AI & Mathematics and Philosophy

НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ В ПРИКЛАДНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Владимир Донченко

Аннотация: *Рассмотрена важная в математическом моделировании проблема происхождения неопределённости и математические средства её моделирования в связи с общими представлениями о том, что следует понимать под математическими структурами в широком смысле. Приведены примеры современных подходов к пониманию неопределённости и способов её описания. Предложена модель неопределённости, связывающая неопределённость с экспериментом. Приведён обзор математических методов используемых для моделирования в условиях неопределённости, определено место нечёткости в моделировании неопределённости.*

Ключевые слова*: Структурность, неопределённость, обратные задачи, нечёткие множества, случайность, преобразование Хока, псевдообращение по Муру – Пенроузу.*

ACM Classification Keywords*: G.3 Probability and statistics, G.1.6. Numerical analysis: Optimization; G.2.m. Discrete mathematics: miscellaneous.*

Conference*: The paper is selected from XVth International Conference "Knowledge-Dialogue-Solution" KDS 2009, Varna, Bulgaria, June-July 2009*

Вступление

Задача математического описания объекта в условиях неопределённости: его математического моделирования в соответствующих условиях, является важнейшей прикладноё задачей. Классические математические методы, используемые для описания неопределённости, в частности, обратные задачи (решение уравнений) и вероятностно-статистические методы (неопределённость в виде случайности), имеют многовековую историю. Тем не менее, объём и важность прикладных исследований, связанных с описанием поведения объектов в условиях неопределенности приводит в 60-х годах ХХ века к созданию и введению в практику прикладных математических исследований сразу нескольких математических средств описания и учёта неопределённости. Этими методами, теориями и средствами были: теория оценок с гарантированной точностью (теория минимаксного оценивания), теория нечётких по Л.Заде подмножеств (Fuzzy - теория) [Zadeh, 1965], инженерный метод в виде преобразования Хока (Hough Transform)[Hough, 1962]. Отметим также качественный сдвиг в практике рассмотрения обратных задач: введение в середине 50-х годов прошлого века в практику математического моделирования теории псевдообращения по Муру – Пенроузу (см., например, [Алберт, 1977]). Справедливости ради, следует отметить, что псевдообращение (в оригинале *reciprocal*) было введено в 1920 г. Муром в его работе [Moore, 1920], а Пенроузом – только в 1955 г. [Penrose,1955]. Отметим также, что преобразование Хока (ПХ) первоначально имело характер инженерного метода. Математическую теорию преобразования можно найти, например в [Donchenko, 2003].

Наличие разнотипных математических подходов к учёту неопределённости: математических методов моделирования в условиях неопределённости, их интенсивное и плодотворное применение в решении прикладных задач, не отменяет необходимости осмысления того, что же представляет неопределённость. Среди сравнительно недавних монографий, посвящённых неопределённости отметим работу Линдли [Lindley, 2006], в которой, собственно, неопределенность, в общем, предлагается понимать в рамках статистического (теоретико-вероятностного) подхода.

Применение математических методов в описании реальных объектов: их математическом моделировании, иногда вселяет надежды и ожидания, порождённые неоправданной верой прикладных исследователей во всесилие математики и в применение математических методов. Впрочем, эти заблуждения касаются не только математики. Применение математических методов связано, собственно, с использованием математических средств в описании того, что для специалиста в соответствующей области является «структурой объекта». В частности, естественным в устах исследователей являются выражение «структура объекта», «хорошо структурированный объект» и т.д. В то же время, естественными и часто употребляемыми в математической практике являются термины, связывающие понятие «структуры» (в широком смысле, а не по Вейлю) с тем или иным математическим объектом: говорят, что объект имеет «структуру метрического пространства», «структуру линейного пространства» и т.д. Очевидным образом, употребление термина «структура» в связи с моделируемым объектом и в рамках рассмотрения математических конструкций не идентично. Собственно, математическое моделирование представляет собой описание «структуры объекта» с помощью или в рамках тех или иных «математических структур». В частности, к примеру, в физике, в задачах динамики движения тела или тел, задачах описания электромагнитных явлений для описания исследуемого объекта используются переменные, функции, производные, интегралы. Для их использования необходимы соответствующие конструкции: математические структуры, которые обеспечивают корректность манипуляций с соответствующими математическими объектами.

В связи с задачей математического моделирования принципиальными являются два момента, один из которых, связанный с употреблением термина «структура» в широком смысле, уже отмечен выше: разница в употреблении термина «структура» в связи с моделируемым объектом и в связи с математическими конструкциями. Вторым принципиальным моментом, который следует принять во внимание, является наличие того, что часто передаётся выражениями: «неопределённость в поведении» исследуемого объекта, «моделирование в условиях неопределённости». Наличие «неопределённости» является существенной чертой важнейших прикладных задач. Как отмечено выше, до середины XX ст. классическими математическими средствами описания неопределённости были теория вероятностей и математическая статистика (ТВиМС) (неопределённость в виде случайности), и обратные задачи (решение уравнений). Вторая половина XX столетия, как отмечено выше, добавила к арсеналу математического моделирования в условиях неопределённости сразу несколько методов. Как представляется, в настоящее этот математический арсенал включает в себя следующие методы: 1) детерминированный, включая обратные задачи и задачи с проблемой скрытых параметров; 2) статистический; 3) метод получения оценок с гарантированной точностью; 4) метод нечётких множеств; 5) метод преобразования Хока. Все они естественным образом вкладываются в «множественную модель» неопределённости обоснованную и описанную ниже.

Предлагаемая работа посвящена обсуждению двух, как представляются автору, принципиальных, концепций: «математической структуры» и «неопределённости». Ниже приведены основные «математические структуры», а также изложена концепция «множественных моделей неопределённости», связывающая представление о неопределённости в поведении исследуемого объекта с экспериментом. Платформа «множественных моделей «неопределенности» позволяет с единых позиций рассматривать математические методы описания неопределенности, к которым отнесены отмеченные выше методы.

«Структура объекта» как «связь» и «взаимная зависимость» основных частей объекта

Термин «структура объекта» связано с представлением об объекте, как о чём-то целом, состоящим из связанных между собою частей. В таком контексте, термин «структура» является эквивалентом термина «связи» между частями объекта, рассматриваемого как единое целое. Такие связи могут реализовывать представление о последовательных этапах обработки информации, о структурных подразделениях предприятия и их взаимодействии об эволюции во времени или перемещении в пространстве т.д. И термин «структура» и термин «связь» используется интуитивно. В лучшем случае могут быть описаны типы связей: основные элементы и способ их взаимодействия, структурные элементы, последовательность обработки, информационные связи и т.д. Важным оказывается то, что математическое описание объекта, точнее того, что называют «структурой» объекта, выступает как средство описания «связей», существующих между структурными элементами исследуемого объекта.

«Структуры» в математике как множества плюс «связи» между элементами

После Георга Кантора: все объекты математического исследования – это конструкции, рассматриваемые в рамках «математических структур». «Математическая структура» реализует представление о математическом объекте как о совокупности элементов (множестве), между которыми существуют определённые «связи». Эти «связи» и описывают то, что называют «математической структурой». Собственно «математическая структура» – это множество плюс «связи». Однако, в отличие от предметной области, в математике под «связями» понимают вполне конкретные математические объекты. Такими математическими средствами описания «связей»: математическими средствами «структурирования», являются, собственно, следующие: 1) отношения; 2) функции; 3) операции; 4) предельный переход; 5) измеримое пространства; 6) комбинации первых пяти.

Средства «математического структурирования», «связи»: отношения

Понятие отношения, в общем, и отношения на множестве в частности относится к базовым математическим понятиям. Примером бинарного отношения на множестве действительных чисел является отношение частичного порядка, задаваемого стандартным образом. Говоря об отношении частичного порядка в связи с абстрактным множеством, имеют в виду бинарное отношение, являющееся симметричным, транзитивным и антисимметричным. Другим важными примером бинарных отношений, являются эквивалентности: рефлексивные, симметричные и транзитивные отношения на множестве. Заметим, что равенство как совпадение элементов множества, является эквивалентностью, называемой диагональным отношением. Равенство двух рациональных чисел является эквивалентностью, а не совпадением. Эквивалентностью является также одинаковость множеств по мощности.

Средства «математического структурирования», «связи»: функции

Функции являются частным случаем бинарных отношений из одного множества в другое. Среди множества возможных примеров, отметим такие функции, как «расстояние», «норма» и «скалярное произведение». Важным примером функций являются также операции.

Отметим также важный класс функций, имеющий принципиальное значение: это функции множества. Примерами таких функций являются «длина», «площадь», «объём». Собственно, функции множества – это функции, аргументами которых являются наборы элементов (подмножества) фиксированного множества. Таким подмножествами для «длины» являются, в частности, отрезки числовой прямой, а для «объёма» – тела в пространстве. Важным классом функций множества, представленным «длиной», «площадью», «объёмом», являются меры: неотрицательные, счётно аддитивные, нормированные функции множества. Счётная аддитивность означает, что функция суммирует свои значения на счётном объединении множеств, попарно не имеющих общих элементов, а нормированность – в частности, нулевое значение на пустом множестве.

Средства «математического структурирования», «связи»: операции

Говоря об операциях в математике, имеют в виду преобразование (функция) одного или нескольких элементов множества, результатом которого является элемент того же множества. Классическими примерами операций являются операции сложения или умножения над числами. Операция по компонентного сложения упорядоченных числовых наборов фиксированной длины (числовых кортежей) является ещё одним примером бинарной операции. Операция покомпонентного умножения упомянутых числовых кортежей на скаляр является примером унарной (одноместной) операции Удобно считать, что выделение одного, «уникального по свойствам» элемента множества, является нульарной (без объекта преобразования) операцией. Выделения нуля как действительного числа или выделение кортежа с нулевыми компонентами (то же относится к матрицам) являются примерами таких нульарных операций.

Средства «математического структурирования», «связи»: предельный переход

Возможность предельного перехода воплощает в себе тот тип связей элементов множества, который обозначается термином «топология» в его современном понимании. Множество с возможностями «предельного перехода» называют топологическим пространством. Наличие предельных точек является эквивалентным наличию совокупности тех подмножеств, которые рассматриваются как окрестности. Последнее в свою очередь эквивалентно заданию совокупности тех множеств, которые рассматриваются как «открытые» или, эквивалентным образом – как «замкнутые». Таким образом, абстрактное топологическое пространство (множество, для точек которого определена возможность предельного перехода) – это множество с набором выделенных подмножеств. Совокупность выделенных подмножеств, естественно, должна удовлетворять набору требований, которые отражают «существенные» свойства соответствующих типов подмножеств. Топология для абстрактных множеств охватывается теорией, которая называется «общей топологией». Замети также, что под топологией в первой половине XX столетия понимались изучение свойств объектов в трёхмерном пространстве при непрерывных деформациях.

Средства «математического структурирования», «связи»: измеримые пространства

Измеримые пространства представляют собой объекты, описывающие область определения функций множеств, являющихся мерами. Принимая во внимание аддитивность мер, естественным является включение в область определения вместе с теми попарно непересекающимися множествами, которые уже там находятся, и их объединений (точнее – объединений в счётном числе). Аналогичные соображения касаются и дополнения, а, значит и пересечения в счётном числе. Эти соображения приводят к тому, что в качестве области определения меры целесообразно рассматривать совокупность подмножеств, замкнутых относительно операций счётного объединения и пересечения, а также – относительно дополнения. Такие непустые совокупности подмножеств называются σ- алгебрами, поэтому измеримое пространство – это множество с выделенной σ- алгеброй подмножеств.

Замечание 1. Топология и измеримое пространство задаются одним и тем же способом: задание набора подмножеств. Эти наборы подмножеств имеют разные свойства, но используются для задания-описания математической структуры.

Структура полугруппы, структура группы

Говорят, что на множестве задана структура полугруппы, если на множестве задана бинарная операция, являющаяся ассоциативной и задан «нейтральный» (его обозначают через «0» или «1» в зависимости от обозначения самой бинарной операции: «+» или « $*$ ») элемент: элемент, не изменяющий при применении второго операнда бинарной операции. В некоторых определениях наличие «нейтрального» элемента исключается. Полугруппа (с нейтральным элементом) называется группой, если для каждого элемента существует противоположный (обратный): элемент, использование которого в бинарной операции в паре с исходным даёт выделенный элемент. Если операция коммутативна, группу называют афинной. Классическим примером афинной группы являются все числовые кортежи фиксированной длины с бинарной операцией покомпонентного сложения, обозначаемой «+». Выделенным элементом является набор из нулей, противоположным – набор с противоположными знаками компонент.

Заметим, что понятие абстрактной группы в смысле, определённом выше, было введено только в 1882 году, несмотря на то, что группы подстановок использовались Э. Галуа более чем за сто лет до этого.

Структура метрического пространства

Говоря о том, что на множестве задана структура метрического пространства, имеют в виду, что на нём определена скалярная функция двух аргументов, удовлетворяющая определенным условиям (неотрицательности, симметричности, невырожденности, неравенству треугольника). Метрическая структура порождает топологическую: по расстоянию можно определить предельный переход. Поэтому метрические пространства автоматически являются топологическими.

Математические структуры – комбинации

Классическими математическими структурами, задаваемыми комбинацией четырёх основных (топологии и измеримые пространства задаются одинаково) являются структуры линейного, евклидова, гильбертова, нормированного пространств. Задание структуры линейного пространства означает задание бинарной операции, задающей структуру афинной группы, и – множества одноместных операций: умножений на каждый из возможных скаляров. Операции должны быть согласованы между собой. Все элементы множества со структурой линейного пространства (все элементы линейного пространства) называют векторами. Если на линейном пространстве дополнительно задана скалярная функция двух аргументов, которая является симметричной, билинейной и невырожденной (нулевое значение на одинаковых аргументах принимается только на нулевом элементе), то говорят, что оно имеет или структуру евклидова (конечная размерность линейного пространства) или гильбертова (бесконечная размерность).

Обычно в связи со скалярным произведением рассматривают порождённую им норму и расстояние, порождённое нормой. Таким образом, евклидово пространство автоматически имеет и структуру метрического и структуру нормированного пространства, а, следовательно, имеет топологию.

Важным вариантом «комбинированных» структур являются алгебры и модели, введённые А.И.Мальцевым [Мальцев,1970]. Алгебра определяется как множество с тем или иным набором операций, а модель – как множество с фиксированным набором операций и отношений.

Неопределенность в виде случайности – теория вероятностей

Концепция множественных моделей неопределённости развивает подход к пониманию неопределенности, реализованный в таком классическом методе учёта неопределенности, как ТВиМС. Напомним, что в ТВиМС как прикладной дисциплине речь идёт об описании явлений, в которых результат наблюдения неоднозначно связан с условиями. Причём так, что в серии наблюдений частоты результатов проявляют тенденцию к группированию - сходимости к некоторым предельным значениям, не зависящим от серии. Эти предельные значения и называются вероятностями. В этом несложно убедиться, обратившись к работам таких уважаемых в своей области авторов (приведён далеко не полный список), как А.Н. Колмогоров, Б.В. Гнеденко, А.В. Скороход, И.И. Гихман&А.В.Скороход&М.Й.Ядренко, М. Лоев, де Гроот, Г. Крамер , А.Н. Ширяев, В.С.Королюк& Н.И. Портенко &А.Ф. Турбин, Ю.В. Прохоров & Ю.А. Розанов, И.Н. Коваленко & А.А. Филиппова, А.А. Боровков, Б.А.Севастьянов. Упомянутое выше априорное предположение о наличии предельных значений относительных частот, которое называют законом стойкости частот, является интерпретационным ограничением на использование ТВиМС. Если предположить, что явление не удовлетворяет такому ограничению, его нельзя изучать методами ТВиМС, то есть через предельные значения относительных частот появления результатов. Их просто не существует или они изменяются от серии наблюдений к серии.

Подводя итог, тому, что понимают под случайностью (неопределённостью в виде случайности) в ТВиМС отметим что она (случайность), связывается с экспериментом и что упомянутые выше авторы в соответствующих источниках специально подчеркивают и выделяют следующие важные отличительные черты того, что в ТВиМС понимают под экспериментом.

1. Наличие фиксированного комплекса условий, при котором наблюдается исследуемое явление. Указанный комплекс условий может воспроизводиться активно или пассивно.
2. Возможность многократного воспроизведения комплекса условий (массовость).
3. Возможность описания всех возможных результатов: того, что может появиться при воспроизведении фиксированного комплекса условий.
4. Случайность связывается с изменчивостью результатов от эксперимента к эксперименту: с непредсказуемостью результатов в каждом отдельном эксперименте, а также с выполнением предположения, которое выше названо законом стойкости частот.

Дальнейшее продвижение в понимании того, где искать истоки «неопределённости» – и не только в виде случайности – предполагает анализ принципиального для ТВиМС понятия эксперимента.

Наблюдение (эксперимент, опыт, наблюдение, испытание) – общенаучный контент

Анализ понятия «эксперимент» (опыт, наблюдение, испытание) в естественных науках и философии позволяет сделать вывод, что, в целом, оно совпадает с его толкованием в рамках ТВиМС. И в этом, общенаучном случае, принципиальными составляющими «эксперимента» являются:

- воссоздание условий наблюдения для явления, которое исследуется;
- фиксация результатов эксперимента: того, что появляется в результате воспроизведения условий эксперимента.

Воспроизведение условий может носить активный или пассивный характер. В первом случае говорят об «эксперименте», для характеризации второго – употребляют термин «наблюдении». Хотя – подчеркнём ещё раз – оба термина могут употребляться как эквивалентные.

«Множественные моделей неопределённости» - «эксперимент»

Определение 1. Экспериментом (опытом, наблюдением, испытанием) будем называть пару $s=(\kappa, y)$, которая понимается как воспроизведение условий наблюдения $\kappa \in K$ с целью фиксации результата $y : y \in Y_\kappa$

Отметим, что $Y_\kappa, \kappa \in K$ обозначает, вообще говоря, множество всех тех результатов, которые могут появиться при воспроизведении условий $\kappa \in K$, поскольку фиксация комплекса условий, вообще говоря, не гарантирует однозначного результата эксперимента.

Определение 2. Регистрацией результата эксперимента будем назвать фиксацию того, что определяет две составляющие проведённого эксперимента: условия κ и результат y – т.е. пару $s=(\kappa, y)$ «условие-результат». Соответственно, под регистрацией серии из N экспериментов (выборкой) будет пониматься последовательность пар

$$s_1,\dots,s_N = (\kappa_1, y_1),\dots,(\kappa_N, y_N). \quad (1)$$

Составляющие наблюдения: «расщепление» условий эксперимента

Необходимость учёта в одной серии экспериментов с разными условиями привела к структуризации условий κ: разбиении условий на две части. Одна из этих частей представляет собой часть, вообще говоря, меняющуюся от эксперимента к эксперименту в серии, вторая – представляет собой одинаковую для всей наблюдений серии, неизменяемую в серии часть условий. Такая структуризация обеспечивает контролируемое изменение условий наблюдения от одного эксперимента серии к другому. Это означает, что любой из возможных комплексов $\kappa \in K$ условий проведения эксперимента представляется парой $\kappa = (x, f)$, в которой $x \in X$ обозначает вариативную, изменяемую от эксперимента к эксперименту часть, а f – первоначально, неизменную, одинаковую для всех наблюдений серии часть комплексов условий наблюдения. Однако в последующем появились схемы проведений измерений в серии экспериментов, когда одновременно от эксперимента к эксперименту менялись обе части: и вариативная часть x, которая по определению описывала вариативную часть условий и часть f.

Определение 3. Экспериментом с управляемыми условиями (УпрУЭкс) будем называть такой, в котором условия представляются в виде $\kappa = (x, f)$, $x \in X$, $f \in \Im$, $K = X \times \Im$, x будем называть вариативной частью условий, f - функцией отклика, κ - полными условиями эксперимента.

Замечание 2. Однозначность в рамках УпрУЭкс: одноэлементность каждого из $Y_\kappa = Y_{(x,f)}, \kappa \in K$, называют моделью «вход-выход» системы с очевидным делением на то, что называют входом, выходом и функцией отклика системы, поскольку в этом случае очевидна функциональная зависимость результата от вариативной части условий: $y = f(x)$.

Регистрация наблюдений: определение 2 и научная практика

Следует отметить, в экспериментальной практике «регистрации результатов экспериментов», может пониматься в одном из следующих вариантов, включая и вариант определения 2;

$$\begin{cases} y_1,\dots,y_N \\ (x_1,y_1),\dots,(x_N,y_N) \\ (\kappa_1,y_1),\dots,(\kappa_N,y_N) \end{cases}. \tag{2}$$

Каждый из указанных вариантов может быть эквивалентен определению «регистрации эксперимента» в смысле определения 2. Так, фиксация $y_1,\dots,y_N$ эквивалентна фиксации $s_1,\dots,s_N$, если условия всех экспериментов одинаковы: $\kappa_i \equiv \kappa, i = \overline{1,N}$. Фиксация $(x_1,y_1),\dots,(x_N,y_N)$ и $s_1,\dots,s_N$ эквивалентны, если части $f_i, i = \overline{1,N}$ условий $\kappa_i = (x_i, f_i), i = \overline{1,N}$ одинаковы для всех экспериментов: $f_i \equiv f, i = \overline{1,N}$, как это имеет место в классических схемах измерений.

Множественные модели неопределённости (МнМоН)

Определение 4. В рамках введённых выше понятий множественными моделями неопределённости для исследуемого явления будем называть такое описание неопределённости, которое базируется на множественности значений Y, Y_x, Y_κ: того, что появляется или может появиться в результате серии экспериментов при понимании «регистрации эксперимента» соответственно вариантам из (2). В зависимости от того, как понимается регистрация эксперимента, множества Y, Y_x, Y_κ определяются соответственно как

$$Y = \bigcup_{i=1}^{N} \{y_i\} \qquad Y_x = \bigcup_{i: x_i = x} \{y_i\}, x \in \bigcup_{i=1}^{N} \{x_i\}, \qquad Y_\kappa = \bigcup_{i:\kappa_i=\kappa} \{y_i\}, \kappa \in \bigcup_{i=1}^{N} \{\kappa_i\} \tag{3}$$

Собственно, (3) фиксирует множественность значений того, что может появиться при фиксированном комплексе условий: с его фиксацией или без.

МнМоН: неопределённость в детерминированных наблюдениях

Детерминированность наблюдения является эквивалентной отсутствию неопределённости и отвечает однозначной связь «полные условия – результат», то есть одноэлементности $Y_\kappa, \forall \kappa \in K$:

$$\kappa \to y_\kappa, Y_\kappa = \{ y_\kappa \}, \kappa \in K \quad (4)$$

Заметим, однако, что, если в серии экспериментов условия изменчивы, а регистрация проводится в виде $y_1,...,y_N$ вместо $(x_1, y_1),...,(x_N, y_N)$ или $(\kappa_1, y_1),...,(\kappa_N, y_N)$, то возникает множественность (не одноэлементность) Y , которая, собственно, и является неопределённостью. Такая неопределённость в детерминированном эксперименте связана с проблемой скрытых параметров: дополнительных условий, которые нужно учитывать при регистрации эксперимента, чтобы явление стало детерминированным.

МнМоН: случайность

Случайность в исследуемом явлении с одной стороны характеризуется тем, что связь возможных результатов с полными условиями эксперимента в (3) неоднозначна: для каждого из фиксированных условий в разных экспериментах могут появляться разные результаты: $Y_\kappa \neq \text{"одноэлементное множество"}, \kappa \in \mathrm{K}$. Кроме того, как упоминалось выше, для неопределённости в виде случайности должен выполняться закон устойчивости частот.

В работе [Lindley ,2006] условия наблюдения предлагается связать с субъектом: с информацией, которой он обладает, а далее применять статистический подход. На этом пути предлагается определять неопределенность вообще.

МнМоН: гарантированные оценки (минимакс)

Этот подход связан с дальнейшей априорной структуризацией вариативной или функциональной части условий в рамках детерминированного описания явления: $x = (x^{(1)}, x_V^{(2)})$ или $f = (f^{(1)}, f^{(2)})$ и предположением о том, что в эксперименте фиксируется только одна из частей, например $x^{(1)}$ или $f^{(1)}$(наблюдаемая компонента), а про вторую – известно, что она принадлежит множеству $E_{x^{(1)}}$ или $E_{f^{(1)}}$ соответственно, которое определяется наблюдаемой компонентой.

МнМоН: интервальный подход

В модель наблюдений со структурированной вариативной частью очевидным образом вкладывается интервальная модель неопределённости. Действительно, достаточно предположить, что в обозначениях предыдущего пункта $y = f(x^{(1)}) + x^{(2)}, x^{(2)} \in (-\Delta_{x^{(1)}}, \Delta_{x^{(1)}}) = E_{x^{(1)}}$.

МнМоН: нечёткие множества

Место нечёткости [Zadeh, 1965] во множественных моделях неопределённости может быть определено в рамках статистической интерпретации нечетких множеств [Donchenko, 1998, a) b)]. Собственно, речь идёт о представлении функции принадлежности из классического определения нечёткости системой условных вероятностей одного и того же события по полной группе событий. В случае дискретного носителя это, собственно и является строгой формулировкой результата, а для континуального носителя формулировка результата, которая использует условное распределение, приведена ниже.

Теорема [Donchenko, 1998 a),b)]. Пусть для нечёткого множества, задаваемого парой (E,μ), E - пространство с мерой, а μ - измерима относительно естественных σ - алгебр функция. Тогда можно построить вероятностное пространство (Ω,B_{Ω},P), событие $A\in B_{\Omega}$, полную группу событий $H_e=\{\eta=e\}, e\in E$, $\eta-E$ - значная случайная величина, так, что $\mu(e)=P(A\,|\,H_e), e\in E$.

Заметим, что в работе [Donchenko, 2005] предложена и обоснована модификация классического определения нечёткости через введение в определение функции принадлежности объекта нечёткости, что даёт возможность корректно ставить и разрешать вопрос о наблюдении нечёткого множества

МнМоН: обратные задачи

Важным классом неопределённостей в детерминированных задачах являются обратные задачи, т.е. задачи в которых необходимо определить множество возможных вариативных частей условий (входов), которые обеспечивают заданное значение результата наблюдения (выхода). Математически обратные задачи – это задачи решения подходящих уравнений. Псевдообращение по Муру – Пенроузу позволяет в явном виде аналитически исчерпывающе исследовать обратную задачу в линейном случае: для системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $Ax=y, x\in R^n, y\in R^m$. Напомним, что псевдообращение по Муру – Пенроузу обозначается A^+ и применимо ко всем матрицам A произвольной размерности, при этом результат имеет размерность $n\times m$.

Теорема. Для того, чтобы СЛАУ имела непустое множество решений Ω_y необходимо и достаточно, чтобы $y^T(E_m-AA^+)y=0$.

В этом случае множество решений представляется в виде

$$\Omega_y=A^+y+(E_n-A^+A)R^n=\{x\in R^n : x=A^+y+(E_n-A^+A)z, z\in R^n\}$$

Отметим важную роль псевдообращения по Муру - Пенроузу, а также результатов [Кириченко, 1997] относительно теории возмущения псевдообращения для решения задач кластеризации и распознавания образов (см., например, [Кириченко, Донченко, 2007]).

МнМоН: преобразование Хока

Специальным случаем неопределённости является преобразование Хока [Hough, 1962]. Этот вид неопределенности порождён множественностью возможных вариантов функций отклика в наблюдениях: $\kappa_i=(x_i,f_i), i=\overline{1,N}$. Простейшей моделью наблюдений такого рода может служить бинаризованное изображение, на котором представлено несколько прямых. Выборка представляет собой координаты точек изображения с единичным значением яркости. Детальнее с ПХ и его математической формализацией можно познакомиться в [Donchenko, 2003].

Заключение

В работе проанализированы математические средства структурирования (описания связей между элементами) множеств. Отмечено, что именно в рамках математических структур производится моделирование реального объекта как предметно структурированного целого. Отмечено, что все математические структуры относятся, или к четырём основным типам, или являются их комбинацией. В работе также предложена и детально проанализирована концепция неопределённости, позволяющая с единых позиций рассмотреть все разнотипные математические средства, используемые для моделирования в условиях неопределённости. Для нечёткого подхода приведены результаты, позволяющие рассматривать этот подхода в рамках изложенной в работе единой концепции множественных моделей неопределённости.

Благодарности

Настоящая работа выполнена при поддержке интернационального проекта **ITHEA XXI** Института информационных теорий и их приложений FOI ITHEA и Консорциума FOI Bulgaria (www.ithea.org, www.foibg.com).

Литература

[Moore,1920] Moore E.H. On the reciprocal of the general algebraic matrix // Bulletin of the American Mathematical Society. – 26, 1920. – P.394 -395 .

[Penrose, 1955] Penrose R. A generalized inverse for matrices // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 51, 1955. – P.406-413.

[Алберт, 1977] Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия, рекуррентное оценивание. – М.: Наука. – 1977.– 305 с.

[Donchenko, 2003] Donchenko V.S. Hough Transform and Uncertainty// Proceedings X International Conference " Knowledge – Dialog – Solution". – June 16-23, 2003. – Varna (Bulgaria). – P.391-395.

[Donchenko, 2005] Donchenko V. Fuzzy sets: Abstraction axiom, Statistical Interpretation? Observations of Fuzzy Sets. //International Journal "Information Theories and Applications". – V.13, №3.– 2005.–p.233-239

[Донченко,1968,a)] Донченко В.С. Умовні розподіли та нечіткі множини // Вісник Київського університету. – 1998.–Вип. №3 – С. 175-179.

[Донченко,1968,b)] Донченко В.С. Імовірність та нечіткі множини .// Вісник Київського університету.

Серія фізико-математичні науки. – 1998. – Вип. №4. – С. 141-144

[Hough, 1962] Hough P.V.C. Method and Means for Recognizing Complex Patterns. - U.S. Patent 3069354. – December 1962.

[Lindley ,2006] Lindley D.V. Uncertainty. – John Wiley & Sons. – 2006. – 250 p.

[Кириченко, 1997] Кириченко Н.Ф. Аналитическое представление псевдообратных матриц //Киб. и СА.- №2. –1997.– С.98-122.

[Кириченко, Донченко, 2007] Кириченко Н.Ф., Донченко. В.С. Псевдообращение в задачах кластеризации// Киб. и СА.- №4, 2007– С.98-122.

[Мальцев,1970] Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М.: Наука.–1970. – 392 с.

[Zadeh, 1965] Zadeh, Lotfi. Fuzzy Sets// Information and Control. – June, 1965. – 8(3).–P. 338-353.

Информация об авторе

Владимир С. Донченко – *Профессор; Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики, Украина, e-mail: voldon@unicyb.kiev.ua*