АНАЛИЗ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Алексей Волошин, Всеволод Богаенко, Владимир Кудин

Аннотация. *Методы последовательного анализа вариантов и базисных матриц применяются для анализа влияний малых возмущений в модели Леонтьева с плохообусловленной матрицей ограничений. Приведены результаты вычислительных экспериментов.*

Ключевые слова: *модель Леонтьева, количественный и качественный анализ, базисная матрица.*

ACM Classification Keywords: *H.4.2 Information Systems Applications: Types of Systems: Decision Support.*

***Conference**: The paper is selected from XV[th] International Conference "Knowledge-Dialogue-Solution" KDS 2009, Varna, Bulgaria, June-July 2009*

Введение

Подавляющее большинство эколого-экономических процессов описываются в классе линейных моделей. В частности, основная макроэкономическая модель, модель Леонтьева (МЛ) [Пономаренко, 2004], [Волошин, 2004] - в виде системы линейных алгебраических уравнений(СЛАУ) или неравенств (СЛАН) с квадратной матрицей с ограничениями на переменные в виде гиперпараллелепипеда П [Волошин, 2004]. Модель Леонтьева лежит также в основе ряда оптимизационных задач, в частности, линейного программирования (ЗЛП).[Волошин, 2008], [Кудин, 2002]. Известно, что:

1. Нечеткость значений параметров модели предопределяет наличие в контуре принятия решения экспертов (лиц, принимающих решение - ЛПР), которые направлены качественно очертить структуру и указать механизм (процедуру) устранение неопределенностей и разногласий при ее формировании (означить индивидуальные и коллективные функции принадлежности и т.п.) [Орловский, 1981]. Это является существенным усложнением МЛ.

2. Учет неточности представления модели (так называемая проблема адекватности математической и машинной модели) предопределяет разработку механизма согласования результатов проведения вычислений при различной точности представления модели (длина мантиссы при представлении чисел с плавающей запятой).

3. Некорректность (даже линейных моделей) при проведении вычислений с различной точностью может существенно повлиять на качественные характеристики, например, величину ранга (области принадлежности решений). В частности, свойство некорректности может проявиться как плохая обусловленность. В этом случае возникает проблема интерпретации результатов вычислений при различных входных параметрах (локализации области решений).

4. Представление нелинейного экономического процесса линейным приближением "добавляет неадекватности" при моделировании, а поэтому учет слабых нелинейных связей в элементах модели направлено это сгладить.

5. Исследование наряду с классической МЛ СЛАУ более обобщенной модели (СЛАН или ЗЛП) предопределяет разработку единого метода изучения свойств таких моделей.

6. Структурные связи в элементах моделей типа МЛ могут подаваться в классе линейных систем с прямоугольной матрицей ограничений, которая делает актуальным изучение геометрических образов приведенных моделей - многогранных множеств.

Постановка задачи

Предметом исследования является следующие варианты МЛ:

$$Au = C\,, \qquad (1)$$

$$u \in \Pi\,, \qquad (2)$$

и $$Au \le C\,, \qquad (3)$$

при ограничениях (2), в частности, при наличии целевой функции

$$\max_{u \in R^m} Bu\,, \qquad (4)$$

и ограничений (2)-(3), где $A = \left\{a_{ij}\right\}_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,m}}}$ - квадратная матрица размерности $(m \times m)$, $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jm}),\ j \in J = I = \{1, 2, .., m\}$, – строки матрицы $\grave{A}$, $u = (u_1, u_2, ..., u_m)^T$ – вектор переменных, $B = (b_1, b_2, ..., b_m),\ C = (c_1, c_2, .., c_n)^T$ – векторы градиента целевой функции и ограничений, $a_j u \le c_j,\ j \in J$, - полупространство, определенное гиперплоскостью $a_j u = c_j,\ j \in J$.

Будут изучаться свойства МЛ с матрицами ограничений структурно близких к некорректным (плохо обусловленным) и более общие модели, в которых $n > m$. По своей природе (2)-(4) являются двойственными к канонической (прямой) задачи линейного программирования, а потому в рассмотрение вводится линейная (порождающая) модель вида (4):

$$Au \le C\,, \qquad (5)$$

при ограничениях (2). В частности, модель (5) может иметь вид

$$Au = C, \qquad (6)$$

при ограничениях (2), где $B = (b_1, b_2, ..., b_m),\ C = (c_1, c_2, .., c_n)^T,\quad u = (u_1, u_2, .., u_m)^T$, $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jm}),\ j \in J$, – строка матрицы $\grave{A}$. Задача вида (4), (5) имеет n ограничений и m переменных. Модель (4), (5) исследуется в пространстве E^m .

Целью исследований является экспериментальный анализ влияний малых изменений в модели с учетом приведенных выше факторов (при разной мере плохой обусловленности) на ее свойства (точность решения, величину невязок и прочее). Проверить эффективность процедур последовательного анализа вариантов (ПАВ) [Волошин, 1987] и метода базисных матриц (МБМ) [Кудин, 2002]. Исследовать свойства известных вычислительных схем (Гаусса, SVD-разложения, формул Гревилля, метода базисных матриц).

Концепция анализа МЛ является двухстадийной. Первая стадия содержит анализ “порождающей” модели (эталонной, математической), вторая - анализ “возмущенной” (неточной, нечеткой, машинной).

Рассматриваются эталонные модели (с известными или установленными свойствами) и слабо возмущенные (с различным уровнем точности и учетом нечеткости задания параметров или малых возмущений). Это ставит как начальную задачу анализ непротиворечивости структурных элементов: установление невырожденности и величины ранга матрицы (1), направленной коррекции величины ранга матрицы ограничений (изменением отдельных элементов), исследование совместных свойств МЛ (1) и ограничений (2) - неразрешимость, установление свойства единственности или неединственности решений СЛАУ, исследование свойств (1),(2) и оптимизационных задач. Следующий этап - анализ влияния малых возмущений на свойства МЛ.

Основные положения метода базисных матриц (МБМ)

В предложенном МБМ введены в рассмотрение строчные базисные матрицы. Базисные матрицы последовательно изменяются замещением строк вспомогательной СЛАУ строками (нормалей ограничений) основной СЛАУ. В общем случае в модели МЛ количество ограничений превышает количество переменных вида (2), в данном случае $m = n$ (для анализа вводится в рассмотрение вспомогательная СЛАУ с известными свойствами соответствующей размерности) [Кудин, 2002].

Определение 4. Квадратная матрица $A_б$, составленная из m линейно независимых нормалей ограничений (вспомогательной СЛАУ), будем называть базисной, а решение соответствующей ей системы уравнений $A_б u = c^0$ базисным. Две базисные матрицы, отличающиеся одной строкой, будем называть смежными.

Пусть β_{ij}, $i, j = 1, 2, ..., m,$ элементы базисной матрицы $A_б$, e_{ri} - элементы матрицы $A_б^{-1}$, обратной к $A_б$; $e_k = (A_б^{-1})_k$.- столбец обратной матрицы. Решение $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})^T$ системы уравнений $A_б u = c^0$, где c^0 - подвектор C, компоненты которого состоят из правых частей ограничений, нормали которых образовывают базисную матрицу $A_б$; $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, ..., \alpha_{rm})$ - вектор разложения нормали ограничения $a_r u_1 \le c_r$ по строкам базисной матрицы $A_б$, $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, ..., \alpha_{0m})$ - вектор разложения нормали целевой функции (4) по строкам базисной матрицы $A_б$, $\Delta_r = a_r u_0^T - c_r$ - невязка r-го ограничения в вершине u_0; $J_б, J_H$, $J = J_б \cup J_H$, - множества индексов базисных и небазисных ограничений. Установлены формулы связи базисного решения, коэффициентов разложения нормалей ограничений и целевой функции, коэффициентов обратной матрицы, невязок ограничений и значений целевой функции при переходе к базисной матрице $\overline{A}_б$ (смежной), которая образовывается из матрицы $A_б$ заменой ее строки a_k на a_l, которая не входит в базисную матрицу $A_б$ [Волошин, 2008]. При нахождении формул и основных соотношений между элементами метода при переходе от одной базисной матрицы к следующей считаем $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}$ нормалями ограничений, $a_j u^T \le c_j, j \in J_б$ $J_б = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ - индексы ограничений, нормали которых образовывают строки базисной матрицы $A_б$ a_l - нормаль ограничения $a_l u \le c_l$, $\alpha_l = (\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, ..., \alpha_{lm})$- коэффициенты разложения вектора a_l по строкам базисной матрицы $A_б$.

Теорема 1. Между элементами МБМ в смежных базисных матрицах имеют место соотношения

$$\overline{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}, \ \overline{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}} \alpha_{li}, \ r = \overline{0, n}; \ i = \overline{1, m}; \ i \ne k; \tag{7}$$

$$\overline{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}, \ \overline{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}} \alpha_{li}, \quad r = \overline{1, m}; \ i = \overline{1, m}; \ i \ne k; \tag{8}$$

$$\overline{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{1k}} \Delta_l, \qquad j = \overline{1, m}, \tag{9}$$

$$\overline{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}}, \ \overline{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}} \Delta_l, \ r = \overline{1, n}; \quad r \ne k; \tag{10}$$

$$B\overline{u}_0^T = Bu_0^T - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}} \Delta_l, \tag{11}$$

причем условием невырожденности является условие $\alpha_{lk} \neq 0$, допустимости опорного базисного решения - $\alpha_{lk} < 0$, роста значения целевой функции - $\alpha_{0k} < 0$.

На основе (7)-(11) построена схема типа симплекс-метода анализа МЛ - метод базисных матриц.

Теорема 2. Если $\exists$ индекс k такой, что $\alpha_{0k} < 0$ и $\alpha_{rk} \geq 0$ для всех небазисных r, то целевая функция (4) задачи принимает неограниченные значения на множестве допустимых решений.

Теорема 3. Для существования единственного решения (1) необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_{lk}^{(i)} \neq 0,\ i = \overline{1,m}$, где $\alpha_{lk}^{(i)}$ - ведущие элементы симплексной итерации МБМ по замещению строк базисной матрицы нормалями ограничений (1).

Следствие 1. Ранг матрицы ограничений (1) определяется количеством корректных замещений строк матрицы ограничений вспомогательной системы векторами нормалями (1), согласно формулам (7)-(11).

Теорема 4. Оптимизационная задача (3),(4) с квадратной невырожденной матрицей ограничений имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\alpha_{0i} > 0,\ i = \overline{1,m}$.

Пусть имеется возмущение в целевой функции, которая задается функциональной зависимостью вида $\widehat{\alpha}_0(t) = B(t)(A_b^{-1}) = (\widehat{\alpha}_{01}(t),\ \widehat{\alpha}_{02}(t),\ \ldots,\widehat{\alpha}_{0m}(t)),\ \ t \in [t_0, t_k]$.

Следствие 1. При $t \in T = [t_H, t_B]$ таких, что $\widehat{\alpha}_{0k}(t) \geq 0,\ t \in [t_0, t_k],\ \overline{k = 1, m}$, сохраняется оптимальность; $\widehat{\alpha}_{0k}(t) > 0,\ t \in [t_0, t_k],\ \overline{k = 1, m}$, - оптимальное решение единственное; ($\exists k_0$, $\widehat{\alpha}_{0k_0}(t) = B(t)(A_b^{-1})_{k_0} = 0$, $t \in [t_0, t_k]$) - оптимальное решение не единственное; $\exists k_0,\ \widehat{\alpha}_{0k_0}(t) < 0,\ t \in [t_0, t_k]$, решение становится не оптимальным (знаки компонентов вектора $\widehat{\alpha}_0(t)$ указывают на свойства решений (2),(3) .

Пусть для a_l ограничения $a_l u^T \leq c_l$ относительно $A_б$ выполняется условие $\alpha_{lk} = 0$, а для возмущения: $(a_l + a_l^{'})u^T \leq c_l + c_l^{'}$, $\bar{\Delta}_l = \Delta_l + \Delta_l^{"}$ $\bar{\alpha}_l = (\alpha_l + \alpha_l^{'}) = (a_l + a_l^{'})A_á^{-1}$.

Теорема 5. Необходимым условием невырожденности новой $\overline{A}_б$, образованной замещением нормали a_l (которая занимает k-ю строку в базисной матрице) возмущенной нормалью $(a_l + a_l^{'})$, являются выполнения условий $\exists\ i\ \ e_{ik} \neq 0$, где e_{ik} элемент $A_б^{-1}$, такой, что $\alpha_{li}^{'} \neq 0$. Решение будет определяться соотношением $\bar{u}_{oj} = u_{oj} - \dfrac{e_{jk}}{\tilde{\alpha}_{lk}}\bar{\Delta}_l$, причем, если $\bar{\Delta}_l = 0$, то $\bar{u}_{oj} = u_{oj}$, $j = 1, m$.

Следствие 3. Если ведущий элемент симплексной итерации $\alpha_{lk} \neq 0$, то при возмущении, сохраняющем невырожденность, должно выполняться $\alpha_{lk}^{'} + \alpha_{lk} \neq 0$.

Теорема дает условия направленного восстановления свойства невырожденности базисной матрицы (1) и анализа влияния возмущений на решение.

Вычислительный эксперимент

Для вычислительного эксперимента были выбраны модели систем линейных алгебраических уравнений с 100% заполнением матрицы ограничений. Генерировались системы полного ранга (плохо обусловленные) с матрицей вида

$$A = \begin{cases} a_i = (rnd(1.0),...,rnd(1.0)),\ i = 0 \\ a_i = a_{i-1} + \dfrac{\alpha}{n}(rnd(1.0),...,rnd(1.0)),\ i > 0 \end{cases},$$

где $\| a_i - a_j \|^2 < \alpha$, α -параметр, который коррелирует число обусловленности. Малые возмущения в элементах таких моделей существенно влияли на характеристики решения. Исследовались свойства широко используемых алгоритмов и методов на плохо обусловленных моделях.

Проводилось два типа тестов:

A. Определялись невязки решений и точность разными алгоритмами для матриц размерностью 256x256 с разными значениями α и машинным нулем ε (использовался вариант МБМ без процедуры выбора главного элемента и уточнение).

B. Исследовалась зависимость невязки и быстродействия от размерности при $\alpha = 10^{-4}$ и $\varepsilon = 10^{-12}$.

Для эксперимента были выбраны алгоритмы Гаусса (GS), SVD, Гревилля (G), метода базисных матриц **.**

Из серии тестов A (Рис.1) можно сделать следующие выводы:

- при $\alpha < 10^{-4}$ метод базисных матриц дает машинно-точное решение за наименьшее время;
- при $\alpha = 10^{-4}$ метод базисных матриц имеет допустимые погрешности решения;
- при $\alpha > 10^{-4}$ только метод Гауса (GS) дает допустимые погрешности решения;

В среднем для всех алгоритмов уменьшение коэффициента α на 2 порядка приводит к снижению точности на 4 порядка. Под машинно-точным решением с плавающей запятой двойной точности понимается решение со значением максимальной невязки, меньшей 10^{-12}. Под допустимыми погрешностями – невязки в диапазоне от 10^{-12} до 10^{-5}. Решение с невязками большими 10^{-5} считаются неверными.

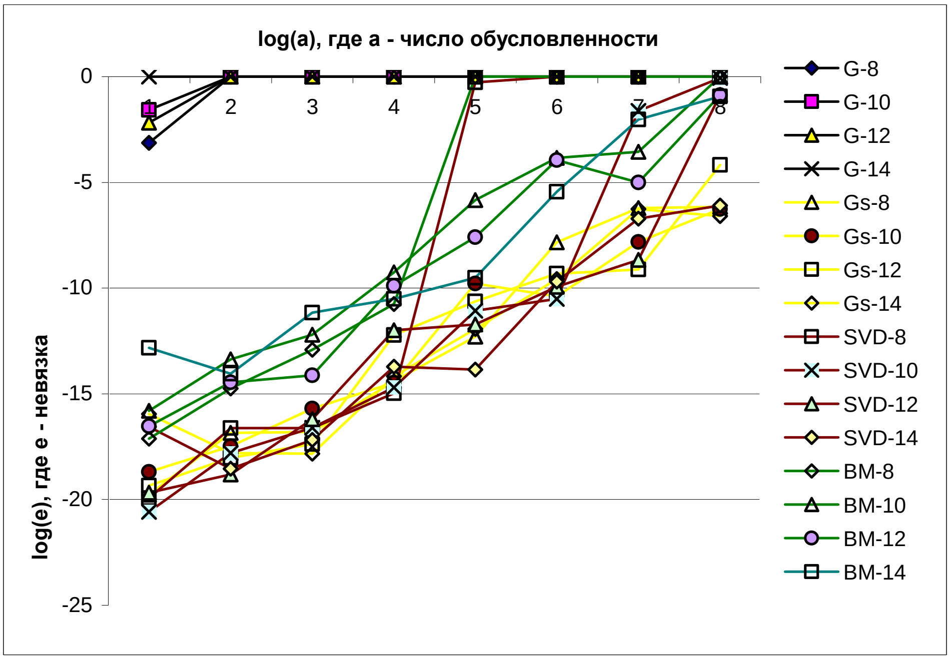

Рис 1. Точность решения в зависимости от значения машинного нуля

Серия тестов B (Табл.1) показывает зависимость точности решения от размерности матриц. Для матриц размерностью *n>1000* при увеличении размерности на 1000 элементов точность падает на порядок для всех алгоритмов. Однако, точность метода МБМ в среднем ниже, чем у алгоритмов метода Гаусса и SVD.

Таблица 1. Зависимость точности решения от размерности матрицы

Gauss

N	$\alpha = 1$	1.00E-02	1.00E-04	1.00E-06
1000	1.41E-20	1.39E-17	4.51E-13	1.06E-10
2000	2.4E-20	1.58E-15	2.97E-12	8.51E-08
3000	1.8E-20	6.43E-15	9.5E-11	2.31E-06
4000	4.88E-17	2.01E-14		
5000	1.18E-16	9.31E-13		

SVD

N	$\alpha = 1$	1.00E-02	1.00E-04	1.00E-06
1000	4.65E-21	2.5E-17	1.42E-13	3.99E-09
2000	1.13E-19	9.38E-16	1.81E-12	1.24E-07
3000	1.69E-19	4.33E-15	1.06E-10	1.63E-08

BM-I

N	$\alpha = 1$	1.00E-02	1.00E-04	1.00E-06
1000	7.59E-16	1.02E-12	1.37E-08	0.004137
2000	1.25E-15	5.93E-12	6E-07	5897
3000	1.24E-13	2.1E-09	0.013045	1.007973
4000	5.09E-11	1.55E-07		
5000	1.27E-10	2.03E-07		

Исследованы и построены оценочные множества принадлежности решений при возмущениях (Рис. 4) для плохо обусловленных систем. Пример демонстрирует существенное влияние малых возмущений на множество принадлежности решений (значительная растянутость множества по оси абсцисс).

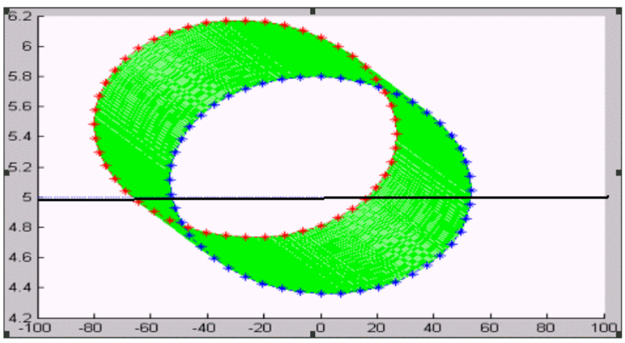

Рис. 4. Эллипсы принадлежности решений при малых возмущениях
(оси координат — компоненты вектора решения)

Выводы

Применение симплексной идеологии на основе МБМ и ПАВ при анализе МЛ дает возможность:

- исследовать свойства решений МЛП (1)- (3) при изменениях в (3);
- использовать решение исходной МЛ при анализе возмущенной модели;
- контролировать или направленно изменять величину ранга системы;
- находить решение квадратной системы уравнений за фиксированное число шагов;
- проводить анализ свойств системы при изменении значений отдельных элементов и ее компонент:
- использовать решения начальной системы при анализе возмущенной задачи;
- разрабатывать механизм преобразование вырожденной матрицы ограничений в невырожденную направленной коррекцией элементов:
- анализировать корректность построения модели.

Благодарности

Статья частично финансированна из проекта **ITHEA XXI** Института Информационных теории и Приложений FOI ITHEA и Консорциума FOI Bulgaria (www.ithea.org, www.foibg.com).

Литература

[Пономаренко, 2004] Пономаренко О.І. та ін. Макроекономіка.- К. :Вища школа,- 2004. - 207с.

[Волошин, 1987] Волошин А.Ф. Метод локализации области оптимума в задачах математического програмирования // Докл. АН СССР. - 1987. - 293, N 3.- С. 549-553.

[Волошин, 2004] Волошин О.Ф. Методи аналізу статичних балансових еколого-економічних моделей великої розмірності // Наукові записки, Т.VII, КПДВ “Педагогіка”, Київ, 2004. - С. 43-55.

[Орловский, 1981] Орловский С.А Принятие решений при нечёткой исходной информации.- М:, Наука, - 1981. - 206с.

[Волошин, 2008] Кудин. В., Кудин Г., Волошин А. Анализ свойств модели Леонтьева при нечетко заданных параметрах с применением метода базисных матриц // Information Science & Computing, International Book Series, Number 7, Volume 7, ITHEA, SOFIA, 2008.- P. 86-90.

[Кудин, 2002] Кудин В.И. Применение метода базисных матриц при исследовании свойств линейной системы // Вестник Киевского университета. Серия физ.-мат. науки. - 2002. - 2. - С. 56-61.

Информация об авторах

***Алексей Ф. Волошин**, Киев,. Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики, Украина, д. т. н., профессор, e-mail: ovoloshin@unicyb.kiev.ua*

***Всеволод А. Богаенко**, Киев,. Институт кибернетики имени В.Г. Глушкова НАН Украины, Украина,, к. т. н., н. с., e-mail: sevab@ukrnet.ua*

***Владимир И. Кудин**, Киев,. Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики, Украина, д. т. н., с. н. с., e-mail: V_I_Kudin@mail.ru*