z_2^{ql}$ в полулинейной модели $A_{\mathfrak{M}}$. Условия теоремы можно использовать как при исследовании локальной разрешимости задач, так и для построения соответствующих алгоритмов. Однако более конструктивным в этом смысле является следующее условие:

$$\exists Z_1,...,Z_t\,(t>1)\ \exists \xi_\delta^{(m)}\ \forall i\in\{1,2,...,t\}\ \ \forall S^u\in\tilde{S}_i^q\ \ \forall S_v\notin\tilde{S}_m^i\ \ (\xi_\delta^v(S^u,S_v)=0)$$

Легко показать, что оно является достаточным для локальной разрешимости задач Z_2^{ql} в полулинейных моделях $A_{\mathfrak{M}}$.

Достаточные условия локальной разрешимости

Пусть $A_{\mathfrak{M}}$ - произвольная полулинейная модель распознающих алгоритмов. Рассмотрим условия на $Z\in Z_2^{ql}$, при которых эти задачи являются локально разрешимыми в $A_{\mathfrak{M}}$.

Линейная независимость подзадач

Предположим, что $\mathfrak{R}$ - обычное евклидово конечномерное пространство. Подзадачи $Z_1,...,Z_t(t>1)$ задачи $Z\in Z_2^{ql}$ назовем **линейно-независимыми**, если

$$\forall i,j\in\{1,2,...,t\}\ \ (l(\tilde{S}_i^q\bigcup\tilde{S}_m^i)\bigcap l(\tilde{S}_j^q\bigcup\tilde{S}_m^j)=\varnothing)\ \ \text{при}\ \ i\neq j, \tag{8}$$

где l – линейная оболочка в евклидовом пространстве $\mathfrak{R}$.

Обозначим $L(\mathfrak{R},\mathfrak{R})$ - пространство линейных операторов, сопряженное к $\mathfrak{R}$, т.е.

$$\forall R\in L(\mathfrak{R},\mathfrak{R})\ \ (R:\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}).$$

Введем функции $\xi_\delta^{(m)}$ вида (5)

$$\forall S\in\{S\}\ \forall S_u\in\tilde{S}_m\ \ (\xi_{\delta R}^{(m)}(S,S_u)=\delta<R(S),R(S_u)>), \tag{9}$$

где $<\cdot,\cdot>$ - скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathfrak{R}$, $R(S)$ - линейное преобразование объекта $S\in\{S\}$ оператором $R\in L(\mathfrak{R},\mathfrak{R})$ и δ - некоторый числовой параметр. Обозначим для краткости $\mathfrak{M}(\xi_{\delta R}^{(m)},L^{ml})$ - полулинейную модель с функциями (9).

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{M}(\xi_{\delta R}^{(m)},L^{ml})$ - полулинейную модель распознающих операторов и Z - произвольная задача из Z_2^{ql}. Если в Z существуют линейно-независимые подзадачи $Z_1,...,Z_t(t>1)$, то задача Z локально разрешима в соответствующей модели $A_{\mathfrak{M}}$.

Характеристическая независимость подзадач

В дальнейшем полагаем $\mathfrak{R}=\mathbb{R}^n$. Определим в пространстве $\mathbb{R}$ характеристическую функцию γ_{R_0} произвольного подмножества $R_0\subset\mathbb{R}$ такую, что

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \gamma_{R_0}(x)=\begin{cases}1,\ if\ \ x\in R_0\\ 0, otherwise.\end{cases}, \tag{10}$$

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ подмножество $(R_1 \times .... \times R_n)$ и введем отображение

$$\forall X = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n \ \ (\gamma_{(R_1,...,R_n)}(X) = (\gamma_{R_1}(x_1),...,\gamma_{R_n}(x_n))) , \tag{11}$$

с элементами в виде (9). Полученный при таком отображении вектор $(\gamma_{R_1}(x_1),...,\gamma_{R_n}(x_n))$ назовем **характеристическим** для $X \in \mathbb{R}^n$ по $\gamma_{(R_1,...,R_n)}$. Введем также

$$\overline{\gamma}_{(R_1,...,R_n)}(X) = 1_{B_2^n} - \gamma_{(R_1,...,R_n)}(X) ,$$

где $1_{B_2^n}$ - единичный вектор пространства B_2^n. Для фиксированных $\gamma_0 \in B_2^n$ и $\gamma_{(R_1,...,R_n)}$ определим в $\mathbb{R}^n$ подмножество

$$R^{\gamma_0}_{\gamma_{(R_1,...,R_n)}} = \{X \in \mathbb{R}^n \left| (< \gamma_{(R_1,...,R_n)}(X), \gamma_0 >) > 0 \,\&\, (< \gamma_{(R_1,...,R_n)}(X), \overline{\gamma}_0 >) = 0 \right.\} . \tag{12}$$

Нетрудно видеть, что $R^{\gamma_0}_{\gamma_{(R_1,...,R_n)}} \neq \varnothing$ при условии, что $\gamma_0 \neq 0_{B_2^n}$ (где $0_{B_2^n}$ - нулевой вектор пространства B_2^n). Рассмотрим некоторые свойства подмножества (14), порожденные отображениями (11).

Лемма 1. Пусть $\gamma^0, \gamma^1 \in B_2^n$ и $\gamma_{(R_1,...,R_n)}$ - некоторое отображение (11). Тогда

$$(R^{\gamma^0}_{\gamma_{(R_1,...,R_n)}} \bigcap R^{\gamma^1}_{\gamma_{(R_1,...,R_n)}} = \varnothing) \Leftrightarrow (< \gamma^0, \gamma^1 >= 0) \tag{13}$$

Непосредственно из определения нетрудно получить способ порождения подмножеств $R^{\gamma^0}_{\gamma_{(R_1,...,R_n)}}$, содержащих некоторую заданную совокупность $X^{(m)} = (X_1,...,X_m) \subset \mathbb{R}^n$. Действительно, зафиксируем произвольное ненулевое для всех $X \in X^{(m)}$ отображение (11) и определим вектор

$$\gamma_{(R_1,...,R_n)}(X^{(m)}) = (\gamma_{R_1}(\bigcup_{i=1}^{m} x_{i1}),...,\gamma_{R_n}(\bigcup_{i=1}^{m} x_{in})) . \tag{14}$$

где

$$\gamma_{R_j}(\bigcup_{i=1}^{m} x_{ij}) = \begin{cases} 1, if\,(\exists i \in \{1,2,...,m\}\ (\gamma_{R_j}(x_{ij}) = 1) \\ 0, otherwise. \end{cases} .$$

Тогда, по построению имеем

$$X^{(m)} \subset R^{\gamma_{(R_1,...,R_n)}(X^{(m)})}_{\gamma_{(R_1,...,R_n)}} .$$

Исходя из проведенных рассуждений, можно ввести следующее определение. Подзадачи $Z_1,...,Z_t\,(t > 1)$ задачи Z назовем **характеристически-независимыми**, если

$$\exists \gamma_{(R_1,...,R_n)} \begin{cases} \forall S \in (\tilde{S}_m \bigcup \tilde{S}^q)\ (\gamma_{(R_1,...,R_n)}(S) \neq 0_{B_2^n}) \\ \forall i\, \forall j \neq i\ (< \gamma_{(R_1,...,R_n)}(\tilde{S}_i^q \bigcup \tilde{S}_m^i), \gamma_{(R_1,...,R_n)}(\tilde{S}_j^q \bigcup \tilde{S}_m^j) >= 0) \end{cases} . \tag{15}$$

Покажем, что вопрос построения таких подзадач при фиксированном отображении $\gamma_{(R_1,...,R_n)}$ сводится к вопросу о приводимости специальной квадратной матрицы к блочно-диагональной форме с t блоками на главной диагонали.

Пусть $\gamma_{(R_1,...,R_n)}$ - произвольное отображение (15), удовлетворяющее на Z условию

$$\forall S \in (\tilde{S}_m \bigcup \tilde{S}^q)\ (\gamma_{(R_1,...,R_n)}(S) \neq 0_{B_2^n}) .$$

Нетрудно заметить, что для таких отображений условие (14) эквивалентно следующему

$$\begin{gathered} \forall i, j \in \{1,2,...,t\} \ \ \forall S' \in (\tilde{S}_i^q \bigcup \tilde{S}_m^i)\ \forall S'' \in (\tilde{S}_j^q \bigcup \tilde{S}_m^j) \\ (< \gamma_{(R_1,...,R_n)}(S'), \gamma_{(R_1,...,R_n)}(S'') >= 0) \end{gathered} . \tag{16}$$

Предположим теперь, что подзадачи $Z_1,...,Z_t(t>1)$ задачи Z для некоторого $\gamma_{(R_1,...,R_n)}$ удовлетворяют (15). Пусть, кроме того, в Z выборки $\tilde{S}_m$ и $\tilde{S}^q$ упорядочены таким образом, что вначале расположены объекты соответствующие подзадаче Z_1 и т.д. Рассмотрим матрицу

$$\chi_{\gamma_{(R_1,...R_n)}}(\tilde{S}_m\bigcup\tilde{S}^q)=\left\|\begin{matrix}\chi(S_1,S_1)........\chi(S_1,S_{m+q})\\ ....\\ \chi(S_{m+q},S_1).....\chi(S_{m+q},S_{m+q})\end{matrix}\right\|, \tag{17}$$

где для всех $S_i,S_j\in(\tilde{S}_m\bigcup\tilde{S}^q)$ $(1\le i,j\le m+q)$

$$\chi(S_i,S_j)=\begin{cases}1, if\ (<\gamma_{(R_1,...,R_n)}(S_i),\gamma_{(R_1,...,R_n)}(S_j)>\neq 0),\\ 0, otherwise.\end{cases}.$$

Очевидно, что при сделанных предположениях построенная матрица будет иметь блочно-диагональную форму с *t* блоками на главной диагонали. Верно и обратное. Если при произвольной нумерации объектов в $(\tilde{S}_m\bigcup\tilde{S}^q)$ матрица $\chi_{\gamma_{(R_1,...R_n)}}(\tilde{S}_m\bigcup\tilde{S}^q)$ для некоторого $\gamma_{(R_1,...,R_n)}$ приводима к блочно-диагональной форме, и в каждый блок на главной диагонали попадают объекты из $\tilde{S}_m$ и $\tilde{S}^q$, то для Z можно указать характеристически-независимые подзадачи $Z_1,...,Z_t$, где *t* – число блоков в полученной матрице.

Вопрос о приведении матрицы (17) к блочно-диагональной форме элементарно решается с помощью методов, изложенных в [Тьюарсон, 1977]. В частности, если ввести матрицу

$$\chi^2_{\gamma_{(R_1,...R_n)}}(\tilde{S}_m\bigcup\tilde{S}^q)=\chi(\chi_{\gamma_{(R_1,...R_n)}}(\tilde{S}_m\bigcup\tilde{S}^q)),$$

с элементами $(1\le i,j\le m+q)$

$$\chi_{ij}=\begin{cases}1, if\sum_{u=1}^{m+q}\chi(S_i,S_u)\cdot\chi(S_j,S_u)>0,\\ 0, otherwise,\end{cases}.$$

то можно воспользоваться теоремой 3.5.1 из [Тьюарсон, 1977]. Обозначим E^{m+q}_{m+q} - единичную относительно коммутативного умножения матрицу пространства $\mathbb{R}^{m+q\ m+q}$. Тогда простой переформулировкой указанной теоремы получаем следующий критерий приводимости матрицы (17) к блочно-диагональной форме

Лемма 2. Пусть $\chi^{2^h}_{\gamma_{(R_1,...R_n)}}(\tilde{S}_m\bigcup\tilde{S}^q)\neq E^{m+q}_{m+q}$ для всех $h\le[\log_2(m+q)]$. Тогда матрица $\chi_{\gamma_{(R_1,...R_n)}}(\tilde{S}_m\bigcup\tilde{S}^q)$ приводима к блочно-диагональной форме в том и только том случае, если

$$\exists h<[\log_2(m+q)]\ (\chi^{2^{h+1}}_{\gamma_{(R_1,...R_n)}}(\tilde{S}_m\bigcup\tilde{S}^q)\equiv\chi^{2^h}_{\gamma_{(R_1,...R_n)}}(\tilde{S}_m\bigcup\tilde{S}^q)).$$

Покажем теперь, что задача, в которой можно указать характеристически-независимые подзадачи $Z_1,...,Z_t(t>1)$, является локально разрешимой в некоторой полулинейной модели $A_{\mathfrak{M}}$. Для этого необходимо ввести соответствующие функции $\xi^{(m)}_{\delta}$ вида (5).

Пусть $Z_1,...,Z_t$ - характеристически-независимые подзадачи произвольной задачи Z^{ql}_2. Поставим в соответствие каждому объекту S обучающей выборки $\tilde{S}_m$ характеристический вектор (13) той подзадачи Z_i $(i\in\{1,2,...,t\})$, в которую относится S, т.е.

$$(S\in\tilde{S}^q_i\bigcup\tilde{S}^i_m)\Rightarrow(\gamma^*_{(R_1,...,R_n)}(S)=\gamma_{(R_1,...,R_n)}(\tilde{S}^q_i\bigcup\tilde{S}^i_m)).$$

Заметим, что для всех $S_u \in \tilde{S}_m$ $(u = 1,2,...,m)$ такой вектор определен однозначно. Введем в пространстве $\mathbb{R}^n$ функции $\xi_\delta^{(m)}$ следующим образом

$$\forall S \in \{S\}\ (\xi_{\delta\chi}^{(u)}(S,S_u) = \chi^*(S,S_u) \cdot \xi_\delta^u(S,S_u)), 1 \le u \le m\ ,$$

где

$$\chi^*(S,S_u) = \begin{cases} 1, if\,(< \gamma_{(R_1,...,R_n)}(S), \gamma^*_{(R_1,...,R_n)}(S_u) > \neq 0), \\ 0, otherwise. \end{cases}.$$

Обозначим для краткости $\mathfrak{M}(\xi_{\delta\chi}^{(m)}, L^{ml})$ - полулинейную модель с такими функциями.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{M}(\xi_{\delta\chi}^{(m)}, L^{ml})$ - полулинейную модель распознающих операторов и Z - задача распознавания из Z_2^{ql}. Если в Z можно указать характеристически-независимые подзадачи $Z_1,...,Z_t\,(t > 1)$, то задача Z локально разрешима в соответствующей модели $A_{\mathfrak{M}}$.

Отметим, что наиболее сложным при построении характеристически-независимых подзадач $Z_1,...,Z_t\,(t > 1)$ задачи $Z \in Z_2^{ql}$ является вопрос выбора отображений (15).

Заключение

В работе описан один из возможных подходов к решению задачи распознавания образов в случаях, когда можно говорить о сложности априорной информации. В принципиальном смысле предлагаемый подход показывает, что со сложностью, которая является следствием большой размерности, можно справляться стандартным для математики способом – через декомпозицию задачи.

В настоящей работе рассматривается случай, когда на информации можно определить отношение эквивалентности. Показано, что для достаточно широкого класса алгоритмов, можно понизить сложность решения задачи распознавания. Сделано это на примере реализации корректных алгоритмов [Журавлев, 1978]. Полученные результаты могут послужить хорошей основой, как для дальнейших теоретических исследований, так и для решения конкретных практических задач.

Библиография

[Мальцев, 1970] Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 392 с.

[МЭ, 1977] Математическая энциклопедия. – М.: Советская энциклопедия. – 1977. – Т.1. – С. 207-209.

[Журавлев, 1978] Журавлев Ю. И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Проблемы кибернетики. — 1978. — Т. 33. — С. 5–68.

[Тьюарсон, 1977] Тьюарсон Р. Разреженные матрицы. – М.: Мир, 1977. - 189 с.

[Krasnoproshin, 2006] V.V.Krasnoproshin V.A.Obraztsov Problem of Solvalibility and Choice of Algorithms for Decision Making by Precedence // Pattern Recognition and Image Analysis. 2006. Vol. 16. no 2.- p.p.155-169.

Информация об авторах

Виктор Краснопрошин *– заведующий кафедрой МО АСУ, ФПМИ, Белорусский государственный университет, пр-т Независимости, 4, Минск, 220050, Беларусь; e-mail: krasnoproshin@bsu.by*

Владимир Образцов *– доцент кафедры МО АСУ, ФПМИ, Белорусский государственный университет, пр-т Независимости, 4, Минск, 220050, Беларусь; e-mail: obraztsov@bsu.by*