Mathematical Foundation of Artificial Intelligence

ЛИНЕЙНЫЕ СТРУКТУРЫ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ И КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ИХ ОПИСАНИЯ

Николай Кириченко, Владимир Донченко

Аннотация: *Рассмотрены свойства основных линейных структур в евклидовых пространствах, развиты конструктивные способы их описания и построения на основе систематического развития и применения аппарата псевдообращения по Муру - Пенроузу. Важность приведённых результатов проиллюстрирована на широком спектре прикладных задач: от регрессионного анализа и задач прогноза до теории оптимального управления.*

***Ключевые слова**: Псевдообращение по Муру - Пенроузу, сингулярное представление матрицы, метод наименьших квадратов, линейная регрессия, системы оптимального управления, прогноз, кластеризация, искусственные нейронные сети.*

***ACM Classification Keywords**: G.3 Probability and statistics, G.1.6. Numerical analysis: Optimization; G.2.m. Discrete mathematics: miscellaneous.*

***Conference**: The paper is selected from XVth International Conference “Knowledge-Dialogue-Solution” KDS-2 2009, Kyiv, Ukraine, October, 2009.*

Вступление

Как отмечалось в работе [Донченко,2009], апелляция к «структуре объекта» ассоциируется с представлением об объекте, как чём-то едином, составленном из взаимодействующих между собою частей. Как правило, «структура» и «связи» между частями объекта, рассматриваемого как единое целое, употребляются как реализующие одно и тоже представление об объекте с тем дополнением, что «структура» – это совокупность частей объекта плюс «связи» между ними. Среди важнейших математических структур, отмеченных в упомянутой выше работе, особое место занимают «линейные структуры». К ним можно отнести линейные пространства и подпространства, гиперплоскости а также – линейные операторы и функционалы. Среди линейных структур по богатству возможностей использования связей занимает евклидово пространство: конечномерное линейное плюс скалярное произведение. Богатство свойств линейных структур: и в варианте линейных пространств и подпространств, и в варианте операторов соответствующего вида, – в математическом моделировании объектов трудно переоценить. Это касается как абстрактных математических, так и исследований прикладного характера. В полной мере сказанное выше относится, в частности, к алгебре, регрессионному анализу, теории случайных процессов, теории дифференциальных и интегральных уравнений, систем оптимального управления, прикладным задачам классификации, прогноза и т.д. Важную роль в прикладных исследованиях играют конструктивные методы описания соответствующих объектов. В том, что касается линейных операторов и линейных функционалов, вопрос конструктивности решается построением матриц соответствующих объектов, а для операций – использованием операций матричной алгебры. В том, что касается подпространств, порождённых теми или иными совокупностями векторов, дело обстоит сложнее. Их конструктивное описание можно получить, связав указанные объекты с пространством значений подходящей матрицы, которое в свою очередь описывают подходящим ортогональным проектором. Именно этот подход развивается ниже. Отметим, что ортогональные проекторы играют важную роль в исчерпывающем исследовании систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Принципиально важны они также в постановке и решении важных оптимизационных задач с квадратическим функционалом качества в евклидовых пространствах, в том числе – в построении наилучших квадратических приближений правой части СЛАУ значениями левой, когда СЛАУ несовместна. Такие наилучшие приближения называют также псевдорешениями. Конструктивное описание ортогональных проекторов в связи с естественными подпространствами линейного оператора прямо определяется псевдообращением по Муру - Пенроузу[Moore,1920], [Penrose, 1955](см. также, например, [Алберт, 1977]). Отметим, также, что важную роль в конструктивном решении прикладных задач с использованием линейных структур играет сингулярное представление (его называют также сингулярным разложением или SVD - представлением) матрицы в специфической записи в виде взвешенной суммы тензорных произведений специального набора пар векторов. Ниже рассматриваются основные свойства линейных структур, основные особенности и возможности (“tips and tricks”) их конструктивного описания, а также – использования в для конструктивного решения важнейших прикладных задач прогноза, кластеризации и классификации, в других областях.

Евклидовы пространства и подпространства: базовые “tips and tricks”

В дальнейшем, говоря об евклидовом пространстве будем иметь в виду множество конечных числовых последовательностей одной и той же длины n, записанных в столбик с покоординатными операциями сложения и умножения на скаляр и суммой покоординатных произведений в качестве скалярного произведения. Стандартным образом, Именно такой вариант евклидового пространства будем стандартным образом обозначать через R^n, а его элементы – через $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Стандартные ортонормированные базисы, составленные из векторов с единственной единичной компонентой (остальные – нули) на месте с соответствующим номером будут обозначаться для R^m и R^n соответственно через $e(j) \in R^m, j = \overline{1,m}, e_{(i)} \in R^n, i = \overline{i,n}$. Оператор A из R^n, в R^m: $A : R^n \to R^m$, в ортонормированных базисах $e(j) \in R^m, j = \overline{1,m}, e_{(i)} \in R^n, i = \overline{i,n}$ будем отождествлять с $m \times n$ - матрицей $A = (a_{ij})$ этого оператора. Для матрицы $A = (a_{ij})$ будем использовать также блочное представление по столбцам (столбцовое) и строкам(строчное):

$$A = \begin{pmatrix} a_{(1)}^T \\ \cdots \\ a_{(m)}^T \end{pmatrix} = (a(1) \vdots \ldots \vdots a(n)), a_{(i)}^T \in R^n, i = \overline{1,m}, a(j) \in R^m, j = \overline{1,n}.$$

Линейное пространство всех $m \times n$ матриц будем обозначать $R^{m \times n}$.

Линейное подпространство, порождённое системой векторов $c_k \in R^p, k = \overline{1, K}$ будет обозначаться через $L(c_k, k = \overline{1, K}) \equiv L(c_1 \ldots, c_K)$, а линейное подпространство значений линейного оператора $A : R^n \to R^m$ – через L_A.

Первым из набора “tips and tricks”является утверждение о том, что

1. “tips and tricks”: $L_A = L(a(1), \ldots, a(n))$.

Таким образом, линейное подпространство, порождённое набором векторов, совпадает с подпространством значений матрицы, составленной из векторов набора, как из столбцов.

2. “tips and tricks”: для элементов столбцового и строчного представления матрицы $A \in R^{m \times n}$ справедливы соотношения

$$a(j) = Ae(j), j = \overline{1, n},$$

$$a_{(i)}^T = e_{(i)}^T A, i = \overline{1, m}.$$

3. “tips and tricks”: для произведения произвольных матриц B, C со столбовым и строчным представлением $B = (b(1) \vdots \ldots \vdots b(r)), b(j) \in R^m, j = \overline{1, r}, C = \begin{pmatrix} c_{(1)}^T \\ \cdots \\ c_{(r)}^T \end{pmatrix}, c_{(r)}, c(i) \in R^n, i = \overline{1, r}$ соответственно и диагональной матрицы $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ справедливо соотношение

$$B \Lambda C = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i b(i) c_{(i)}^T.$$

Важной составляющей аппарата конструктивного описания и использования линейных структур является понятие ортогонального проектора, которое полностью отвечает стандартному геометрическому представлению об ортогональном проектировании. Общей, основой эффективного использования ортогональных проекторов является наличие двух эквивалентных определений таких проекторов и возможности их конструктивного построения в связи с линейными подпространствами через псевдообращение.

4. “tips and tricks” («геометрическое определение ортогонального проектора»): для разложения $R^p = L + L^\perp$ в прямую сумму ортогональных подпространств ортогональным проектором P_L на линейное подпространство $L \subseteq R^p$ называется оператор, определяемый соотношением $P_L x = P_L(x_L + x_{L^\perp}) = x_L$,

где

$$x = x_L + x_{L^\perp}, x_L \in L, x_{L^\perp} \in L^\perp \qquad (1)$$

– однозначное представление произвольного вектора $x \in R^p$ по двум составляющим ортогональной суммы. Очевидным образом оператор ортогонального проектирования является линейным оператором.

5. “tips and tricks”:разложение (1) произвольного вектора $x \in R^p$ в силу симметричности относительно ортогональных слагаемых определяет одновременно два ортогональных проектора: $P_L, P_{L^\perp}$ с очевидным соотношением

$P_L + P_{L^\perp} = E_p$,

где E_p – единичная матрица соответствующей размерности.

6. “tips and tricks”: для ортогонального проектора P_L на подпространство L оператор $Z_L \equiv E_p - P_L$ является ортогональным проектором на ортогональное дополнение $L^\perp$ к $L : Z_L \equiv E_p - P_L = P_{L^\perp}$.

7. “tips and tricks“(абстрактное определение ортогонального проектора): для того, чтобы линейный оператор $P : R^p \to R^p$, был оператором ортогонального проектирования необходимо и достаточно, чтобы он был идемпотентным симметричным оператором. Линейное пространство L_P, на которое совершается ортогональное проектирование в соответствии с «геометрическим определением» описывается одним из двух соотношений:

$$L_P = \{x : x = Pu, u \in R^p\} = \{x : x = Px, x \in R^p\}.$$

8. “tips and tricks“(сингулярное или SVD- представление произвольной $A \in R^{m\times n}$): для произвольной $A \in R^{m\times n}$ ранга $r \le \min(m,n)$ справедливо следующее представление матрицы в виде взвешенной суммы тензорных произведений

$$A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i v_i^T, \tag{2}$$

где:

- $\lambda_1^2 \ge \ldots \ge \lambda_r^2 > 0$ общий набор ненулевых собственных чисел матриц $AA^T, A^T A$.
- $u_i \in R^m, i = \overline{j,r}$ - ортонормированный набор собственных векторов матрицы AA^T, отвечающих ненулевым собственным
  числам: $AA^T u_i = \lambda_i^2, \lambda_i^2 > 0, i = \overline{1,r}, u_i^T u_j = \delta_{ij}, i \ne j$;
- $v_i \in R^n, i = \overline{j,r}$ - ортонормированный набор собственных векторов матрицы $A^T A$, отвечающих ненулевым собственным числам:
  $A^T A v_i = \lambda_i^2 v_i, \lambda_i^2 > 0,, i = \overline{1,r}, v_i^T v_j = \delta_{ij}, i \ne j$.

9. “tips and tricks“(определение псевдообращения через SVD - представление матрицы): для произвольной $A \in R^{m\times n}$ с SVD - представлением (2) псевдообратная к ней, A^+, определяется соотношением

$$A^+ = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{-1} v_i u_i^T : R^m \to R^n. \tag{3}$$

Псевдообращение в дальнейшем будет обозначаться аббревиатурой ПдО.

Заметим, что SVD - определение ПдО (соотношение (3)) позволяет легко установить, что ПдО коммутирует с транспонированием, а также ряд других полезных соотношений, в частности, что $A^T (A^T)^+ = A^+ A$.

10. “tips and tricks“: ортогональные проекторы на L_A, L_{A^T} определяется соотношением

$$AA^+ = \sum_{i=1}^{r} u_i u_i^T,$$

$$A^T(A^T)^+ = A^+A = \sum_{i=1}^{r} \upsilon_i \upsilon_i^T$$

11. “tips and tricks“:операторы $Z(A), Z(A^T)$, определяемые соотношениями

$$Z(A) = E_n - A^+A,$$

$$Z(A^T) = E_m - A^{T+}A^T = E_m - AA^+,$$

являются операторами ортогонального проектирования на $L_A^{\perp}$, $L_{A^T}^{\perp}$

Важность последних соотношений определяются тем, что $L_{A^T}^{\perp}$ является множеством нулей оператора A.

12. “tips and tricks“:подпространство $L_{A^T}^{\perp}$ является ядром $KerA$ (множеством нулей) оператора A:

$$L_{A^T}^{\perp} = KerA = Z(A)R^n.$$

13. “tips and tricks“: для совместности СЛАУ $Ax = y$ необходимо и достаточно, чтобы $y^T Z(A^T) y = 0$. В этом случае A^+y является наименьшим по норме решением. Оно ортогонально к $KerA$, а множество всех решений Ω_y описывается соотношением

$$\Omega_y = A^+y + Z(A)R^n = \{x : x = A^+y + Z(A)\upsilon, \upsilon \in R^n\}. \tag{4}$$

14. “tips and tricks“: если СЛАУ $Ax = y$ несовместна, т.е $y^T Z(A^T) y > 0$ множество, определяемое соотношением (4) описывает совокупность всей наилучших квадратических приближений правой части значениями левой:

$$\Omega_y = A^+y + Z(A)R^n = \underset{x \in R^n}{Arg \min} \,||\, Ax - y \,||^2. \tag{5}$$

Значение невязки для любого наилучшего квадратического приближения составляет $y^T Z(A^T) y$.

15. “tips and tricks“: для того, что матричное уравнение $AX = Y, A \in R^{m\times n} X \in R^{n\times N}, Y \in R^{m\times N}$ имело корни необходимо и достаточно, чтобы $trY^T Z(A^T) Y = 0$. В этом случае множество Ω_Y определяется соотношением

$$\Omega_Y = \{X : X = A^+Y + Z(A)V, V \in R^{n\times N}\}. \tag{6}$$

16. “tips and tricks“: для линейной зависимости вектора $d \in R^m$ от столбцов матрицы $A \in R^{m\times n}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$d^T Z(A^T) d = 0. \tag{7}$$

Ссылка на векторы--элементы блочного представления матрицы A нисколько не ограничивают возможности применения утверждения этого пункта для определения линейной зависимости того или иного вектора от фиксированного набора векторов. Для использования результата в общем случае необходимо и достаточно составить матрицу, в которой векторы набора являются столбцами, и дополнительно использовать п.1“tips and tricks“.

Отметим также, что условием линейной независимости строки $a^T, a \in R^n$ от строк матрицы $A \in R^{m\times n}$ является условие

$$a^T Z(A)a = 0. \tag{8}$$

17. “tips and tricks“(прямые формулы Гревиля): ПдО произвольной матрицы $A \in R^{m\times n}$, дополненной строкой $a^T \in R^n$, определяется элементами $P \in R^{n\times m}, q \in R^n$ блочного представления ПдО $\begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{a}^\mathrm{T} \end{pmatrix}^+ = (P \vdots q)$ расширенной матрицы:

$$q = \begin{cases} \dfrac{Z(A)a}{a^T Z(A)a}, a^T Z(A)a > 0(\textit{íåç .}) \\ \dfrac{R(A)a}{1 + a^T R(A)a}, a^T Z(A)a = 0(\textit{çàâ}) \end{cases}, \tag{9}$$

$$P = (E_{ð} - qa^T)A^+,$$

где $R(A) = A^+ A^{+T}$.

Первая строка в (9) отвечает случаю линейной независимости строки - расширения от строк матрицы A, второй – линейной зависимости.

С учётом коммутирования транспонирования с ПдО, прямые формулы Гревиля очевидным образом переписываются для варианта расширения матрицы столбцом.

18. “tips and tricks“(обратные формулы Гревиля): для блочного представления ПдО расширенной матрицы

$\begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{a}^\mathrm{T} \end{pmatrix}^+ = (P \vdots q)$ ПдО матрицы A определяется соотношениями

$$A^+ = \begin{cases} (E - \dfrac{qq^T}{||q||^2})P, a^T q = 1(\textit{íåçàâ.}) \\ (E + \dfrac{qa^T}{1 - a^T q})P, a^T q \neq 1(\textit{çàâ})) \end{cases}. \tag{10}$$

Условие в первой строке в соотношениях (10) отвечает линейной независимости строки, которая удаляется, а второй – зависимости от остальных строк матрицы A. Справедливость этих условий непосредственно вытекает из п.17 “tips and tricks“, и используется, когда дополнительно известна ПдО для расширенной матрицы.

19. “tips and tricks“: квадрат расстояния $\rho^2(a, L_A)$ вектора $a \in R^m$ от подпространства L_A определяется соотношением

$$\rho^2(a, L_A) = \min_{y\in R^m} ||a - y||^2 = a^T Z(A^T)a.$$

20. “tips and tricks“: квадрат расстояния $\rho^2(a, \Gamma(b, L_A))$ вектора $a \in R^m$ от гиперплоскости $\Gamma(b, L_A) = b + L_A$ определяется соотношением

$$\rho^2(a, \Gamma(b, L_A)) = \min_{y\in \Gamma(b,L_A)} ||a - y||^2 = (a-b)^T Z(A^T)(a-b).$$

Отметим, что привязка подпространств в пп.19, 20 к множеству значений оператора A не ограничивает сферу применимости результатов. С помощью п.1 ‘tips and tricks’ они очевидным образом распространяются на ситуацию, когда подпространство порождается заданной конечной совокупностью векторов.

Формулы аналитического возмущения ПдО описывают ПдО возмущённой матрицы, когда возмущение имеет вид аддитивной добавки $ab^T, a \in R^m, b \in R^n$. В работе [Кириченко,1997] исчерпывающим образом исследованы варианты представления $(A + ab^T)^+$, которые, как оказывается, определяются тем, являются ли линейно зависимыми компоненты возмущения: a, b^T от, соответственно, столбцов и строк матрицы A, а также сохранением или падением ранга возмущенной матрицей, когда одновременно a, b^T линейно зависимы в связи с матрицей A. И условия линейной независимости и условие падения ранга носят аналитический характер. В п.16 “tips and tricks” представлены условия линейной зависимости. Условие сохранения ранга представлено следующим пунктом.

21. “tips and tricks“:ранги матриц A и $A + ab^T$ одинаковы: $rank(A + ab^T) = rankA$, тогда и только тогда, когда $b^T A^+ a \neq -1$.Ранг возмущённой матрицы падает, когда $b^T A^+ a = -1$.

Принимая во внимание громоздкость соответствующих формулировок, ниже приведен один из вариантов утверждения о виде ПдО для возмущённой матрицы. С полным вариантом утверждения можна ознакомиться в уже упомянутой работе [Кириченко,1997].

22. “tips and tricks“(аналитические формулы возмущения ПдО матриц, фрагмент): если компоненты возмущения: a, b^T линейно не зависимы от, соответственно, столбцов и строк матрицы A, т.е. $a^T Z(A^T)a > 0, b^T Z(A)b > 0$, то

$$\left(A + ab^T\right)^+ = A^+ - \frac{A^+ a a^T Z\left(A^T\right)}{a^T Z\left(A^T\right)a} - \frac{Z(A)bb^T A^+}{b^T Z(A)b} + Z(A)ba^T Z\left(A^T\right)\frac{1 + b^T A^+ a}{a^T Z\left(A^T\right)a b^T Z(A)b}.$$

Применения “tips and tricks“- свойств ПдО: линейная регрессия, скалярные наблюдения

Применение ПдО в линейной регрессии определяется тем, что МНК – оценка $\hat{\beta}$ (оценка метода наименьших квадратов) неизвестного параметра $\beta \in R^p$ линейной регрессии $y = \sum_{j=0}^{p-1} \beta_j f_j(x) + \varepsilon$ на основе наблюдений $(x_i, y_i), x_i \in R^m, y_i \in R^1, i = \overline{1,n}$ определяется решением оптимизационной задачи

$$\hat{\beta} \in \mathop{Arg\min}_{\beta \in R^p} ||X\beta - Y||^2, \tag{11}$$

в которой X - матрица плана, а Y - вектор – столбец с компонентами $y_i \in R^1, i = \overline{1,n}$ – вектор наблюдений. В соответствии с соотношением (4) п.13 “tips and tricks“ общее решении задачи (11) определяется соотношением

$$\hat{\beta} = X^+ Y + Z(X)v, v \in R^p * \tag{12}$$

со свободным параметром $v \in R^p$.

Решение задачи МНК - оценивания в виде (12) полностью согласуется с классическим решением уравнения Гаусса – Маркова в виде

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y,$$

Поскольку в случае полного столбцового ранга матрицы плана $X^{+} = (X^T X)^{-1} X^T Y$ а $Z(X) = 0$. В этом случае классическом случае множество МНК – оценок в (12) является одно элементным.

Применения “tips and tricks“- свойств ПдО: задача терминального управления

Под задачей терминального управления для линейноЙ динамической системы с дискретным временем

$x(k+1) = A(k)x(k) + b(k)u(k),$

$x(0) = x_{(0)},$

где

$x(k) \in \mathrm{R}^{n},\ \mathrm{u(k)} \in \mathrm{R}^{1},\ A(k) \in \mathrm{R}^{n \times n},\quad b(k) \in \mathrm{R}^{n},\quad k = \overline{0,N}$, имеют в виду задачу выбора такого управления $u(k),\quad k = \overline{0,N}$, которое позволяет вывести фазовую траекторию в момент $N+1$ на уровень $\mathrm{x}_{(1)}$ или, если это невозможно, выбором того же управления минимизировать отклонение $\left\| x(N+1) - x_{(1)} \right\|^2$.

Принципиальным результатом для исследования задачи терминального управления является теорема редукции, позволяющая свести задачу терминального управления к СЛАУ.

Теорема (теорема редукции). Задача терминального управления является эквивалентной СЛАУ

$W(N+1)u = x_{(1)} - A(N-1)A(N-2)\ldots A(0)x_{(0)}$,

в которой вектор $u \in R^{N+1}$ – объединенный вектор управления, а матрица $W(N+1)$ является блочной:

$W(N+1) = \left(W(N+1,0) \vdots W(N+1),1) \vdots \ldots \vdots W(N+1,N)\right)$,

с блоками $W(N+1),k), k = \overline{0,N}$, определяемыми соотношениями

$W(N+1,k) = A(N)A(N-1)\ldots A(k+1)b(k), k = \overline{0,N-1},$

$W(N+1,N) = b(N).$

Теорема редукции позволяет исчерпывающим образом исследовать задачу терминального управления с помощью пп.13,14 “tips and tricks”.

Следует добавить, что аналогичным образом с помощью ПдО удаётся исчерпывающим образом исследовать задачу терминального наблюдения в том числе в случае ошибок и шумов(см., например, [Кириченко, Донченко, 2005])

Применения “tips and tricks“- свойств ПдО: кластеризация

ПдО расширяет возможности кластеризации, позволяя эффективно погружать классифицируемые объекты в подходящие подпространства или гиперплоскости. П.1 “tips and tricks” дает возможность связывать подпространство, порождённое набором векторов, с подходящей матрицей. Если объект связывается с гиперплоскостью, то её смещение – это, как правило, среднее по векторам порождающей совокупности, а подпространство – это подпространство значений матрицы, построенной из центрированных средним векторов порождающей совокупности, как из столбцов. Результаты пп..19, 20 “tips and tricks” обеспечивают возможность конструктивного вычисления расстояний от объектов(подпространств или гиперплоскостей), ассоциируемых с порождающей совокупностью. Применение стандартных рекуррентных последовательно уточняемых разбиений с расстояними соответствия из п.19 или п. 20 “tips and tricks” придаёт процедуре кластеризации необходимой завершённости. С подробностями можно ознакомиться, например в работах, например, [Кириченко, Донченко, 2007], [Кириченко, Донченко, 2008]).

Применения “tips and tricks“- свойств ПдО: RFT- функциональные сети

Искусственные нейронные сети являются стандартным технологическим инструментом исследования в задачах прогноза, классификации и кластеризации. В сущности, они представляют собой графическое изображения: графы суперпозиций, стандартизованных функциональных элементов. В этом смысле их с полным правом можно назвать функциональными сетями. Стандартизация функциональных элементов(нейронов) проявляется в том, что они реализуют скалярную функцию векторного аргумента как суперпозицию линейного функционала и скалярной функции скалярного аргумента:

$$y = F(w^T x), w, x \in R^m, F : R^1 \to R^1 .$$

Упомянутая стандартизация – унифицированность может проявляться и в выборе внешней функции: F, которая называется функцией инициализации нейрона. Она может быть фиксированной или принимать значения из конечного набора функций.

Заметим, что, как правило, фиксированной является и структура сети: количество стандартных функциональных элементов нейронов и способ их соединения: топология сети.

Возможности функциональных сетей можно значительно расширить, если 1) придать большую функциональную универсальность и обеспечить адаптивность в построении каждого из стандартизованных элементов; 2) обеспечить более гибкие возможности в соединении элементов: большую свободу в формировании топологии сети; 3) гарантировать адаптивное построение структуры всей сети в целом. Последнее может быть конструктивно реализовано в ходе выполнения последовательных шагов наращивания сети, имеющих рекуррентный характер.

Реализация такой программы для задачи прогноза - восстановления функции, представленной своими значениями $(x_i, y_i), x_i \in R^n, y_i \in R^m, i = \overline{1,n}$ состоит в построении стандартного функционального элемента(RFT - преобразователя) в виде

$$y = A_+ \Psi(Cx) , \qquad (13)$$

в котором матрица C – матрица предварительного преобразования вектора признаков x, Ψ – нелинейное покоординатное преобразование измененного вектора признаков, A_+ - матрица МНК оценивания на выборке $(x_i, y_i), x_i \in R^n, y_i \in R^m, i = \overline{1,n}$.

Эффективность преобразователя (13) в прогнозе зависимости может контролироваться по невязке и по тестовой выборке.

В общем адаптивная процедура построения функциональной сети развивает идею МГУА А.Г.Ивахненко

Заключение

В работе проанализированы важные в прикладном отношении аспекты использования линейных структур в рамках евклидовых пространств в решении прикладных задач математического моделирования. В числе других рассмотрены конструктивные способы порождения подпространств и гиперплоскостей, а также ортогональных проекторов, связанных с указанными объектами. Упомянутая конструктивность обеспечивается применением псевдообращения по Муру – Пенроузу(ПдО), а также новыми результатами в этой области. Важность и эффективность использования приведённых результатов проиллюстрирована на широком спектре задач, включающем линейную регрессию, в том числе в векторную, теорию оптимального управления, кластеризацию, прогноз и функциональные сети, являющиеся обобщение искусственных нейронных сетей.

Благодарности

Работа опубликована при финансовой поддержке проекта **ITHEA XXI** Института информационных теорий и приложений FOI ITHEA Болгария www.ithea.org и Ассоциации создателей и пользователей интеллектуальных систем ADUIS Украина www.aduis.com.ua.

Литература

[Moore,1920] Moore E.H. On the reciprocal of the general algebraic matrix // Bulletin of the American Mathematical Society. – 26, 1920. – P.394 -395.

[Penrose, 1955] Penrose R. A generalized inverse for matrices // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 51, 1955. – P.406-413.

[Алберт, 1977] Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия, рекуррентное оценивание. – М.: Наука. – 1977.– 305 с.

[Донченко. 2009] Донченко В.С. Неопределённость и математические структуры в прикладных исследованиях/ Human aspects of Artificial Intelligence Inernational Book Series Information science & Computing.– Number 12.– Supplement to International Journal "Information technologies and Knowledge". –Volume 3.–2009.– P. 9-18.

[Кириченко, 1997] Кириченко Н.Ф. Аналитическое представление псевдообратных матриц //Киб. и СА.- №2. –1997.– С.98-122.

[Кириченко, Донченко, 2005] Кириченко М.Ф., Донченко В.С. Задача термінального спостереження динамічної системи: множинність розв'язків та оптимізація//Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2005. –№5– С.63-78.

[Кириченко, Донченко, 2007] Кириченко Н.Ф., Донченко. В.С. Псевдообращение в задачах кластеризации// Киб. и СА.- №4, 2007– С.98-122.

[Кириченко, Донченко, 2008] В.С Кириченко Н.Ф. Донченко В.С. Гиперплоскости в «множествах и расстояниях соответствия»: кластеризация / Artificial Intelligence and Decision Making.– International book series "Information Science&Computing", Number 7.–Supplement to the International Journal "Information Technologies and Knowledge" V.2/2008 FOI ITHEA, Sofia 2008.– P. 25-36.

Информация об авторах

Николай Ф. Кириченко – *Профессор Институт кибернетики НАН Украины;*

Владимир С. Донченко **–** *Профессор; Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики, Украина, e-mail: voldon@unicyb.kiev.ua*