АГРЕГИРОВАНИЕ ПРЯМЫХ И ДВОЙСТВЕННЫХ БАЛАНСОВЫХ МОДЕЛЕЙ «ЗАТРАТЫ-ВЫПУСК»

Игорь Ляшенко, Андрий Онищенко, Игорь Онищенко

Аннотация: *Исследование экономических процессов на макро уровне используют агрегированные показатели. Детализированные показатели определяются на микро уровне. Связь между детализированными и агрегированными показателями осуществляется с помощью методов агрегирования. Авторы основное внимание уделяют методу точного агрегирования и возможностям его использования для статичных и динамичных межотраслевых моделей, исследование которых позволяют сбалансировать производственные мощности, выпуск продукции и расходы на производство.*

Ключевые слова. *Экономико-математическое моделирование, точное агрегирование, модель Леонтьева.*

Conference*: The paper is selected from XV^th^ International Conference "Knowledge-Dialogue-Solution" KDS 2009, Varna, Bulgaria, June-July 2009*

Введение.

Изучение экономический показателей требует от исследователя оперировать большим количеством данных, которые в силу объективных причин не могут быть учтены в полном объеме. Поэтому исследователь не может эффективно их обработать без использования надежных методов агрегирования входящей информации.

II. Постановка задачи.

Одной из первых линейных балансовых моделей построенных на основании детализированных показателях является межотраслевая балансовая модель Леонтьева, известная под названием «затраты-выпуск» [1,2]:

$$x = Ax + y\,,\ x \ge 0\,,\ y > 0 \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_N)^T$ – вектор-столбец объемов выпуска продукции, $y = (y_1, y_2, ..., y_N)^T$ – вектор-столбец конечного потребления продукции, $A \ge 0$ – неотрицательная матрица коэффициентов прямых затрат производства, размерности $N \times N$, элемент a_{ij} которой показывает, какое количество продукции i необходимо затратить для производства единицы продукции j.

Модель «затраты-выпуск» строится как в натуральном, так и в стоимостном выражении. Во втором случае натуральные элементами модели заменяют их денежным эквивалентом. В данной работе будем рассматривать материальный баланс.

III. Результаты.

1. Рассмотрим задачу агрегирования межотраслевого баланса (1.1) в единый продукт. Пусть $T = (p_1, p_2, ..., p_N)$ – агрегирующий вектор, где p_i – цена i-го продукта. Умножим обе части уравнения (1.1) на вектор T слева, в результате получим

$$Tx = TAx + Ty\,.$$

Учитывая, что $X = Tx$ – агрегированный показатель валового выпуска продукции в денежном выражении, $Y = Ty$ – агрегированный показатель конечного потребления продукции в денежном выражении, можем записать уравнение агрегированного баланса в виде

$$X = TAx + Y \,. \tag{1.2}$$

Или в скалярном виде

$$X = \tilde{a}X + Y \,,$$

где $\tilde{a}$ – числовой коэффициент прямых затрат производства.

Последнее уравнение можно записать также в виде

$$X = \tilde{a}Tx + Y \,. \tag{1.3}$$

Из уравнений (1.2) и (1.3) следует равенство

$$TA = \tilde{a}T \,. \tag{1.4}$$

Равенство (1.4) – условие точного агрегирования, известное под названием условия Хатанаки [3]. Раскроем экономический смысл этого условия. Уравнение (1.4) запишем в виде

$$T\left(A - \tilde{a}E\right) = 0 \,, \tag{1.5}$$

где E – диагональная единичная матрица N -го порядка.

На элементы уравнения (1.5) накладываем следующие дополнительные условия:

А) $T > 0$ – следует из того, что T – вектор цен.

Б) $A \neq \tilde{a}E$ – иначе технологическая матрица будет иметь вид диагональной, что сильно сужает круг исследуемых задач.

При таких условиях и неразкладной продуктивной матрице A решениями уравнения (1.5) будут [4]:

$\tilde{a} = \lambda_A$ – корень Фробениуса матрицы A,

$T = p_A$ – левый вектор Фробениуса матрицы A.

Подводя итоги сказанного можно утверждать

Утверждение 1: *Для продуктивной неразкладной модели «затраты-выпуск»* $x = Ax + y$, $y > 0$ *всегда существует единственное точное агрегирование к одномерному уравнению* $X = \tilde{a}X + Y$, $Y > 0$, *в котором* $\tilde{a} = \lambda_A < 1$ *– корень Фробениуса, а* $T = p_A$ *– левый вектор Фробениуса матрицы* A.

2. Рассмотрим задачу агрегирования межотраслевого баланса из N отраслей в n, причем $1 < n < N$. Как и раньше, будем изучать модель Леонтьева в виде (1.1).

Так как мы используем показатели матрицы A в натуральной форме, то для агрегирования модели (1.1) будем считать матрицу T матрицей цен:

$$T = \begin{pmatrix} p_1^1 \ldots p_{N_1}^1 \; 0 \ldots 0 \; \ldots \; 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 \;\; p_1^2 \ldots p_{N_2}^2 \ldots 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots 0 \;\; 0 \ldots 0 \ldots \; p_1^n \ldots p_{N_n}^n \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

$$N_1 + N_2 + \cdots + N_n = N \,,$$

Размерность агрегирующей матрицы – $n \times N$, элемент p_j^s матрицы соответствует цене j-го продукта из множества $\{N_s\}$, где $\bigcup_{s=1}^{n}\{N_s\} = \{N\}$, $\{N_k\}\bigcap\{N_r\} = 0$ при $k \neq r$.

Матрицы A и T соответственно с (2.1) запишем в клеточном виде

$$A = \begin{pmatrix} A_{11}\ A_{12} \dots A_{1n} \\ A_{21}\ A_{22} \dots A_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_{n1}\ A_{n2} \dots A_{nn} \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} p^1 & 0 \dots 0 \\ 0 & p^2 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots p^n \end{pmatrix}.$$

Умножим уравнение (1.1) на T слева, получим

$$Tx = TAx + Ty .$$

Тут $Tx = X$, где $X = (X_1, X_2, \dots X_n)^T$ – вектор-столбец агрегированных валовых выпусков продукции; $Ty = Y$, где $Y = (Y_1, Y_2, \dots Y_n)^T$ – вектор-столбец агрегированных выпусков конечной продукции. Можем переписать последнее равенство в виде:

$$X = TAx + Y . \tag{2.2}$$

С другой стороны уравнение агрегированного баланса имеет вид:

$$X = \tilde{A}Tx + Y . \tag{2.3}$$

Сравнивая равенства (2.2) и (2.3), приходим к условию Хатанаки:

$$TA = \tilde{A}T ,$$

где T – агрегирующая матрица; A, $\tilde{A}$ – соответственно матрицы коэффициентов прямых материальных затрат детализированного и агрегированного балансов. Причем матрица $\tilde{A}$ имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}\ \tilde{a}_{12} \dots \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21}\ \tilde{a}_{22} \dots \tilde{a}_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \tilde{a}_{n1}\ \tilde{a}_{n2} \dots \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Условие точного агрегирования можем также записать в виде

$$\left(p^s A_{sk}\right)_1 : \left(p^s A_{sk}\right)_2 : \dots : \left(p^s A_{sk}\right)_{N_k} = p_1^k : p_2^k : \dots : p_{N_k}^k , \tag{2.4}$$

$$s = 1, 2, \dots, n;\ k = 1, 2, \dots, n .$$

Из полученных выше результатов можно сделать следующий вывод:

Утверждение 2: *Необходимым и достаточным условием существования точного агрегирования модели межотраслевого баланса из N - размерного к n - размерному уравнению $(1 < n < N)$ есть требование, чтобы во всех n частичных агрегированиях удельные материальные расходы отраслей были пропорциональными ценам продукции.*

3. Если в задаче возникает необходимость исследовать как производственные затраты, так и затраты на расширение производства, то в таком случае используют динамическую модель Леонтьева.

$$x = Ax + B\dot{x} + y , \tag{3.1}$$

где A – матрица затрат на производство продукции, B – матрица затрат на расширение производства, $\dot{x}$ – вектор приростов производства за счет создания новых мощностей.

Поставим задачу агрегирования динамической модели Леонтьева (3.1) в единый продукт. Для решения поставленной задачи выберем агрегирующий вектор $T = (p_1, p_2, ..., p_N)$, элемент p_i которого равен цене i-го продукта, $i = \overline{1, N}$. Умножим обе части уравнения (3.1) на вектор T слева. Получим

$$Tx = TAx + TB\dot{x} + Ty. \tag{3.2}$$

С другой стороны, агрегированная динамическая модель Леонтьева имеет вид

$$Tx = \tilde{a}Tx + \tilde{b}T\dot{x} + Ty. \tag{3.3}$$

Из уравнений (3.2) и (3.3) следуют условия

$$\begin{aligned} TA &= \tilde{a}T, \\ TB &= \tilde{b}T, \end{aligned} \tag{3.4}$$

которые есть обобщенными условиями Хатанаки. Условия (3.4) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} T(A - \tilde{a}E) &= 0, \\ T(B - \tilde{b}E) &= 0. \end{aligned}$$

Если рассматривать общий случай, когда матрицы A и B не диагональные или нулевые, то из последних уравнений получим следующие результаты. Число $\tilde{a}$ – корень Фробениуса матрицы A, число $\tilde{b}$ – корень Фробениуса матрицы B. Агрегирующий вектор $T = p_A = p_B$, где p_A и p_B – левые вектора Фробениуса матриц A и B соответственно. Подводя итоги, можем утверждать:

Утверждение 3: *Необходимым и достаточным условием существования точного агрегирования для продуктивной неразкладной динамической модели Леонтьева $x = Ax + B\dot{x} + y$, $y > 0$ к одномерному уравнению $X = \tilde{a}X + \tilde{b}\dot{X} + Y$, $Y > 0$, где $\tilde{a} = \lambda_A < 1$, $\tilde{b} = \lambda_B$ – корни Фробениуса матриц A и B, есть условие равности их левых векторов Фробениуса. Тогда агрегирующий вектор $T = p_A = p_B$.*

4. Перейдем к задаче агрегирования динамической модели Леонтьева (3.1) из N - размерной к n - размерной. Причем выполняется условие $1 < n < N$.

В таком случае агрегирующая матрица T имеет размерность $n \times N$

$$T = \begin{pmatrix} p_1^1 \dots p_{N_1}^1 \; 0 \dots 0 \; \dots \; 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \;\; p_1^2 \dots p_{N_2}^2 \dots \; 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \;\; 0 \; \dots \; 0 \dots p_1^n \dots p_{N_n}^n \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

$$N_1 + N_2 + \cdots + N_n = N,$$

элемент p_j^s матрицы соответствует цене j-го продукта из множества $\{N_s\}$, где $\bigcup_{s=1}^{n} \{N_s\} = \{N\}$, $\{N_k\} \bigcap \{N_r\} = 0$ при $k \neq r$.

Матрицы затрат A и B, агрегирующую матрицу T в соответствии с (4.1) запишем в клеточном виде

$$A=\begin{pmatrix} A_{11}\ A_{12}\ \dots\ A_{1n} \\ A_{21}\ A_{22}\ \dots\ A_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_{n1}\ A_{n2}\ \dots\ A_{nn} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} B_{11}\ B_{12}\ \dots B_{1n} \\ B_{21}\ B_{22}\ \dots B_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ B_{n1}\ B_{n2}\ \dots B_{nn} \end{pmatrix},\ T=\begin{pmatrix} p^1\ 0\ \dots\ 0 \\ 0\ \ p^2\ \dots\ 0 \\ 0\ \ 0\ \dots\ p^n \end{pmatrix}.$$

Для агрегирования динамической модели Леонтьева умножим уравнение (3.1) на матрицу T слева. Получим

$$Tx = TAx + TB\dot{x} + Ty\,. \tag{4.2}$$

Также уравнение агрегированного баланса можно записать в виде

$$Tx = \tilde{A}Tx + \tilde{B}T\dot{x} + Ty\,. \tag{4.3}$$

Из последних двух равенств приходим к условиям точного агрегирования

$$\begin{aligned} TA &= \tilde{A}T, \\ TB &= \tilde{B}T. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Причем агрегированные матрицы затрат $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ имеют вид

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}\ \tilde{a}_{12}\ \dots\tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21}\ \tilde{a}_{22}\ \dots\tilde{a}_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \tilde{a}_{n1}\ \tilde{a}_{n2}\ \dots\tilde{a}_{nn} \end{pmatrix},\ \tilde{B}=\begin{pmatrix} \tilde{b}_{11}\ \tilde{b}_{12}\ \dots\tilde{b}_{1n} \\ \tilde{b}_{21}\ \tilde{b}_{22}\ \dots\tilde{b}_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \tilde{b}_{n1}\ \tilde{b}_{n2}\ \dots\tilde{b}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Учитывая условие положительности всех векторов цен, $p^s > 0$, $s=\overline{1,n}$, приходим к выводу, что

$$\tilde{a}_{ss} = \lambda_{A_{ss}}\,,\ p^s = p_{A_{ss}}\,,\ s=\overline{1,n}\,.$$

Аналогично для второго уравнения системы (4.4) получаем

$$\tilde{b}_{ss} = \lambda_{B_{ss}}\,,\ p^s = p_{B_{ss}}\,,\ s=\overline{1,n}\,.$$

Условие точного агрегирования можем переписать в виде

$$\left(p^s A_{sk}\right)_1 : \left(p^s A_{sk}\right)_2 :\dots: \left(p^s A_{sk}\right)_{N_k} = p_1^k : p_2^k :\dots: p_{N_k}^k\,. \tag{4.5}$$

Аналогичное условие для второго уравнения системы (4.4), запишется в виде

$$\begin{gathered} \left(p^s B_{sk}\right)_1 : \left(p^s B_{sk}\right)_2 :\dots: \left(p^s B_{sk}\right)_{N_k} = p_1^k : p_2^k :\dots: p_{N_k}^k\,, \\ s=1,2,\dots,n;\ k=1,2,\dots,n\,. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Подводя итоги результатов полученных в уравнениях (4.5), (4.6), можно сделать вывод

Утверждение 4: *Необходимым и достаточным условием существования точного агрегирования динамической модели Леонтьева из* N *к* n*- мерному уравнению* $\left(1<n<N\right)$ *есть требование, чтобы во всех* n *частичных агрегированиях удельные материальные затраты отраслей на производство были пропорциональными удельным затратам на расширение производства и цене соответственного продукта.*

5. Рассмотрим модель двойственную к модели межотраслевого баланса. Которую запишем в виде

$$p = pA + r\,, \tag{5.1}$$

где p – вектор цен на продукцию, A – технологическая матрица модели Леонтьева, r – вектор добавленной стоимости.

Пусть для модели (5.1) нужно решить задачу агрегирования в единый продукт. Для этого введем агрегирующий вектор-столбик $T = (x_1, x_2, ..., x_N)^T$, где x_i – объемы выпусков i-й продукции. Умножим уравнение (5.1) на агрегирующий вектор T справа. Получим

$$pT = pAT + rT \,. \tag{5.2}$$

Учитывая, что $pT = P$, $rT = R$ – агрегированные показатели, уравнение (5.2) можно записать в виде

$$P = pT\tilde{a} + R \,. \tag{5.3}$$

Сравнивая равенства (5.2) и (5.3) получим условие точного агрегирования для двойственной модели

$$AT = T\tilde{a} \,. \tag{5.4}$$

Можем записать последнее условие так

$$(A - \tilde{a}E)T = 0 \,. \tag{5.5}$$

Для нетривиального случая матрица A – не диагональная или нулевая. Поэтому выполнение равенства (5.5) требует чтобы $\tilde{a} = \lambda_A$, то есть агрегированный показатель $\tilde{a}$ равен корню Фробениуса матрицы A, а $T = x_A$, где x_A – правый вектор Фробениуса технологической матрицы A. Полученные результаты сформулируем в форме утверждения.

Утверждение 5: *Для продуктивной неразкладной модели (5.1) всегда существует единственное точное агрегирование к одномерному уравнению $P = P\tilde{a} + R$, $R > 0$. Причем $\tilde{a} = \lambda_A$, $T = x_A$, где λ_A и x_A – соответственно корень Фробениуса и правый вектор Фробениуса матрицы A.*

6. Рассмотрим двойственную модель к динамической модели Леонтьева

$$p = pA + \dot{p}B + r \,, \tag{6.1}$$

где A, B – технологические матрицы, r – вектор добавленной стоимости, $\dot{p}B$ – стоимость инфляционных процессов.

Введем агрегирующий вектор-столбик $T = x = (x_1, x_2, ..., x_N)^T$, где x_i – объем валового выпуска i-го продукту.

Умножим левую и правую часть уравнения (6.1) на вектор-столбик $T = x$ справа. Получим следующее равенство

$$px = pAx + \dot{p}Bx + rx \,. \tag{6.2}$$

С другой стороны, соответствующий агрегированный динамический баланс имеет вид

$$px = px\tilde{a} + \dot{p}x\tilde{b} + rx \,. \tag{6.3}$$

Уравнения (6.2) та (6.3) дают нам условия точного агрегирования модели (6.1)

$$\begin{aligned} Ax &= x\tilde{a}, \\ Bx &= x\tilde{b}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

или

$$\begin{aligned} (A - \tilde{a}E)x &= 0, \\ (B - \tilde{b}E)x &= 0. \end{aligned}$$

Если рассматривать общий случай, когда матрицы A и B не диагональные или нулевые, то из последних равенств приходим к таким результатам. Число $\widetilde{a}$ – корень Фробениуса матрицы A, число $\widetilde{b}$ – корень Фробениуса матрицы B. При этом агрегирующий вектор-столбик $T = x_A = x_B$, где x_A и x_B – правые векторы Фробениуса для матриц A и B соответственно.

Утверждение 6: *Необходимым и достаточным условием существования точного агрегирования для продуктивной нераскладной модели динамического баланса цен к одномерному уравнению* $P = \widetilde{a}P + \widetilde{b}\dot{P} + R$, $R > 0$, *где* $\widetilde{a} = \lambda_A < 1$, $\widetilde{b} = \lambda_B < 1$ *– корни Фробениуса, есть условие* $x_A = x_B$ *– равенства правых векторов Фробениуса матриц* A *и* B. *Тогда агрегирующий вектор* $T = x_A = x_B$.

IV. Выводы.

Сформулированы условия точного агрегирования модели Леонтьева «затраты-выпуск» к одномерному уравнению. Полученные результаты обобщены для случая агрегирования модели «затраты-выпуск» из N в n отраслей, а также для агрегирования динамической модели Леонтьева в один продукт и из N в n продуктов, где $1 < n < N$. Получены условия агрегирования моделей двойственных к модели «затраты-выпуск».

Благодарности

Статья частично финансированна из проекта **ITHEA XXI** Института Информационных теории и Приложений FOI ITHEA и Консорциума FOI Bulgaria (www.ithea.org, www.foibg.com).

Литература

[1] Леонтьев В.В. Экономические эссе. Теории, исследования, факты и политика: Пер. с англ./Под ред. С.С. Шаталина, Д.В. Волового. – М.: Политическая литература, 1990. – с. 415

[2] Леонтьев В.В. Межотраслевая экономика. – М.: ОАО «Издательство «Экономика», 1997. – с. 479.

[3] Итеративное агрегирование и его применение в планировании / Под ред. Л.М. Дудкина. – М.: Экономика, 1979. – с. 328

[4] Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М. Основи математичної економіки. – К.: Інформтехніка. 1995. – с. 320.

Информация об авторах

***Игорь Ляшенко** – д-р физ.-мат. наук, заслуженный профессор Киевского национального университета имени Тараса Шевченко*

***Андрий Онищенко** – канд. екон. наук, доцент, докторант Киевского национального университета имени Тараса Шевченко; e-mail: onyshchenko@yandex.ru*

***Игорь Онищенко** – аспирант Киевского национального университета имени Тараса Шевченко; e-mail: iony@yandex.ru*