ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ В НЕЧЕТКИХ УСЛОВИЯХ

Юрий Зайченко, Малихех Есфандиярфард

***Abstract**: The problem of fuzzy portfolio optimization is considered and analyzed. The dependence "profitability-risk" for optimal fuzzy portfolio was obtained and investigated. The sufficient conditions for the curve "profitability- risk" to be monotonous decreasing were obtained. The experimental investigations of this dependence were carried out which fully confirmed the theoretical results.*

***Keywords**: fuzzy portfolio, optimization, curve "optimal profitability-risk", sufficient conditions.*

***ACM Classification Keywords**: H.4.2. Information system Applications: Types of Systems Decision Support*

***Conference**: The paper is selected from XV[th] International Conference "Knowledge-Dialogue-Solution" KDS 2009, Varna, Bulgaria, June-July 2009*

Введение

Задача оптимизации инвестиционного портфеля в условиях неопределенности в последние годы вызывает значительный интерес. Для решения этой проблемы был предложен аппарат нечетких множеств в работах [Зайченко,2008, Zaychenko, 2008] , согласно которому доходности акций и в целом доходность инвестиционного портфеля рассматриваются как нечеткие числа с заданной функцией принадлежности, а риск трактуется как возможность (субъективная вероятность) ситуации, когда реальная доходность портфеля оказывается ниже ожидаемой доходности нечеткого портфеля. С целью более обоснованной оценки доходности акций на фондовом рынке по предыстории в задаче портфельной оптимизации был предложен метод прогнозирования, применение которого позволило улучшить результаты [Зайченко,2007]. В ходе экспериментальных исследований разработанного метода были построены зависимости «оптимальная доходность- риск» для нечеткого портфеля, которые во многих случаях имели прямо противоположный вид по сравнении с классической моделью Марковица- Тоббина, а именно были монотонно убывающими, а не возрастающими[Зайченко,2008]. Поэтому представляет значительный теоретический и практический интерес выяснение достаточных аналитических условий. при которых эта зависимость имеет монотонно падающий характер. Целью настоящей работы является получение аналитических условий, при которых зависимость «оптимальная доходность- риск» для нечеткого портфеля будет монотонно убывающей и их экспериментальная проверка..

Анализ модели оптимизации нечеткого портфеля

Задача нечеткой портфельной оптимизации базируется на допущении, что доходность портфеля является нечетким числом (НЧ), описываемым тройкой параметров

$$r = (r_{\min} = \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1};\ \ \tilde{r} = \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i;\ \ r_{\max} = \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2})$$

где $(r_{1i}, \tilde{r}_i, r_{2i})$ – доходность i -той ценной бумаги. $x_{i[}$.-доля i -той бумаги в портфеле

Для того, чтобы определить структуру портфеля, который обеспечит максимальную доходность при заданном уровне риска, требуется решить следующую задачу оптимизации:

$$\tilde{r} = \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \to \max \qquad (1)$$

$$\beta = const \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \ , \ x_i \geq 0 \ , \ i = \overline{1, N} \qquad (3)$$

$0 < \beta < 1$, где β- уровень риска.

В работе [Зайченко,2008] было показано, что этот случай возможен когда $\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \leq r^* < \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i$, либо когда $\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \leq r^* < \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2}$.

Пусть $\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \leq r^* < \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i$. Тогда используя (результаты работы [Зайченко,2008,], задача (1)-(3) сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

$$\tilde{r} = \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \to \max \qquad (4)$$

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2} - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1}} \left(\left(r^* - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \right) + \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i - r^* \right) \cdot \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i - r^*}{\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1}} \right) \right) = \beta \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \leq r^* \qquad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i > r^* \qquad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \quad x_i \geq 0 \quad i = \overline{1, N} \qquad (8)$$

Учитывая вид для $r_{\min}$, $\tilde{r}$ и $r_{\max}$, а также формулу (1), данную задачу нахождения интервала доходности для нечеткого портфеля с *n* ЦБ можно свести к задаче с двумя ЦБ (x_1, x_2) с минимальной и максимальной доходностями.

Пусть первая ЦБ имеет минимальную доходность в портфеле, описываемую НЧ $r_1 = [r_{11}, \tilde{r}_1, r_{12}]$, а вторая ЦБ – максимальную доходность в портфеле $r_2 = [r_{21}, \tilde{r}_2, r_{22}]$.

Пусть также критериальное значение описывается НЧ $r^* = [r_1^*, r^*, r_2^*]$.

При этом допустим $r_{11} < r_{21}$; $\tilde{r}_1 < \tilde{r}_2$.

Тогда $\tilde{r} = \tilde{r}_1 x_1 + \tilde{r}_2 x_2$; $x_1 + x_2 = 1$. Причем $x = x_2$, тогда $x_1 = 1 - x$.

Доходность портфеля описывается в этом случае НЧ вида $r = [r_{\min}, \tilde{r}, r_{\max}]$, где:

$r_{\min} = r_{11}(1-x) + r_{12}x;$; $\tilde{r} = \tilde{r}_1(1-x) + \tilde{r}_2 x$; $r_{\max} = r_{21}(1-x) + r_{22}x$.

Требуется найти такое x, что

$\tilde{r} = \tilde{r}_1(1-x) + \tilde{r}_2 x \rightarrow \max$ (9)

при условиях:

$$\beta(x) \leq \beta_{зад}\ , \qquad (10)$$

где выражение $\beta(x)$ для случая $0 < \beta < 1$ и $\tilde{r} < \tilde{r}_2$ при подстановке $x_1 = 1 - x$; $x_2 = x$; $n = 2$ в выражение (5) дает:

$$\beta(x) = \frac{1}{(1-x)(r_{12} - r_{11} + x(r_{22} - r_{21}))}\{r^* - ((1-x)r_{11} + xr_{21}) + ((1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*)*$$
$$*\ln\frac{\tilde{r}_1(1-x) + \tilde{r}_2 x - r^*}{x(\tilde{r}_1 - r_{11}) + (1-x)(\tilde{r}_2 - r_{21})}\} \leq \beta$$

Достаточные условия монотонно убывающего характера зависимости $\tilde{r}_{опт}(\beta)$ являются следующие:

$\frac{\partial\ \tilde{r}_{опт}}{\partial x} \geq 0$; $\frac{\partial \beta}{\partial x} \leq 0$ (11)

Рассмотрим сначала $\frac{\partial\ \tilde{r}}{\partial x}$.

Очевидно $\frac{\partial\ \tilde{r}}{\partial x} = \tilde{r}_2 - \tilde{r}_1$ (12) и т.к. по предложению $\tilde{r}_1 < \tilde{r}_2$, то $\frac{\partial\ \tilde{r}}{\partial x} > 0$.

Рассмотрим теперь зависимость $\frac{\partial \beta}{\partial x}$.

Для нахождения сложной производной $\frac{\partial \beta}{\partial x}$, введем следующие обозначения

$$A(x) = r^* - ((1-x)r_{11} + xr_{12})\ ;\ B(x) = (1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^* \qquad (13)$$

$$C(x) = (1-x)(\tilde{r}_1 - r_{11}) + x(\tilde{r}_2 - r_{21}) \qquad (14)$$

$$D(x) = (1-x)(r_{12} - r_{11}) + x(r_{22} - r_{21}) \qquad (15)$$

Тогда

$$\beta(x) = \left[A(x) + B(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)}\right]\frac{1}{D(x)} \qquad (16)$$

Найдем производную $\frac{\partial \beta}{\partial x}$:

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}=\left\{\left[A'(x)+B'(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)}+\frac{B'(x)C(x)-B(x)C'(x)}{C(x)}\right]D(x)-D'(x)\left[A(x)+B(x\ln\frac{B(x)}{C(x)})\right]\right\}\frac{1}{D^2(x)} \quad (17)$$

Выясним условия, при которых $\frac{\partial\beta}{\partial x}<0$.

Для этого необходимо, чтобы выражения в фигурных скобках $\{\ \}$ в (17) было меньше 0.

Очевидно $A'(x)=r_{11}-r_{21}$; $B'(x)=-\tilde{r}_1+\tilde{r}_2$;

$$C'(x)=-(\tilde{r}_1-r_{11})+(\tilde{r}_2-r_{21})=(\tilde{r}_2-\tilde{r}_1)-(r_{21}-r_{11}); \quad (18)$$

$$D'(x)=(r_{22}-r_{21})-(r_{12}-r_{11}).$$

Подставим (18) в (17) и из условия $\frac{\partial\beta}{\partial x}<0$ после несложных преобразований в (17) получим следующее условие

$$C(x)D(x)\left[A'(x)+B'(x)+B'(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)}\right]-DC'(x)B(x)-C(x)D'(x)(A(x)+B(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)})<0 \quad (19)$$

Подставляя выражение для $A(x); A'(x); B(x); B'(x); C(x); C'(x); D(x); D'(x)$ в (19), получим

$$\begin{aligned}&[(1-x)(r_{12}-r_{11})+x(r_{22}-r_{21})][(1-x)(\tilde{r}_1-r_{11})+\tilde{x}(\tilde{r}_2-r_{21})]*\\&*\left[(r_{11}-r_{21})+(\tilde{r}_2-\tilde{r}_1)+(\tilde{r}_2-\tilde{r}_1)\ln\frac{(1-x)\tilde{r}_1+x\tilde{r}_2-r^*}{(1-x)(\tilde{r}_1-r_{11})+x(\tilde{r}_2-r_{21})}\right]-[(1-x)\tilde{r}_1+x\tilde{r}_2-r^*][(\tilde{r}_2-r_{21})-(\tilde{r}_1-r_{11})]\\&[(1-x)(r_{12}-r_{11})+x(r_{22}-r_{21})]-[(1-x)(\tilde{r}_1-r_{11})+x(\tilde{r}_2-r_{21})][(r_{22}-r_{21})-(r_{12}-r_{11})]*\\&*(r^*-(1-x)r_{11}-xr_{21}+[(1-x)\tilde{r}_1+x\tilde{r}_2-r^*]*\ln\frac{(1-x)\tilde{r}_1+x\tilde{r}_2-r^*}{(1-x)(\tilde{r}_1-r_{11})+x(\tilde{r}_2-r_{21})}) \quad (20)\end{aligned}$$

Пусть функции принадлежности являются треугольными симметричными.

Тогда

$\tilde{r}_1-r_{11}=r_{12}-\tilde{r}_1=\Delta_1$; $\tilde{r}_2-r_{21}=r_{22}-\tilde{r}_2=\Delta_2$ (21)

и, очевидно, $r_{12}-r_{11}=2\Delta_1$; $r_{22}-r_{21}=2\Delta_2$.

Подставляя эти выражения в (20) получим

$$\begin{aligned}&[(1-x)2\Delta_1+x2\Delta_2][(1-x)2\Delta_1+x\Delta_2]*\\&*\left[(\Delta_2-\Delta_1)+(\tilde{r}_2-\tilde{r}_1)\ln\frac{(1-x)\tilde{r}_1+x\tilde{r}_2-r^*}{(1-x)(\tilde{r}_1-r_{11})+x(\tilde{r}_2-r_{21})}\right]-[(1-x)\tilde{r}_1+x\tilde{r}_2-r^*][\Delta_2-\Delta_1]\\&[(1-x)2\Delta_1+x2\Delta_2]-[(1-x)2\Delta_1+x\Delta_2][\Delta_2-\Delta_1]*\end{aligned}$$

$$*(r^*-(1-x)r_{11}-xr_{21})+[(1-x)\tilde{r}_1+x\tilde{r}_2-r^*]*\ln\frac{(1-x)\tilde{r}_1+x\tilde{r}_2-r^*}{(1-x)(\tilde{r}_1-r_{11})+x(\tilde{r}_2-r_{21})}) \quad (21)$$

Преобразуем правую часть выражения (21) и получим

$$-\left[(1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*\right](\Delta_2-\Delta_1)\left[(1-x)2\Delta_1 + x2\Delta_2\right] - \left[(1-x)\Delta_1 + x\Delta_2\right](\Delta_2-\Delta_1)\left\{r^* - (1-x)r_{11} - xr_{21}\right\} =$$
$$= -2\left[(1-x)\Delta_1 + \Delta_2\right](\Delta_2-\Delta_1)\left[(1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^* + r^* - (1-x)r_{11} - xr_{21}\right] = \quad (22)$$
$$= -2\left[(1-x)\Delta_1 + \Delta_2\right](\Delta_2-\Delta_1)\left[(1-x)\Delta_1 + x\Delta_2\right] = 2\left[((1-x)\Delta_1 + \Delta_2)^2(\Delta_2-\Delta_1)\right]$$

Анализируя выражение (22) нетрудно проверить, что

$C(x)D(x)\left[A'(x)+B'(x)\right] = D(x)C'(x)B(x) + C(x)D'(x)A(x)$, поэтому после сокращения подобных членов в (22) останутся члены

$$C(x)D(x)B'(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)} - C(x)D'(x)B(x)\ln\frac{B(x)}{C(x)} \quad (23)$$

И подставляя выражение для $C(x); D(x); B(x); B'(x)$ из (23), получим

$$\left[(1-x)(r_{12}-r_{11}) + x(r_{22}-r_{21})\right]$$
$$\left[(1-x)((r_{12}-r_{11}) + x(r_{22}-r_{21})(\tilde{r}_2-\tilde{r}_1) - (1-x)\tilde{r} + x\tilde{r}_2 - r^*)(\tilde{r}_2-\tilde{r}_1)(r_{22}-r_{21})\right]* \quad (24)$$
$$*\ln\frac{(1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*}{(1-x)(\tilde{r}_1-r_{11}) + x(\tilde{r}_2-r_{21})}$$

Откуда

$$2[(1-x)\Delta_1 + x\Delta_2]\ln\frac{(1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*}{(1-x)(\tilde{r}_1-r_{11}) + x(\tilde{r}_2-r_{21})}[(1-x)2\Delta_1 + x2\Delta_2(\tilde{r}_2-\tilde{r}_1) - (\Delta_2-\Delta_1)\left[(1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*\right] \quad (25)$$

Заметим, что

$$(1-x)(\tilde{r}_1-r_{11}) + x(\tilde{r}_2-r_{21}) = (1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - (1-x)r_{11} - xr_{21} = (1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r_{\min}$$

и так как $r^* > (1-x)r_{11} + xr_{22} = r_{\min}$, то

$$\frac{B(x)}{C(x)} = \frac{(1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*}{(1-x)(\tilde{r}_1-r_{11}) + x(\tilde{r}_2-r_{21})} < 1 \quad \text{и} \quad \ln\frac{B(x)}{C(x)} < 0 \quad (26)$$

Следовательно, для того , чтобы выражение (25) было меньше нуля необходимо и достаточно, чтобы $(1-x)2\Delta_1 + x2\Delta_2(\tilde{r}_2-\tilde{r}_1)(\Delta_2-\Delta_1)[(1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*]$ было больше 0.

Исследуем условия, при которых

$$\{2[(1-x)\Delta_1 + x\Delta_2](\tilde{r}_2-\tilde{r}_1) - (\Delta_2-\Delta_1)[(1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*]\} > 0 \quad (27)$$

а) неравенства $\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1 > \Delta_2 - \Delta_1 = (\tilde{r}_2-\tilde{r}_1) - (r_{21}-r_{11})$, выполняются, если $r_{21} > r_{11}$

б) неравенства $2[(1-x)\Delta_1 + x\Delta_2] > (1-x)\tilde{r}_1 + x\tilde{r}_2 - r^*$ выполняется, если

$$2(1-x)(\tilde{r}_1-r_{11}) + 2x(\tilde{r}_2-r_{21}) - (1-x)\tilde{r}_1 - x\tilde{r}_2 + r^* = (1-x)(\tilde{r}_1-r_{11}) + x(\tilde{r}_2-2r_{21}) + r^*$$

$$= (1-x)(\tilde{r}_1-x_{11}) + x(\tilde{r}_2-x_{21}) + r^* - \left[(1-x)x_{11} + xr_{21}\right] == (1-x)\Delta_1 + x\Delta_2 + r^* - r_{\min} > 0 \quad (28)$$

и (28) выполняется, если $r^* - r_{\min} > 0$.

Таким образом мы получили следующие достаточные условия для $\frac{\partial\beta}{\partial x} < 0$ (см. рис 1)

а) $\tilde{r}_1 < r^* < \tilde{r}_2$; б) $r_{11} < r_{21}$;

в) $r^* > r_{\min} = (1-x)r_{11} + x_1 r_{21}$; г) $r^* < \tilde{r} = (1-x)\tilde{r}_1 + x_1\tilde{r}_2$.

При выполнении этих условий, зависимость «оптимальная доходность-риск» будет иметь монотонно-убывающий характер.

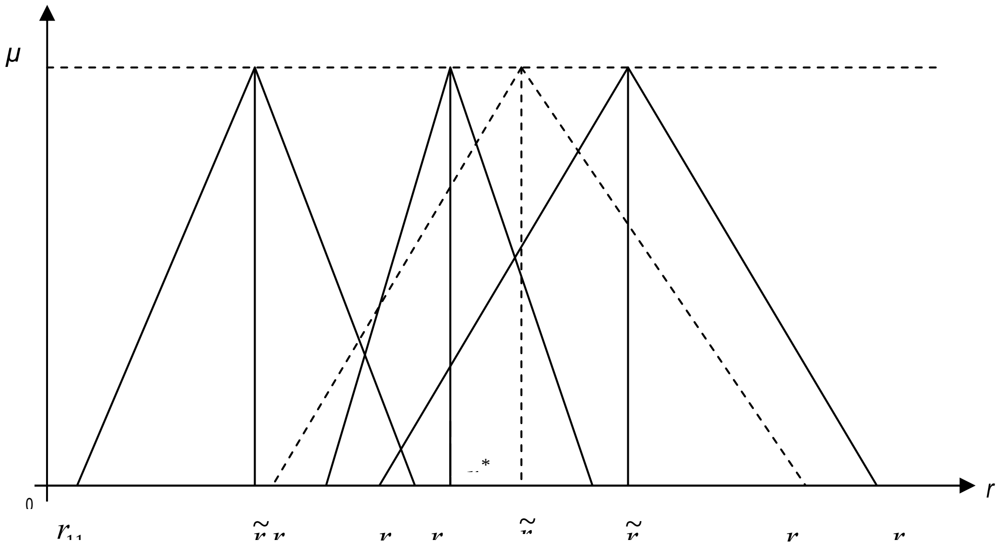

Рис. 1

Экспериментальные исследования зависимости «оптимальная доходность- риск»

Проведем экспериментальные исследования зависимости «оптимальная доходность- риск» для нечеткого инвестиционного портфеля. При этом рассмотрим случаи двух ЦБ с малой доходностью и высокой доходностью с различными волатильностями.

При этом будем варьировать величину критериального значения.

Исследуем случаи, когда эта зависимость будет иметь монотонно- убывающий характер.

Когда первой ЦБ была задана высокая волатильность и низкая доходность, а другой ЦБ- средняя волатильность и высокая доходность, то зависимость доходность-риск носила монотонно – убывающий характер. Это иллюстрируется графиками на рис.2.

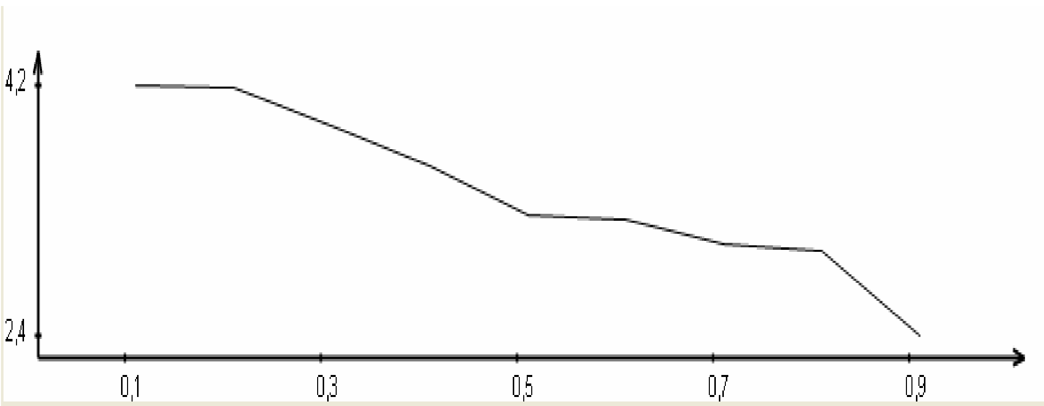

Рис .2. График зависимости доходность- риск нечеткого портфеля

Приведем примеры взаимного расположения доходностей ценных бумаг с различной волатильностью и нечеткого критериального значения

Пример 1

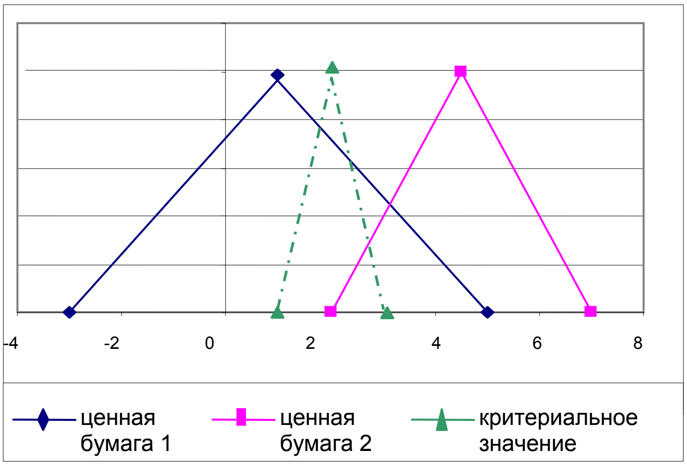

Рис.3. Взаимное расположение нечетких доходностей ЦБ и критериального значения для треугольных ФП

Пример 2

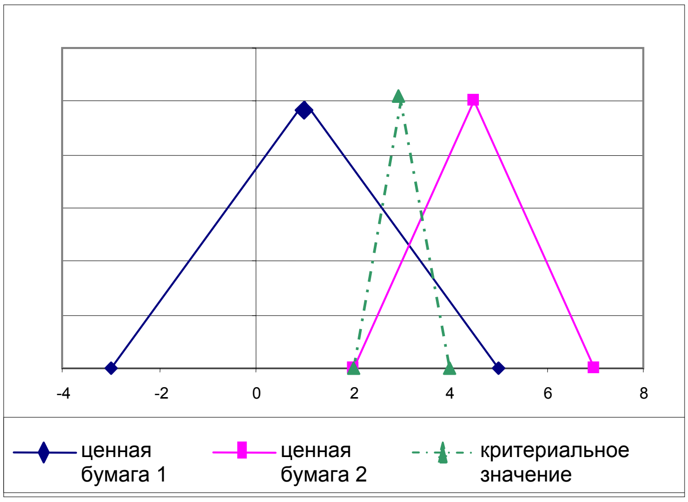

Рис. 4 Взаимное расположение нечетких доходностей ЦБ и критериального значения

Пример 3

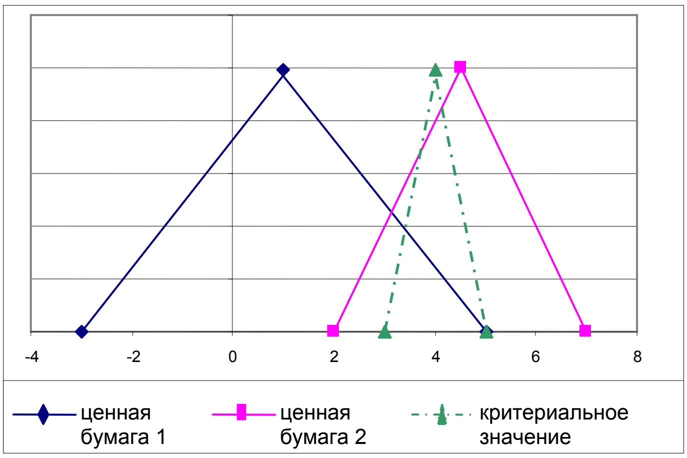

Рис.5. Взаимное расположение нечетких доходностей ЦБ и критериального значения

Пример 4.

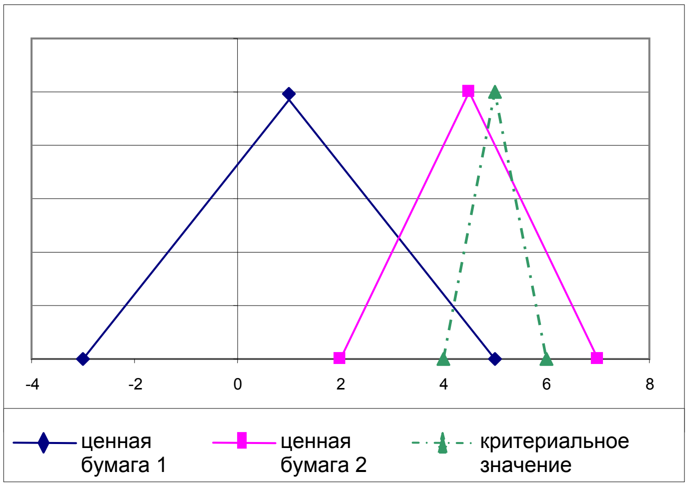

Рис.6. Взаимное расположение нечетких доходностей ЦБ и критериального значения

Пример 5

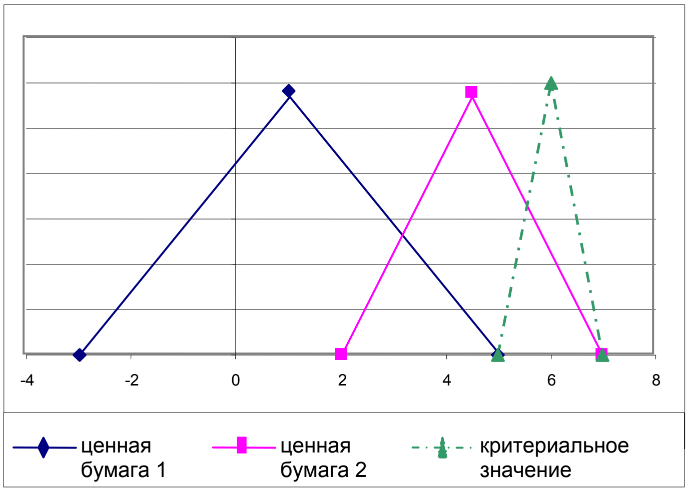

Рис.7. Взаимное расположение нечетких доходностей ЦБ и критериального значения

Анализ представленных результатов экспериментов позволяет сделать следующие **выводы.**

Зависимость «доходность- риск» нечеткого портфеля носит преимущественно убывающий характер в случаях когда менее доходная ЦБ имеет высокую или среднюю волатильность, а более ценная ЦБ имеет высокую доходность при малой и средней волатильности. При этом критериальное значение находится между доходностями обоих ЦБ.

Зависимость «доходность-риск» носит возрастающий характер, в случаях, когда менее доходная ЦБ имеет малую или среднюю волатильность, а более доходная ЦБ имеет высокую волатильность, а критериальное значение меньше доходности менее ценной ЦБ или расположено между ожидаемыми доходностями обоих ЦБ.

Выводы

В работе исследована модель задачи оптимизации нечеткого инвестиционного портфеля. Установлены достаточные условия , при которых зависимость «оптимальная доходность-риск» будет иметь убывающий характер, прямо противоположный зависимости для классической модели Марковица- Тоббина. Проведены экспериментальные исследования условий и оптимальных решений задачи портфельной оптимизации для убывающей и возрастающей зависимостей «доходность-риск», которые полностью подтвердили теоретические результаты.

Благодарности

Статья частично финансированна из проекта **ITHEA XXI** Института Информационных теории и Приложений FOI ITHEA и Консорциума FOI Bulgaria (www.ithea.org, www.foibg.com).

Bibliography

[Зайченко,2008] Зайченко Ю.П., Малихех Есфандиярфард. Анализ инвестиционного портфеля для различных видов финкций принадлежности //системні дослідження та інформаційні технології.-№2-2008.-с. 59-76.

[Зайченко, Малихех 2008] Зайченко Ю.П., Малихех Есфандиярфард. Нечеткий метод индуктивного моделирования для прогнозирования курсов акций в задачах портфельной оптимизации //Вісник Черкаського державного технологічного університету.-№ 1.- 2008.- с. 9-14.

[Зайченко,2007] Зайченко Ю.П., Малихех Есфандиярфард, Заика А.И. Анализ инвестиционного портфеля на основе прогнозирования курсов акций// Вісник національного технічного університету України «КПІ». «Інформатика, управління та обчислювальна техніка.» Київ ТОО «ВЕК+», № 47 – 2007, - с. 168-179.

[Zaychenko,2008] Zaychenko Yurii, Esfandiyarfard Maliheh. Optimization of the Investment Portfolio in the Conditions of Uncertainity/ International Journal "Information Technologies and Knowledge" Volume 2 / 2008, Number 3. Sofia-Bulgaria.pp. 225-233

Authors' Information

Зайченко Юрий Петрович, *профессор, д.т.н., кафедра «Институт прикладного системного анализа». Киев, НТУУ «КПИ», ул. Политехническая 14. тел: +8(044)241-86-93, e-mail: baskervil@voliacable.com*

Малихех Есфандиярфард (*Иран), аспирантка кафедры «Прикладная математика» НТУУ « КПИ», проспект Победы 37, тел: +38(096)6915857, e-mail: fard_sem@yahoo.com*