СРАВНЕНИЕ ПОЛИИНТЕРВАЛЬНЫХ ОЦЕНОК В МЕТОДЕ ОИО

Михаил Стернин, Геннадий Шепелёв

***Abstract**: A problem concerning in comparison of poly-interval structures in generalized interval estimations approach is discussed. It's showed that to compare two poly-interval estimations (PIEs) we may compare their different mono-interval realizations, i.e. different pairs of mono-interval estimations from compared PIEs, using a Monte-Carlo family method. To compare mono-intervals people often use equivalent point estimations of intervals received on base of Hurwicz's criterion or similar criteria. We offer a method of direct comparison of mono-interval estimations that interprets the problem as a problem of decision-making. We suggest distinguishing a favorable zone (zone where one interval in comparable pair may be more preferable than another), a zone of uncertainty (zone where compared intervals are equivalent to each other) and an unfavorable zone. Preferences of the decision maker during analysis of relative widths of the zones allow analyze the problem. The results of direct comparison are compared with results received on the base of equivalent point estimations. The arguments are given that method of direct comparison of intervals is more adequate to decision-making tasks. Relationship between numbers of preferable, equivalent and no preferable comparisons of mono-intervals from PIEs gives an information that support process of decision making during comparison of poly-interval estimations by decision maker.*

***Keywords**: generalized interval estimations, comparison of intervals, decision support*

***ACM Classification Keywords**: H.4.2 Types of Systems – Decision support; G.1.0 Numerical Analysis - Interval Arithmetic, G.3 Probability and Statistics – Distribution functions*

***Conference**: The paper is selected from XVth International Conference "Knowledge-Dialogue-Solution" KDS 2009, Varna, Bulgaria, June-July 2009*

Введение

Для расширения возможностей выявления и представления экспертных знаний о количественных параметрах, известных с неопределенностью, нами предложен метод обобщенных интервальных оценок (ОИО) [Shepelyov, Sternin, 2003]. В отличие от традиционного моноинтервального оценивания в методе ОИО, для учета возможной неопределенности экспертной оценки по размаху и положению, она представляется совокупностью интервалов, каждый из которых служит сценарием возможной реализации анализируемого параметра. Шансы на реализацию описываются совместной функцией распределения вероятностей двух случайных переменных α, D с плотностью $\Psi(\alpha, D) = f_1(\alpha)f_2(D|\alpha)$. Переменная α «отмечает» место интервалов в ОИО. Соответствующее ей распределение $f_1(\alpha)$ характеризует шансы различных полос интервальных оценок в их совокупности. Переменная D описывает неопределенность значений параметра на каждой из интервальных оценок совокупности, а плотности $f_2(D|\alpha)$ - шансы на реализацию тех или иных значений D. На плоскости (D, α) ОИО удобно представлять криволинейной трапецией, названной полиинтервальной оценкой (ПИО) параметра.

Изучены некоторые возможные направления использования ОИО. Во-первых, разработаны процедуры усреднения, позволяющие свести задачи в ОИО постановке к задачам в моноинтервальной постановке [Стернин, Шепелев, 2003]. При этом на «базовом» интервале ОИО, образованном как теоретико-множественное объединение всех интервальных оценок совокупности, получаются усредненные результирующие функции распределения вероятностей («проекции» ОИО на базовый интервал). В русле этого направления показаны возможности исследования методом ОИО динамических задач [Стернин и др., 2005]. Удобным средством экспресс-анализа указанных задач явились распределения вероятностей, обобщающие традиционные. Так если на обеих осях трапеции (D, α) заданы равномерные распределения, результатом усреднения служит обобщенное равномерное распределение [Стернин и др., 2007].

Во-вторых, предложены методы анализа структуры ОИО с автоматическим построением вероятностных трубок (p-tubes) и распределений вероятностей на различных сечениях таких трубок [Chugunov et al., 2008]. Наконец, найдены пути использования метода ОИО в сценарном анализе теории принятия решений [Стернин, Шепелев, 2008].

Для дальнейшего развития метода ОИО как инструмента поддержки процессов принятия решений необходимо исследовать возможности сравнения ПИО для результирующих индикаторов, описывающих эффективность альтернативных вариантов. Одной из таких возможностей является сравнение получаемых методом Монте-Карло различных реализаций моноинтервальных оценок в парах сопоставляемых ПИО с накоплением статистики результатов сравнения и дальнейшим использованием предпочтений лица, принимающего решение (ЛПР). Важнейшая составляющая этого подхода – разработка и выбор метода сопоставления моноинтервальных оценок. Эта, последняя, задача имеет и самостоятельное значение, не связанное с задачей сравнения ПИО.

Сравнение моноинтервальных оценок

Принятие решений часто сопровождается необходимостью прогнозирования значений исходных данных используемых расчетных схем (моделей) или результирующих индикаторов эффективности сопоставляемых в процессе решения альтернатив. Неизбежная неопределенность, присущая прогнозным оценкам, зачастую приводит к потребности в их представлении в виде числовых интервалов, выполнении операций над ними в ходе расчетов итоговых индикаторов, также получающих интервальное представление, и, наконец, в сравнении интервалов-индикаторов разных альтернатив при принятии решения. Методы интервального анализа [Калмыков и др., 1986] дают нам возможность проведения расчетов с интервальными оценками. Например, если мы имеем реализуемый в течение 5 лет инвестиционный проект с компонентами денежного потока $F_t = [F_l, F_r]$: F_0=[– 105, – 95], F_1 = [70, 75], F_2 = [83, 85], F_3 = [100, 104], F_4 = [191, 194], F_5 = [94, 96] и ставкой дисконтирования d, принимающей значения в интервале d = [10%, 12%], то результирующая оценка чистого дисконтированного дохода NPV, исчисленного в соответствии с правилами интервальной арифметики, будет лежать в интервале NPV = [269.57, 313.68]. Аналогичным образом может быть рассчитан чистый дисконтированный доход для какого-либо другого проекта. Чтобы выбрать один из них для финансирования, инвестор должен сравнить интервальные значения соответствующих NPV и решить, какая из этих оценок предпочтительнее («больше»). Таким образом, для принятия решения ЛПР должен обладать основанным на сопоставлении интервальных значений индикаторов эффективности методом выявления предпочтительной альтернативы или констатации того факта, что альтернативы несравнимы.

При сравнении моно-интервальных оценок часто используют полученные методом Гурвица [Hurwicz, 1951] или другими подобными методами точечные оценки, «эквивалентные» исходным интервальным. Подчеркнем, что такая замена не осуществляется автоматически, а базируется на предпочтениях ЛПР, ее/его склонности к риску. Вместе с тем переход от интервальных оценок к точечным не содержит процедур, явным образом отражающих связь получаемых точечных оценок с предпочтениями ЛПР. Недостаточная наглядность такого перехода не позволяет ЛПР в полной мере получить представление об обоснованности выбора той или иной эквивалентной точечной оценки.

Мы предлагаем метод непосредственного сопоставления интервальных величин, процесс сравнения в котором трактуется как задача принятия решений. В соответствии с методом в паре сравниваемых интервалов выделяются три зоны, зона, благоприятствующая проверяемой гипотезе о предпочтительности одной из оценок, зона, отвергающая гипотезу, и зона эквивалентности оценок. Вывод о предпочтительности или эквивалентности интервальных оценок делается на основе сопоставления размеров зон и предпочтений ЛПР. Метод позволяет на основе суждений ЛПР либо указать лучшую интервальную оценку из сравниваемых, либо рекомендовать ЛПР временно отказаться от принятия решения из-за опасности совершить ошибку второго рода. Иначе говоря, из-за опасности выбора в качестве лучшего интервала, не являющегося таковым. В случае получения такого сигнала, вероятно, целесообразно воздержаться от немедленного принятия решения и попытаться сузить диапазон неопределенности. Мы покажем, что в ряде случаев полученные с помощью предлагаемого метода результаты отличаются от результатов, получаемых при сравнении точечных оценок, замещающих интервальные. Указанное сопоставление позволяет сделать вывод, что метод непосредственного сравнения интервалов более адекватен специфике задач принятия решений, для которых характерно наличие понятия несравнимости, отсутствующее при использовании точечных оценок.

Рассмотрим два числовых интервала $I_i = [L_i, R_i]$, заданных их левыми L_i и правыми R_i границами, $L_i < R_i$. С точностью до перестановки I_1 и I_2 возможны следующие четыре варианта их взаимного расположения:

a) $R_1 < L_2$.

b) $L_1 < L_2 < R_1 < R_2$.

c) $L_1 < L_2 < R_2 < R_1$.

d) $L_1 = L_2$, $R_1 = R_2$.

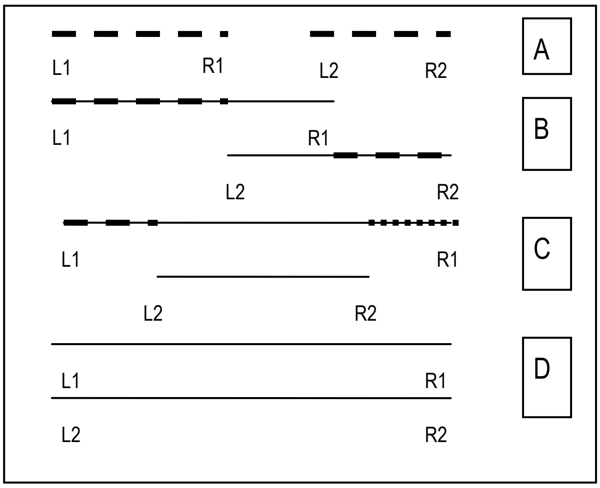

Рис. 1. Варианты расположения интервальных оценок

Они показаны на рисунке 1. Мы будем искать условия, при которых I_2 может быть предпочтительнее («больше»), чем I_1.

Конфигурация a) не вызывает трудностей: при любых возможных будущих реализациях значений i_1 и i_2 в интервалах I_1 и I_2 соответственно, интервал I_1 не может превзойти I_2, т.е. всегда $I_2 \succ I_1$.

В работе [Вощинин, Сотиров, 1989] указано, что a) – единственная конфигурация, для которой интервальные оценки сравнимы в строгом смысле слова. В этом случае фактически нет задачи принятия решений, поскольку нет неопределенности: интервал I_2 строго больше интервала I_1.

Конфигурация d) характеризуется наибольшей неопределенностью, интервалы эквивалентны друг другу по предпочтительности. В этой ситуации ЛПР не в состоянии принять рациональное решение в пользу какого-либо из интервалов без дополнительной информации. Необходимо либо отказаться от выбора, либо, если сделать выбор все-таки нужно, а оперативно получить дополнительную информацию невозможно, воспользоваться случайным выбором. Из этих примеров видно, что мерой неопределенности в рассматриваемой задаче сравнения может служить протяженность D пересечения $I_1 \cap I_2$.

Анализ конфигураций b) и c) позволяет выделить еще две меры, играющие важную роль при сравнении интервалов.

Именно, из рассмотрения конфигурации b) следует, что если для I_1 текущая реализация $i_1 \in [L_1, L_2]$ или для I_2 текущая реализация $i_2 \in [R_1, R_2]$, то эти ситуации благоприятствуют тому, чтобы I_2 оказался предпочтительнее I_1. Назовем зону благоприятствования зеленой зоной. Протяженность интервала $[L_2, R_1]$ характеризует размеры зоны неопределенности при сравнении I_1 и I_2. Назовем зону неопределенности желтой зоной. Таким образом, в конфигурации b) шансы на то, что I_2 окажется предпочтительнее I_1, зависят от соотношения протяженностей зон. Можно видеть, что протяженность зеленой зоны $Dg = L_2 – L_1 + R_2 – R_1$, а желтой зоны $Dy = R_1 – L_2$.

В конфигурации c) появляется неблагоприятная («красная») зона протяженностью $Dr = R_1 – R_2$. Здесь протяженность зеленой зоны $Dg = L_2 – L_1$, а желтой зоны $Dy = R_2 – L_2$. Соотношения между протяженностями зон в сопоставляемых парах оценок разных конфигураций определяют возможные результаты сравнения интервалов. Указанные соотношения удобно представить в виде числовых коэффициентов.

Среди нескольких возможных числовых коэффициентов, характеризующих ситуацию принятия решений, один показатель K, названный нами коэффициентом уверенности, имеет ясный экономический смысл. Для произвольной конфигурации этот коэффициент равен $K = [Dg - Dr]/D(I_1 \cup I_2)$, т.е. доле разности протяженностей зеленой и красной зон в общей протяженности сравниваемых интервалов с учетом их возможного пересечения.

Содержательно он характеризует относительный прирост возможного максимального выигрыша за счет верного принятия решений. Действительно, в случае конфигурации b), например, при выборе интервала I_2 в качестве предпочтительного максимум возможного выигрыша от такого выбора равен $R_2 - L_1$. При выборе интервала I_1 эта величина равна $R_1 - L_2$. Таким образом, относительный прирост возможного максимального выигрыша за счет верного принятия решений равен $[(R_2 - L_1) - (R_1 - L_2)]/(R_2 - L_1)$, т.е. K. Отметим, что если бы проверялась гипотеза о предпочтительности интервала I_1, зеленая и красная зоны поменялись бы местами. Вычисленное в конкретной ситуации сравнения интервальных величин значение коэффициента уверенности K может быть использовано ЛПР при принятии решений. Именно, если при проверке гипотезы о предпочтительности интервала I_2 значение коэффициента K для сравниваемой пары интервальных оценок окажется «достаточно большим» и согласуется с представлениями ЛПР о приемлемой величине риска, который связан с принятием решения и который измеряется назначаемым ЛПР пороговым значением K_{th} (индивидуальным для каждого ЛПР и ситуации принятия решений), то принимается, что $I_2 \succ I_1$, если $K_{th} \geq K$. Из других соображений сходный с K «показатель интервального неравенства» предложен в работе [Ащепков, Давыдов, 2006].

Сопоставим результаты сравнения интервалов в конфигурации b) с соответствующими результатами для точечных оценок. Привлекая критерий Гурвица, для точечных оценок Es_i интервалов I_1 и I_2 получаем: $Es_i = (1 - \lambda)L_i + \lambda R_i$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Для разности точечных оценок имеем: $Es_2 - Es_1 = (1 - \lambda)(L_2 - L_1) + \lambda(R_2 - R_1)$. Видно, что в конфигурации b), когда $L_2 > L_1$ и $R_2 > R_1$, $Es_2 > Es_1$ при всех λ, $0 \leq \lambda \leq 1$. Это означает, что в соответствии с точечными оценками для конфигурации b) всегда $I_2 \succ I_1$. В методе прямого сравнения интервалов это не всегда так. При большой зоне неопределенности (желтой зоне), значительно превосходящей размеры зеленой зоны, осторожный инвестор, опасаясь сделать ошибку второго рода, вряд ли согласится с выводом $I_2 \succ I_1$.

Сравнение интервалов конфигурации c) по точечным оценкам критерия Гурвица показывает, что $I_2 \succ I_1$, если $0 \leq \lambda \leq 1/[1 + (R_1 - R_2)/(L_2 - L_1)] = 1/[1+ Dr/Dg]$. Здесь вновь не учитываются (возможно, большие) размеры зоны неопределенности, что может не позволить ЛПР принять решение в соответствии с точечными оценками.

Например, если ЛПР принял $\lambda = 0.4$, то, в соответствии с точечными оценками, $I_2 \succ I_1$ при $Dr \leq 1.5\ Dg$. Нетрудно подобрать пару интервалов, у которых это условие выполняется, но протяженность зоны неопределенности (Dy) столь велика, что не позволит с доверием относиться к выбору по точечным оценкам.

Следует отметить еще одно обстоятельство. При попарном сравнении трех интервалов A, B, C может случиться так, что для пары A, B интервал B предпочтительнее A с, например, $K = 65\% > K_{th} = 60\%$, а для пары A, C интервал C предпочтительнее A с $K = 80\% > K_{th}$. Это не означает, что C предпочтительнее B, потому что при непосредственном сравнении C и B может оказаться, что C «лучше» B с $K < K_{th}$, т.е. для ЛПР, принявшего для выбора величину K_{th}, эти интервалы несравнимы. Таким образом, всегда необходимо прибегать к непосредственному попарному сравнению всех интервалов-альтернатив с учетом предпочтений ЛПР.

Отметим также, что в некоторых задачах, таких как сопоставление чистых дисконтированных доходов инвестиционных проектов, вывод $I_2 \succ I_1$ не означает еще, что следует выбрать второй проект, если левая граница I_2 лежит в отрицательной области. Дополнительно необходимо сравнить интервалы $[L_2, R_2]$ и $[L_2, 0]$. Если окажется, что первый интервал предпочтительнее, такой проект может быть рекомендован инвестору. Эта операция может быть проделана и до непосредственного сравнения исходных интервальных оценок.

Сопоставление с вероятностными мерами сравнения интервальных оценок

При прямом сравнении интервалов не предполагается наличия дополнительных знаний о шансах на реализацию значений рассматриваемых интервальных величин. Наличие такой дополнительной информации вносит определенные коррективы в результаты сравнения интервалов. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Пусть i_1, i_2 случайные величины, определенные на интервалах I_1, I_2 соответственно. Найдем вероятность того, что $I_2 \succ I_1$ для конфигураций b) и c). В случае конфигурации b) вероятность $P(I_2 \succ I_1)$ того, что интервал I_2 будет предпочтительнее интервала I_1, равна вероятности Pg нахождения i_1 и i_2 в благоприятной зоне, $Pg = P(L_1 < i_1 < L_2) + P(L_2 < i_1 < R_1)P(R_1 < i_2 < R_2)$, а для конфигурации c) $Pg = P(L_1 < i_1 < L_2)$. Отметим, что для конфигурации c) Pg не зависит от типа распределения на I_2. Будем считать, что $I_2 \succ I_1$, если $Pg \geq Kpr$, - порогового значения, выбранного ЛПР для сравнения альтернатив по вероятности.

Сравним «силу» решающих правил метода прямого сравнения и сравнения по вероятности для простого случая равномерных распределений на сопоставляемых интервалах. Тогда в случае b) $Pg = 1 - (R_1 - L_2)^2/(D_1D_2)$, где $D_i = R_i - L_i$ - протяженности сравниваемых интервалов. Сопоставляя предельные значения коэффициентов уверенности в конфигурации b) для метода прямого сравнения $Kin = 1 - (R_1 - L_2)/(R_2 - L_1)$ и сравнения по вероятности $Kpr = Pg$, получаем: $Pg = Kin + [(L_2 - L_1)(R_2 - R_1)(R_1 - L_2)]/[(R_2 - L_1)D_1D_2]$. Поскольку второе слагаемое в этом соотношении положительно, то, если признать $I2 \succ I1$ с коэффициентом уверенности Kin при использовании метода прямого сравнения, этот вывод окажется справедливым с еще большим коэффициентом уверенности для метода сравнения по вероятности. К аналогичному выводу можно прийти для конфигурации c), где $Pg = Kin + (R_1 - R_2)/D_1$.

Этот вывод несправедлив, вообще говоря, для некоторых типов конфигураций при произвольных типах распределений вероятностей. Покажем это на примере треугольного распределения, которое является приемлемой моделью произвольного унимодального распределения, заданного на интервале конечной протяженности.

В случае конфигурации c) при $M_1 < L_2$, где M_1 – мода соответствующего треугольного распределения, Pg и K связаны соотношением $Pg = Kin + (R_1 - R_2)/D_1 + (R_1 - R_2)(L_2 - M_1)/[D_1(R_1 - M_1)]$, а при $M_1 > L_2$ $Pg = [Kin + (R_1 - R_2)/D_1](L_2 - L_1)/(M_1 - L_1)$. Видно, что $Pg \geq Kin$ и предыдущий вывод остается справедливым.

Для конфигурации b) отношения между коэффициентами Pg и Kin зависят от местоположения мод распределений. Мы не будем приводить громоздкого соотношения, связывающего Pg и Kin для этой конфигурации, а дадим формулы для вероятностей – компонентов Pg: $P(L_1 < i_1 < L_2) + P(L_2 < i_1 < R_1)P(R_1 < i_2 < R_2)$: $P(L_2 < i_1 < R_1) = 1 - P(L_1 < i_1 < L_2)$,

$$P(L_1 < i_1 < L_2) = \begin{cases} \dfrac{(L_2 - L_1)^2}{D_1(M_1 - L_1)}, & M_1 > L_2 \\ 1 - \dfrac{(R_1 - L_2)^2}{D_1(R_1 - M_1)}, & M_1 \geq L_2 \end{cases} \qquad P(R_1 < i_2 < R_2) = \begin{cases} \dfrac{(R_2 - R_1)^2}{D_2(R_2 - M_2)}, & M_2 > R_1 \\ 1 - \dfrac{(R_1 - L_2)^2}{D_2(M_2 - L_2)}, & M_2 \geq R_1 \end{cases}$$

Можно показать, что при разных положениях модах возможны как ситуации с $Pg \geq Kin$, так и с $Pg < Kin$.

Заключение

Предложенный в работе метод непосредственного сравнения интервальных величин позволяет на основе предпочтений ЛПР либо указать лучшую интервальную оценку из сравниваемых, либо рекомендовать

ЛПР временно отказаться от принятия решения из-за несравнимости интервалов и опасности совершить ошибку второго рода. Мы полагаем, что этот метод более адекватен специфике задач принятия решений, чем распространенный метод замены интервальных оценок точечными, так как, ввиду своей наглядности, позволяет ЛПР более полно отразить свой предпочтения. При этом в ряде случаев полученные с помощью предлагаемого метода результаты отличаются от результатов, получаемых при сравнении точечных оценок, замещающих интервальные.

Предложенный метод сравнения моноинтервальных оценок позволяет реализовать один из возможных методов сопоставления полиинтервальных оценок, основанный на привлечении метода статистических испытаний. Другой возможный метод сравнения ПИО, связанный с анализом возможных конфигураций относительной локализации пар ПИО, также требует использования метода сопоставления моноинтервальных оценок. Эта возможность будет рассмотрена позже.

Благодарности

Статья частично финансированна из проекта **ITHEA XXI** Института Информационных теории и Приложений FOI ITHEA и Консорциума FOI Bulgaria (www.ithea.org, www.foibg.com).

Библиография

[Ащепков, Давыдов, 2006] Л. Ащепков, Д. Давыдов. Показатель интервального неравенства: свойства и применение //Вычислительные технологии. Т. 11, сс. 13 – 22. 2006.

[Вощинин, Сотиров, 1989] А. Вощинин, Г. Сотиров. Оптимизация в условиях неопределенности. М.: МЭИ, София: Техника. 1989.

[Калмыков и др., 1986] С. Калмыков, Ю. Шокин, З. Юлдашев. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука. 1986.

[Стернин, Шепелев, 2003] М. Стернин, Г. Шепелев. Метод представления знаний в интеллектуальных системах поддержки экспертных решений. // Новости искусственного интеллекта. Т. 4, сс. 11 – 15. 2003.

[Стернин и др., 2005] М. Стернин, Н. Чугунов, Г. Шепелёв. Модели предметных областей в компьютерных системах, основанных на знаниях // Методы поддержки принятия решений. Труды Института системного анализа Российской академии наук. Т. 12, сс. 95 – 113. 2005.

[Стернин и др., 2007] М. Стернин, Г. Шепелев, Н. Шепелев. Свойства обобщенного равномерного распределения вероятностей // Вторая международная конференция «Системный анализ и информационные технологии» (САИТ-2007). Труды конференции Т. 1, сс. 239 – 242. 2007.

[Стернин, Шепелев, 2008] М. Стернин, Г. Шепелев. Обобщенные интервальные оценки в сценарном анализе. // Supplement to International Journal Information Technologies and Knowledge. V. 2, pp. 87 – 94. 2008.

[Chugunov et al., 2008] N. Chugunov, G. Shepelyov, M. Sternin. The generalized interval estimations in decision making under uncertainty. // Int. J. Technology, Policy and Management. V. 8, pp. 298 – 321. 2008.

[Hurwicz, 1951] L. Hurwicz. Optimality criteria for decision making under ignorance. ‘Cowles Commission Discussion Paper’, Statistics, 1951, # 370, New Haven.

[Shepelyov, Sternin, 2003] G. Shepelyov, M. Sternin. Method of Generalized Interval Estimations for Intelligent DSS. // DSS in the Uncertainty of the Internet Age. The Karol Adamiecki University of Economics in Katowice, Katowice, pp. 367-377. 2003.

Информация об авторах

***Михаил Стернин** – старший научный сотрудник Института системного анализа РАН. Россия, 117312, Москва, просп. 60-летия Октября, ИСА РАН; e-mail: mister@isa.ru*

***Геннадий Шепелёв** – заведующий лабораторией Института системного анализа РАН. Россия, 117312, Москва, просп. 60-летия Октября, ИСА РАН; e-mail: gis@isa.ru*