

## ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЕКЦИЙ

Елена Ревунова, Дмитрий Рачковский

**Аннотация:** Приводятся результаты исследования разрабатываемого подхода к решению дискретной некорректной обратной задачи с использованием методов псевдообращения и случайных проекций. В известных обратных задачах Филлипса и Барта получена относительная ошибка восстановления сигнала не хуже, чем для методов регуляризации Тихонова.

**Ключевые слова:** обратная задача, устойчивое решение, случайные проекции, регуляризация Тихонова

**ACM Classification Keywords:** I.5.4 Signal processing, I.6 Simulation and Modeling, G.1.9 Integral Equations

**Conference:** The paper is selected from XV<sup>th</sup> International Conference "Knowledge-Dialogue-Solution" KDS-2 2009, Kyiv, Ukraine, October, 2009.

### Введение

Решение обратной задачи актуально для целого ряда приложений. К ним относятся интерпретация данных физических экспериментов в задачах исследования различных полей и сред, а также многие другие задачи. В практических приложениях требуется решать дискретную обратную задачу вида:

$$\Phi x = y, \quad (1)$$

где матрица  $\Phi \in \mathcal{R}^{N \times N}$  и вектор  $y \in \mathcal{R}^N$  известны и получены в результате оцифровки методом Галеркина уравнения Фредгольма первого рода [1, 2, 3, 4]; требуется оценить вектора сигнала  $x \in \mathcal{R}^N$ .

В случае, когда  $y$  содержит аддитивный шум,  $\Phi$  имеет высокое число обусловленности  $\|\Phi^{-1}\| \|\Phi\|$ , ряд сингулярных чисел  $\Phi$  плавно спадает к нулю, – задачу оценки  $x$  называют [1] дискретной некорректной обратной задачей. Такие свойства  $\Phi$  характерны для задач оптики, спектрометрии, электроразведки.

Решение дискретной некорректной обратной задачи как задачи наименьших квадратов

$$x' = \operatorname{argmin}_x \|y - \Phi x\|_2 \quad (2)$$

в виде решения минимальной нормы [5] на основе псевдообращения

$$x' = \Phi^+ y \quad (3)$$

является неустойчивым [1, 3]. Признаком неустойчивости является то, что малым изменениям вектора  $y$  соответствуют большие изменения решения  $x'$ ; при этом велико значение ошибки решения.

Для преодоления неустойчивости и, соответственно, повышения точности решения в условиях шума используют подход регуляризации [1, 2, 3, 4], состоящий в учете априорной информации – о том, что  $l_2$ -норма решения  $\|x\|_2$  мала [5]; либо что решение является разреженным [6], т.е.  $\|x\|_0$  мало; либо о точности аппроксимации [6].

При наличии априорной информации о малости  $l_2$ -нормы решения для получения устойчивого решения используют решение минимальной нормы (3) либо регуляризацию Тихонова [1]. В случае регуляризации Тихонова задачу формулируют следующим образом

$$x' = \operatorname{argmin}_x (\|y - \Phi x\|_2 + \lambda \|x\|_2), \quad (4)$$

где  $\lambda$  – параметр регуляризации.

Недостатком, присущим методам решения дискретных некорректных обратных задач на основе регуляризации Тихонова, является необходимость подбора  $\lambda$ -параметра регуляризации, от правильности которого в значительной мере зависит устойчивость решения. Методы подбора параметра регуляризации имеют высокую вычислительную сложность. Методы на основе псевдообращения не требуют подбора параметров, однако они не обеспечивают [1, 3] устойчивости и точности решения. Поэтому востребованными являются подходы к устойчивому решению дискретной некорректной обратной задачи на основе псевдообращения, но с точностью на уровне регуляризации Тихонова.

В данной работе приводятся результаты исследования разрабатываемого нами подхода к решению дискретной некорректной обратной задачи с использованием методов псевдообращения и случайных проекций на двух известных обратных задачах - Филиппа и Барта [7], [8].

### Решение дискретной некорректной обратной задачи

Нами предлагается подход к решению дискретной некорректной обратной задачи, использующий аналогию с современными работами в области Compressed Sensing ("сжатого зондирования") [9], [10], [11]. Здесь для высокоточного восстановления  $\mathbf{x}$  по  $\mathbf{R}\mathbf{x}$  в качестве проектора  $\mathbf{R}$  используют матрицу с элементами, сформированными реализациями случайной величины с нормальным законом распределения [11], [12]. Такого рода случайные проекционные матрицы с  $k < N$  используются также в теории [11], [13] и практике [14] вложений векторных пространств (vector space embeddings) для сокращения размерности векторов с целью ускорения оценки их сходства.

Для решения обратной задачи с использованием проекционного подхода умножим обе части исходного уравнения (1) на матрицу  $\mathbf{R} \in \mathcal{R}^{k \times N}$ ,  $k \leq N$ , элементы которой – реализации случайной величины с нормальным распределением, нулевым средним и единичной дисперсией. Число столбцов  $N$  матрицы  $\mathbf{R}$  фиксировано и определяется размерностью исходной матрицы  $\Phi$ : число строк  $k$  может выбираться произвольно. Получаем уравнение

$$\mathbf{R}\Phi\mathbf{x}=\mathbf{R}\mathbf{y}, \mathbf{R}\Phi=\mathbf{A}, \mathbf{A} \in \mathcal{R}^{k \times N}, \mathbf{R}\mathbf{y}=\mathbf{b}, \mathbf{b} \in \mathcal{R}^k. \quad (5)$$

Восстановление сигнала методом наименьших квадратов

$$\mathbf{x}'=\operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \|\mathbf{R}\mathbf{y}-\mathbf{R}\Phi\mathbf{x}\|_2. \quad (6)$$

Тогда восстановление сигнала  $\mathbf{x}$  на основе псевдообращения получим как

$$\mathbf{x}'=(\mathbf{R}\Phi)^+\mathbf{R}\mathbf{y}, \mathbf{x}'=(\mathbf{A})^+\mathbf{b}, \quad (7)$$

либо как

$$\mathbf{x}'=((\mathbf{R}\Phi)^T\mathbf{R}\Phi)^+(\mathbf{R}\Phi)^T\mathbf{R}\mathbf{y}, \mathbf{x}'=(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^+\mathbf{A}^T\mathbf{b}. \quad (8)$$

Восстановление сигнала методом регуляризации Тихонова получим как

$$\mathbf{x}'=\operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} (\|\mathbf{R}\mathbf{y}-\mathbf{R}\Phi\mathbf{x}\|_2+\lambda\|\mathbf{x}\|_2). \quad (9)$$

Точность решения обратной задачи будем оценивать с помощью относительной ошибки  $d$  восстановления истинного сигнала  $\mathbf{x}$ , вычисляемой как

$$d=\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|/\|\mathbf{x}\|=\|\Delta\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|, \quad (10)$$

где  $\Delta\mathbf{x}$  – ошибка решения,  $\mathbf{x}'$  – вектор восстановленного сигнала.

Экспериментально исследуем поведение зависимости относительной ошибки восстановления сигнала от уровня аддитивного собственного шума в векторе сигнала  $\mathbf{y}$  (1).

## Экспериментальное исследование

Исследовались примеры дискретных некорректных обратных задач Филипса и Барта [7], [8].

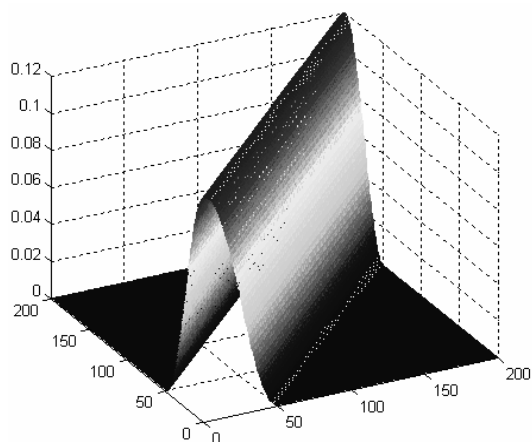


Рис. Матрица  $\Phi$  оцифровки ядра в задаче Филипса

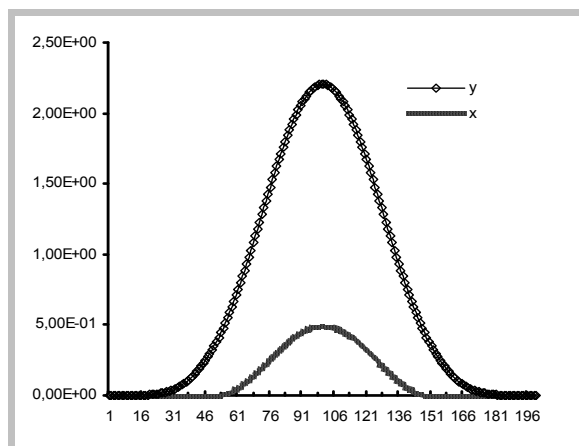


Рис. Дискретно заданные сигнал  $x$  правая часть  $y$  в задаче Филипса

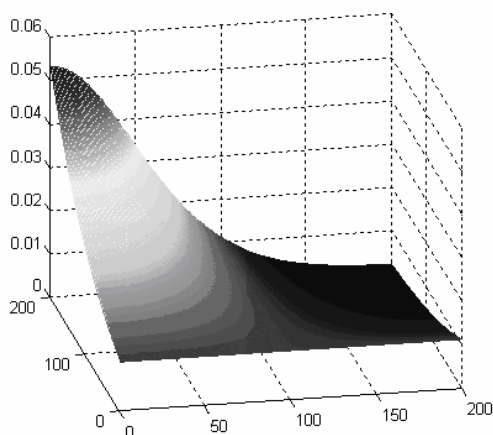


Рис. Матрица  $\Phi$  оцифровки ядра в задаче Барта

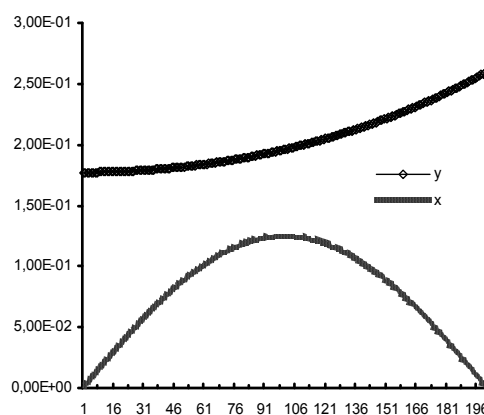


Рис. Дискретно заданные сигнал  $x$  и правая часть  $y$  в задаче Барта

В обеих задачах матрица  $\Phi$ , полученная при оцифровке ядра, имела размерность  $200 \times 200$ , высокое число обусловленности ( $\|\Phi^{-1}\| \|\Phi\| \gg 1$ ), и ряд сингулярных чисел, плавно спадающий к нулю. Вектор правой части уравнения (2) после оцифровки искажался аддитивным шумом  $\varepsilon$  с нормальным распределением. Исследовалось поведение зависимости относительной ошибки восстановления сигнала от уровня аддитивного собственного шума в сигнале  $y$ . Сравнивались зависимости  $d(\varepsilon)$  для методов на основе псевдообращения и регуляризации без применения проецирования с аналогичными зависимостями после применения проецирования. Размерность  $k$  для псевдообращения с проецированием выбиралась экспериментально по минимуму ошибки  $d$ .

**Тестовая задача Филипса.** Для задачи Филипса матрица  $\Phi$  получается из аналитически заданной функции ядра  $K(s,t) = \phi(s-t)$ ,  $\phi(x) = 1 + \cos(\pi x/3)$  при  $|x| < 3$ ,  $\phi(x) = 0$  при  $|x| \geq 3$ ,  $y$  из  $g(s) = (6 - |s|)(1 + 0.5 \cos(\pi s/3)) + 9/2 \pi \sin(\pi |s|/3)$  путем оцифровки по методу Галеркина [1].

Результаты зависимости относительной ошибки восстановления сигнала от уровня шума без умножения на матрицу-проектор ( $pinv1$ ,  $pinv2$ ,  $reg1$ ,  $reg2$ ,  $reg3$ ) и результаты для экспериментов с умножением на матрицу  $R$  ( $pinv1r$ ,  $pinv2r$ ,  $reg1r$ ,  $reg2r$ ,  $reg3r$ ) приведены на рис. 1 (расшифровка названий методов приведена далее).

Среди методов решения обратной задачи без проецирования наибольшую ошибку дают методы на основе псевдообращения матрицы  $\Phi$ . При уровне шума  $nl$   $1e-7$  относительная ошибка  $d$  (10) для  $pinv1$  составляет 0.36, а для  $pinv2$  – 0.14. При уровнях шума с  $1e-5$  и  $1e-6$  (для  $pinv1$  и  $pinv2$  соответственно) относительная ошибка  $d$  превышает 1.0, что свидетельствует о значительном искажении формы восстанавливаемого сигнала. Метод  $pinv2$  во всем исследованном диапазоне шума дает ошибку меньшую, чем  $pinv1$ .

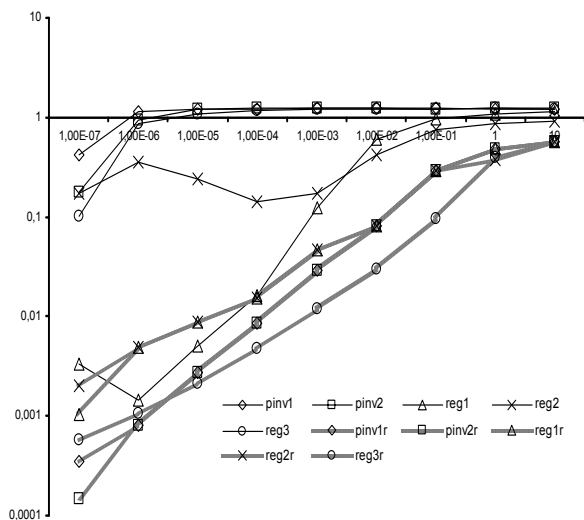


Рис. 1. Зависимость относительной ошибки от уровня шума

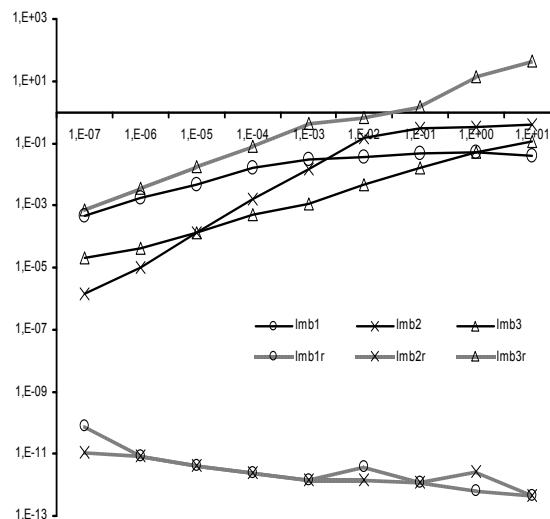


Рис. 2. Зависимость параметра регуляризации от уровня шума

Для регуляризации Тихонова с подбором параметра регуляризации по методу  $L$ -кривой  $reg2$  в диапазоне шума от  $1e-7$  до  $1e-3$  значение ошибки  $d$  изменяется в пределах от 0.14 до 0.35; при дальнейшем возрастании уровня шума ошибка  $d$  растет. Высокая относительная ошибка  $d$  этого метода связана с тем, что получаемые им значения параметра регуляризации  $\lambda$  не оптимальны.

Наименьшие значения ошибки  $d$  демонстрирует метод основе регуляризации Тихонова с подбором  $\lambda$  по методу кроссвалидации  $reg1$ . В диапазоне шумов  $1e-7$  –  $1e-3$  метод обеспечивает наименьшую ошибку среди всех исследованных нами методов регуляризации без проецирования. Низкие значения ошибки в указанном диапазоне шумов обеспечиваются благодаря удачному подбору параметра регуляризации.

Зависимость ошибки  $d$  от уровня шума, полученная методом регуляризации Тихонова с подбором  $\lambda$  по методу обобщенной невязки  $reg3$ , аналогична зависимости для методов на основе псевдоинверсии: при уровнях шума  $1e-7$ – $1e-6$  она составляет 0.1 – 0.86; а при уровнях шума выше  $1e-5$   $d > 1$ . Такое поведение относительной ошибки связано с тем, что выбор  $\lambda$  методом обобщенной невязки осуществляется неверно (рис.2). Видно, что значения параметра регуляризации  $lmb3$  для этого метода далеки от значений параметра регуляризации  $lmb1$ , полученных методом  $reg1$ , демонстрирующим лучшую точность.

Рассмотрим результаты методов решения обратной задачи с проецированием. При оптимальном  $k$  (в зависимости от шума  $k$  менялось от  $k=37$  при  $nl=1e-7$  до  $k=2$  при  $nl=1e1$ ) все они обеспечивают более устойчивое восстановление сигнала и более низкий уровень относительной ошибки, чем соответствующие методы без применения проецирования. Только для регуляризации с выбором  $\lambda$  по методу кросс-валидации ошибка после проецирования  $reg1r$  и при уровнях шума  $1e-6$ – $1e-4$  приближается к значениям ошибки до проецирования  $reg1$ . При дальнейшем нарастании уровня шума ошибка для  $reg1r$  становится намного меньшей, чем для  $reg1$ .

Среди методов регуляризации с проецированием  $reg1r$ ,  $reg2r$ ,  $reg3r$  наименьшую относительную ошибку  $d$  демонстрирует метод с выбором  $\lambda$  по обобщенной невязке  $reg3r$ . Как видно из рис. 2, только для  $reg3r$  параметр регуляризации  $lmb3r$  растет с ростом шума, в то время как для методов  $reg1r$ ,  $reg2r$  значения

параметра регуляризации  $lmb1r$ ,  $lmb2r$  имеют тенденцию к убыванию. Это свидетельствует о неправильном выборе параметра регуляризации для  $reg1r$ ,  $reg2r$ , так как известно [1], что его значение должно возрасти с ростом уровня шума.

Отметим, что после проецирования методы, основанные на псевдообращении матрицы, обеспечивают относительную ошибку не хуже, чем методы регуляризации. Учитывая меньшие вычислительные затраты методов  $pinv1r$ ,  $pinv2r$ , предпочтительно их использование.

**Тестовая задача Барта.** Для задачи Барта матрица  $\Phi$  получается из аналитически заданной функции ядра  $K(s,t) = \exp(s \cos t)$ ,  $y$  из  $g(s) = 2 \sin s / s$  путем оцифровки по методу Галеркина.

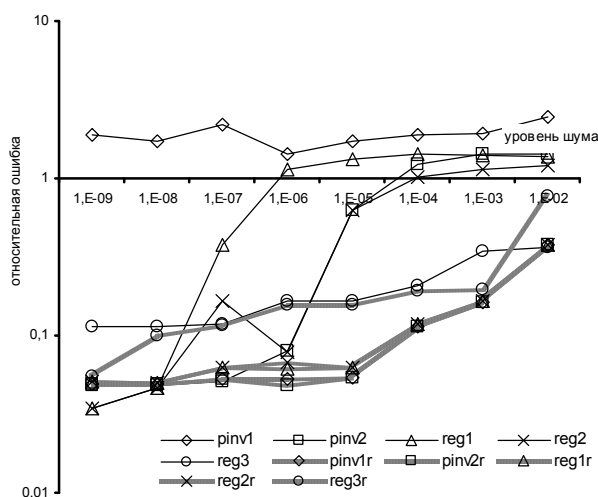


Рис. 3 Зависимость относительной ошибки восстановления сигнала  $d$  от уровня шума

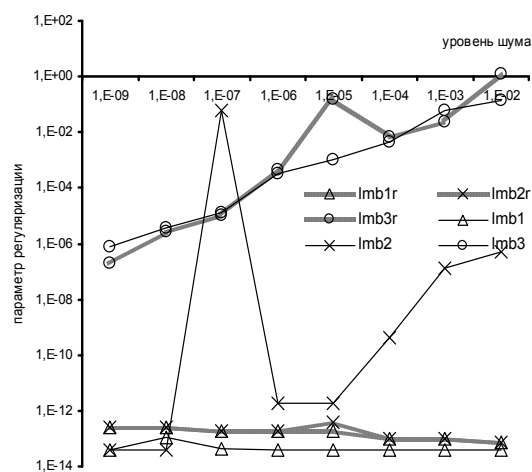


Рис. 4 Зависимость параметра регуляризации  $lmb$  от уровня шума

На рис.3 приведены экспериментально полученные зависимости относительной ошибки восстановления сигнала  $d$  от уровня шума без умножения на матрицу-проектор  $R$  для методов  $pinv1$ ,  $pinv2$ ,  $reg1$ ,  $reg2$ ,  $reg3$  и результаты для экспериментов с умножением на  $R$ :  $pinv1r$ ,  $pinv2r$ ,  $reg1r$ ,  $reg2r$ ,  $reg3r$ . В диапазоне собственных шумов  $1e-8, \dots, 1e-3$  относительная ошибка восстановления сигнала для методов с умножением на матрицу  $R$  меньше относительной ошибки для методов без умножения.

После проецирования, при оптимальном  $k$  (в зависимости от уровня шума,  $k$  менялось от  $k=7$  при  $n=1e-9$  до  $k=3$  при  $n=1e-2$ ) относительная ошибка восстановления сигнала  $d$  для методов на основе псевдообращения матрицы во всем исследованном диапазоне шумов становится меньше ошибки для методов регуляризации.

## Вывод

Для дискретных некорректных обратных задач Филипса и Барта, полученных в результате оцифровки по методу Галеркина ядра и правой части уравнения Фредгольма первого рода, при решении методами псевдообращения с использованием проецирования снижается относительная ошибка восстановления сигнала. При этом, при оптимальном  $k$ , точность результатов не хуже, чем для методов на основе регуляризации Тихонова без проецирования. Это делает использование методов на основе псевдообращения матрицы предпочтительным в силу их большей устойчивости (проявляющейся в плавном изменении относительной ошибки восстановления сигнала с ростом шума); точности восстановления сигнала  $x$ , сравнимой или лучшей, чем у методов регуляризации Тихонова; и меньших вычислительных затрат. Направлением дальнейших исследований являются экспериментальные и теоретические методы вычислительно эффективного априорного выбора оптимального  $k$ .

---

## Благодарности

---

Работа опубликована при финансовой поддержке проекта **ITHEA XXI** Института информационных теорий и приложений FOI ITHEA Болгария [www.ithea.org](http://www.ithea.org) и Ассоциации создателей и пользователей интеллектуальных систем ADUIS Украина [www.aduis.com.ua](http://www.aduis.com.ua).

---

## Литература

---

1. Hansen P.C. Rank-deficient and discrete ill-posed problems. Numerical Aspects of Linear Inversion. – SIAM, Philadelphia, 1998. – 247 p.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 285 с.
3. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1987. – 239 с.
4. Engl H.W., Hanke M., Neubauer A. Regularization of inverse problems. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000. – 321 p.
5. Demmel J.W. Applied Numerical Linear Algebra. – SIAM, Philadelphia, 1997. – 419 p.
6. Donoho D., Elad M., Temlyakov V. Stable Recovery of Sparse Overcomplete Representations in the Presence of Noise // IEEE Trans. Information Theory. – 2006. – №52. – P. 6-18.
7. Baart M.L. The use of auto-correlation for pseudo-rank determination in noisy ill-conditioned least-squared problems // IMA J.Numer.Anal. – 1982. – № 2. – P. 241-247.
8. Phillips D.L. A technique for the numerical solution of integral equation of the first kind // J.ACM. – 1962. – № 9. – P. 84-97.
9. Candès E.J. Compressive sampling // Proc. International Congress of Mathematics. – 2006. – №3. – P.1433-1452.
10. Candès E.J., Romberg J., Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements // Comm. Pure Appl. Math. – 2005. – № 59. – P. 1207-1223.
11. Baraniuk R., Davenport M., DeVore R., Wakin M. A Simple Proof of the Restricted Isometry Property for Random Matrices // Constructive Approximation. – 2008. – V.28, №3. – P. 253-263.
12. Rudelson M., Vershynin R. Sparse Reconstruction by Convex Relaxation: Fourier and Gaussian Measurements. CISS 2006 (40th Annual Conference on Information Sciences and Systems). – P. 207-212.
13. Johnson W.B., Lindenstrauss J. Extensions of Lipschitz mappings into a Hilbert space // Contemporary Mathematics. – 1984. – №26. – P.189-206.
14. Мисуно И.С., Рачковский Д.А., Слипченко С.В. Векторные и распределенные представления, отражающие меру семантической связи слов // Математичні машини і системи. – 2005. – № 3. – С. 50-67.

---

## Информация об авторах

---

**Елена Г. Ревунова** – научный сотрудник; Международный научно-учебный центр информационных технологий и систем НАН и МОН Украины, пр. Акад. Глушкова 40, Киев-03680, Украина; e-mail: [helab@i.com.ua](mailto:helab@i.com.ua)

**Дмитрий А. Рачковский** – ведущий научный сотрудник; Международный научно-учебный центр информационных технологий и систем НАН и МОН Украины, пр. Акад. Глушкова 40, Киев-03680, Украина; e-mail: [dar@infrm.kiev.ua](mailto:dar@infrm.kiev.ua)