МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ КРИТЕРИЕВ НА НЕЧЕТКОМ МНОЖЕСТВЕ АЛЬТЕРНАТИВ

Наталия Семенова, Людмила Колечкина, Алла Нагорная

Аннотация: *Рассматривается многокритериальная комбинаторная задача лексикографической оптимизации на нечетком множестве альтернатив с линейными критериями. Исследуются свойства области допустимых решений. Излагается один из возможных подходов к решению многокритериальной комбинаторной задачи с линейными целевыми функциями на нечетком множестве альтернатив.*

Ключевые слова: *многокритериальная оптимизация, дискретная оптимизация, нечеткое комбинаторное множество, комбинаторное множество перестановок, Парето-оптимальные решения, слабо, строго эффективные решения, нечеткое множество альтернатив, нечеткое мультимножество, функция принадлежности.*

ACM Classification Keywords: *G2.1 Combinatorics (F2.2), G1.6 Optimization*

Conference: *The paper is selected from XV^th International Conference "Knowledge-Dialogue-Solution" KDS-2 2009, Kyiv, Ukraine, October, 2009.*

Введение

При решении многих прикладных задач довольно часто исходная информация для описания математических моделей задана нечетко. Такие ситуации отображают недостаток информации для решения задачи, так как при нечетких условиях и критериях становится проблемным принятие решения. При моделировании реальных задач нечеткость проявляется в форме описания функций и параметров, от которых они зависят.

Нечеткие множества широко используются в различных применениях искусственного интеллекта, теории распознавания образов, принятия решений и др. Во многих практических задачах исследования операций, проектирования сложных систем, возникает необходимость принятия решения с учетом нескольких критериев оптимальности. В то же время достаточно распространенными на практике являются задачи многокритериального выбора, в которых задано конечное множество альтернатив и альтернативы могут оцениваться как количественно, так и качественно. Особенность многокритериальных задач, как способа моделирования, состоит в том, что в условиях многокритериальности выбор наиболее целесообразного решения осуществляется из множества несравнимых альтернатив. Проблема нахождения этого множества имеет большое практическое и теоретическое значение. Кроме того, в реальных задачах экономики мощность множества альтернатив очень велика, что делает проблему принятия решения достаточно сложной. В работе [2] была дана математическая формулировка и приведено аксиоматическое обоснование известного еще с XIX в. принципа Эджворта–Парето для случая четкого отношения предпочтения лица, принимающего решение. Этот принцип является основополагающим при выборе наилучших решений в экономике и технике в тех случаях, когда приходится учитывать сразу несколько целевых функций (критериев). Выяснилось, что он не универсален, а справедлив лишь при решении определенного (хотя и достаточно широкого) класса задач многокритериального выбора. За пределами этого класса его применение рискованно или же вообще недопустимо.

В настоящей работе принцип Эджворта-Парето распространяется на более широкий класс задач многокритериального выбора, в которых множество возможных решений является нечетким.

Различным аспектам теории задач векторной оптимизации посвящены работы многих ученых [1-6]. Как известно, задачи комбинаторной оптимизации, в том числе многокритериальные, могут быть сведены к задачам целочисленного программирования, однако это не всегда оправдано, потому что при этом теряется возможность учета комбинаторных свойств задачи [1], следовательно является целесообразной разработка новых подходов решения задач комбинаторного типа на основе исследования свойств области допустимых решений.

В настоящее время достаточно важны модели, учитывающие нечеткие параметры, как в целевых функциях, так и в ограничениях, заданных на комбинаторных множествах.

В данной статье рассматривается многокритериальная задача с линейными целевыми функциями, а также ее лексикографическая постановка, на нечетко заданной комбинаторной области допустимых решений. Исследованы свойства нечетко заданного комбинаторного множества перестановок, являющегося допустимой областью задачи. Предложен подход к решению изученной многокритериальной задачи.

1. Предварительные сведения. Основные понятия и определения

Нечеткие подмножества отличаются от обычных, или четких множеств тем, что в нечетком подмножестве степень принадлежности элемента множеству может быть любым числом единичного интервала $[0,1]$, а не только одним из двух значений элементов множества $\{0,1\}$, как в случае индикаторов обычных подмножеств. Это свойство нечетких подмножеств обеспечивает возможность теоретико–множественного представления реальных неточных понятий, в которых переход от непринадлежности к принадлежности происходит постепенно. Возможность формализации понятий такого типа оказалась очень полезной при разработке принципов искусственного интеллекта ЭВМ, моделирующих процессы мышления человека и др. Независимо от того, что использовать – нечеткие или четкие подмножества, определение степеней принадлежности опирается на некоторые субъективные критерии человека, принимающего решения. Однако если при определении четких подмножеств производится выбор одного из двух чисел – нуля или единицы, то для определения нечетких подмножеств возможности выбора степеней принадлежности намного разнообразнее. В ряде случаев определение подходящих значений степеней принадлежности элементов нечетких множеств приводит к значительным трудностям в работе с нечеткими понятиями.

В данной работе исследуется задача векторной оптимизации, заданная на комбинаторном множестве перестановок, следовательно, необходимо учесть то, что выпуклой оболочкой этого множества является общий перестановочный многогранник, множеством вершин которого есть рассматриваемое комбинаторное множество [6-8]. Изученные свойства комбинаторных множеств и их выпуклых оболочек дают возможность находить решение дискретной комбинаторной задачи как оптимизационной задачи на непрерывном допустимом множестве. На основании установленной взаимосвязи между многокритериальными задачами на комбинаторных множествах и оптимизационными задачами на непрерывном допустимом множестве, появляется возможность применять классические методы непрерывной оптимизации к решению векторных задач на различных комбинаторных множествах, а также развивать новые подходы их решения.

Определим, для дальнейшего изложения обобщение понятий n-выборки, мультимножества и комбинаторного множества перестановок на случай нечетко заданной информации.

Определение 1. Нечетким мультимножеством $\tilde{X}$, заданным на универсальном мультимножестве X, называется совокупность пар $\left(x,\mu_{\tilde{X}}(x)\right)$, где $x \in X$, а $\mu_{\tilde{X}}(x)$ – функция: $X \to [0,1]$, которая называется функцией принадлежности мультимножеству $\tilde{X}$.

Значение $\mu_{\tilde{X}}(x)$ для конкретного x называется степенью принадлежности этого элемента нечеткому мультимножеству $\tilde{X}$.

Согласно определению, обычные множества образуют подкласс нечетких множеств. Над нечеткими множествами, так же как и над обычными множествами, выполняется ряд операций, таких как объединение, пересечение, декартово произведение, разность и др. Эти же операции имеют место и для нечетких мультимножеств.

Пусть задано нечеткое мультимножество $\tilde{A} = \{a_1,\mu_{\tilde{A}}(a_1), a_2,\mu_{\tilde{A}}(a_2) ..., a_q,\mu_{\tilde{A}}\left(a_q\right)\}$, его основание $S(\tilde{A}) = \left\{\left(e_1,\mu_{\tilde{A}}(e_1)\right),\left(e_2,\mu_{\tilde{A}}(e_2)\right),...,\left(e_k,\mu_{\tilde{A}}(e_k)\right)\right\}$, где $e_j \in R^1$ $\forall j \in N_k = \{1,...,k\}$, кратность элементов $k(e_j) = r_j$, $j \in N_k$, $r_1 + r_2 + ... + r_k = q$,

$$\mu_{\tilde{A}}(e_i) = \min\left\{\mu_{\tilde{A}}\left(a_{i_j}\right)\middle| a_{i_j} = a_{i_t},\ j \neq t, \forall i, j, t \in N_q\right\}.$$

Упорядоченной нечеткой n-выборкой из нечеткого мультимножества A называется набор

$$a = \left(\left(a_{i_1},\mu_{\tilde{A}}\left(a_{i_1}\right)\right),\left(a_{i_2},\mu_{\tilde{A}}\left(a_{i_2}\right)\right),\ldots,\left(a_{i_n},\mu_{\tilde{A}}\left(a_{i_n}\right)\right)\right), \qquad (1)$$

где $a_{i_j} \in \tilde{A}$ $\forall i_j \in N_k$, $\forall j \in N_k$, $i_s \neq i_t$, если $s \neq t$ $\forall s \in N_k$, $\forall t \in N_k$.

Определение 2. Нечеткое подмножество $P(\tilde{A})$, элементами которого являются нечеткие n-выборки вида (1) из нечеткого мультимножества $\tilde{A}$, называется нечетким евклидовым комбинаторным множеством, если для произвольной пары его элементов $a = \left(\left(a_1,\mu_{\tilde{A}}(a_1)\right),\left(a_2,\mu_{\tilde{A}}(a_2)\right),...,\left(a_n,\mu_{\tilde{A}}(a_n)\right)\right)$ и $b = (b_1,\mu_{\tilde{A}}(b_1), b_2,\mu_{\tilde{A}}(b_2),...,b_n,\mu_{\tilde{A}}(b_n))$ выполняется условие: $a \neq b \Leftrightarrow \left(\exists j \in N_n : \left(a_j,\mu_{\tilde{A}}(a_j)\right) \neq, \left(b_j,\mu_{\tilde{A}}(b_j)\right)\right)$, то есть множество $P(\tilde{A})$ имеет такое свойство: два элемента множества $P(\tilde{A})$ отличны один от другого, если они независимо от других отличий различаются порядком размещения символов, которые их образовывают и степенью принадлежности нечеткому множеству $P(\tilde{A})$.

Дадим определение нечеткого множества перестановок.

Определение 3. Нечеткое множество перестановок с повторениями из n действительных чисел, среди которых k различных, назовем общим нечетким множеством перестановок т.е. множеством упорядоченных n-выборок вида (1) из нечеткого мультимножества $\tilde{A}$, если $n = q > k$, и обозначим $P_{nk}(\tilde{A})$. При равенстве $n = q = k$ получаем нечеткое множество перестановок без повторений.

Будем рассматривать элементы множества перестановок как точки арифметического евклидового пространства R^n.

Известно, что каждый элемент множества $P_{nk}(A)$ является упорядоченным набором *n* действительных чисел, из которых *k* различны. Не теряя общности, упорядочим элементы мультимножества A следующим образом:

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n. \tag{2}$$

Наряду с классическим перестановочным многогранником, введенным Радо [14], опишем общий перестановочный многогранник $\Pi_{nk}(A)$ [15, 16], являющийся выпуклой оболочкой общего множества перестановок $P_{nk}(A)$:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le \sum_{j=1}^{n} a_j, \ \sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j} \ge \sum_{j=1}^{i} a_j, \tag{3}$$

а $\alpha_j \in N_n, \ \alpha_j \ne \alpha_t, \ \forall j \ne t, \ \forall j, \ t \in N_i, \ \forall i \in N_n$, а $P_{nk}(A) = \operatorname{vert} \Pi_{nk}(A)$.

Определение 4. Выпуклой комбинацией нечетких множеств $A_1, A_2, \ldots A_n$ в R^n называется нечеткое множество A с функцией принадлежности вида

$$\mu_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i(x), \text{ где } \lambda_i \ge 0, \ i \in N_n, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Нечеткий выпуклый многогранник $\Pi_{nk}(A)$ также можно представить, как выпуклую комбинацию его вершин.

2.Постановка задачи

Обычно под задачей математического программирования понимают задачу отыскания экстремума некоторой целевой функции на допустимом множестве альтернатив. С помощью целевой функции формально представляется одно из основных свойств альтернатив: ценность, полезность, стоимость и др. Нечеткость в постановке задачи математического программирования может содержаться как в описании множества альтернатив, так и в описании целевой функции. Различные формы описания исходной информации обусловливают существование различных формулировок задач нечеткого математического программирования: а) задача достижения нечетко поставленной цели при нечетких ограничениях; б) задача нечеткого математического программирования при нечетком множестве допустимых альтернатив; в) нечеткий вариант стандартной задачи математического программирования со «смягчением» целевой функции и / или ограничений, где вместо задачи оптимизации решается задача удовлетворения цели и соответствующие неравенства для целевой функции и ограничений могут нарушаться; г) задача оптимизации с нечеткими коэффициентами и др.

В данной статье исследуемая задача состоит в максимизации векторной функции F на нечетком евклидовом комбинаторном множестве $\tilde{X}$.

Рассматривается многокритериальная задача комбинаторной оптимизации следующего вида: $Z(F, X): \max \left\{ F(x) \mid x \in \tilde{X} \subset R^n \right\}, \ F(x) = (f_1(x), \ldots, f_l(x)), \ f_i : R^n \to R, \ i \in N_l, \ \tilde{X} \ne \varnothing, \ \tilde{X} -$ нечеткое подмножество множества $X = \operatorname{vert} \Pi_{nk}(A) \cap D$, $\Pi_{nk}(A) = \operatorname{conv} P_{nk}(A)$, $P_{nk}(A)$ – комбинаторное множество перестановок, $D \subset R^n$ – выпуклый многогранник, нечеткое подмножество

$\tilde{X} = \{x, \mu_{\tilde{X}}(x)\}$, где $x \in X$, а $\mu_{\tilde{X}}(x): X \to [0,1]$ – функция принадлежности множеству X. $\tilde{X}$ будем называть нечетким множеством альтернатив.

Под максимизацией будем понимать выбор нечеткого подмножества R нечеткого множества $\tilde{X}$, которому отвечает наибольшее значение как векторной функции F, так и функции принадлежности $\mu_{\tilde{X}}(x)$ нечеткому множеству альтернатив. Эти альтернативы в задачах многокритериальной оптимизации в зависимости от способа их сравнения называются эффективными (оптимальными по Парето), слабо эффективными (по Слейтеру), строго эффективными (по Смейлу) и соответственно обозначаются: $P(F,X), Sl(F,X), Sm(F,X)$. Напомним [14], что альтернатива $x^* \in \tilde{X}$ называется эффективной, если не существует иной альтернативы $x \in \tilde{X}$ такой, что $F(x) \geq F(x^*)$, $\mu_D(x) \geq \mu_D(x^*)$ и хотя бы одно неравенство строгое; слабо эффективной, если $\exists x \in \tilde{X}$: $F(x) > F(x^*)$, и строго эффективной, если $\exists x \in \tilde{X}$: $x \neq x^*$, $F(x) \geq F(x^*)$.

Из определений следует, что $Sm(F,\tilde{X}) \subset P(F,\tilde{X}) \subset Sl(F,\tilde{X})$.

Исходную задачу $Z(F,X)$ представим в виде $(l+1)$ – критериальной задачи:

$$F(x) \to \max, \mu_{\tilde{X}}(x) \to \max, x \in X.$$

Под решением задачи с нечетким множеством альтернатив понимаем нечеткое множество с функцией принадлежности: $\mu(x) = \left\{\mu_{\tilde{X}}(x) \middle| x \in P(F,\tilde{X}); 0 \middle| x \notin P(F,\tilde{X})\right\}$.

Таким образом, нечеткое подмножество решений будет включать в себя те и только те альтернативы универсального множества X, которые дают значения векторной функции $F(x)$ и функции принадлежности $\mu_{\tilde{X}}(x), x \in X$, не улучшаемые одновременно.

Следует отметить, что нечеткий вариант этой задачи означает, что ограничения смягчаются, то есть допускается возможность их нарушения с той или иной степенью.

Пусть $P(\alpha)$ - множество всех эффективных альтернатив $(l+1)$ - критериальной задачи:

$y_i \to \max, i \in N_l$, $\mu_D(x) \to \max$, $F(x,y) \geq \alpha$, $x \in X$, $y = (y_1,...,y_l) \in Y$.

Тогда, решением векторной задачи нечеткой оптимизации с нечетким множеством альтернатив и со степенью недоминирующих альтернатив, не меньше α, называется нечеткое множество с функцией принадлежности вида:

$$\mu_\alpha(x) = \begin{cases} \mu_D(x), x \in P(\alpha), \\ 0, \qquad x \notin P(\alpha). \end{cases}$$

Таким образом, нечеткое множество решений исходной задачи будет включать в себя те и только те альтернативы со степенью недоминированности не меньше α, которые будут эффективными как по оценкам альтернатив $y_i, i \in N_l$, так и по функции принадлежности $\mu_D(x)$ нечеткому множеству альтернатив. Выбор некоторой конкретной из них альтернативы осуществляется с помощью методов многокритериальной оптимизации.

Более того, вместо задачи максимизации можно поставить задачу достижения некоторого наперед заданного значения функции цели, соответствующего удовлетворению исходной цели.

3.Подходы к решению задачи

Нередко на практике теория оптимизации применяется к неточным моделям, где нет никаких оснований задавать коэффициенты в виде точно определенных чисел. Такое искусственное сужение априорной информации может привести к искажению конечных результатов.

Разработка методов решения поставленной задачи $Z(F,X)$ в условиях нечеткой определенности предполагает знание и использование результатов операций нахождения суммы, произведения, минимума и максимума нечетких величин. При сравнении двух нечетких величин необходимо определение равенства этих величин.

Под нечетким числом здесь будем понимать нечеткое множество с областью определения в виде интервала действительной оси R^1. Множество всех нечетких чисел, определенных на R^1, обозначим через $\tilde{R}^1$. Пусть x и y - два нечетких числа с носителями $S_x = (a_1, a_2)$ и $S_y = (a_1, a_2)$ соответственно; $a_2 > a_1, b_2 > b_1$; $g : R^1 \times R^1 \to R^1$ - некоторая функция. Тогда согласно принципу обобщения нечеткое число $D = g(x, y)$ определяется функцией принадлежности

$$\mu_D(z) = \sup_{\substack{g(a,b)=z \\ a\in S_x,\quad b\in S_y}} \min\{\mu_x(a), \mu_y(b)\}. \tag{4}$$

Пусть $\otimes$ - одна из четырех арифметических операций: +, -, $\cdot$, /; $g(a,b) = a \otimes b$. Тогда формула (4) определяет результат арифметической операции $\otimes$ над нечеткими числами x и y. Если $g(\cdot)$ - функция не двух, а n аргументов, то принцип обобщения формулируется аналогично (4).

При сравнении двух нечетких величин необходимо определение равенства этих величин.

Определение 4. Две нечетких величины (два числа) $(x_1, \mu_1(x_1))$ и $(x_2, \mu_2(x_2))$ будем считать равными, если $x_1 = x_2$ и $\mu_1(x_1) = \mu_2(x_2)$.

Определение 5. Если выполняется условие $x_1 \geq x_2$, $\mu_1(x_1) \geq \mu_2(x_2)$ и одно из этих неравенств строгое, то нечеткая величина $(x_1, \mu_1(x_1))$ больше нечеткой величины $(x_2, \mu_2(x_2))$.

Разработан подход к решению задачи $Z(F,X)$, основанный на методе последовательных уступок. При решении многокритериальной задачи этим методом вначале производится качественный анализ относительной важности частных критериев. Особенностью данного метода есть то, что критерии задачи должны быть предварительно упорядочены по убыванию их важности, так что главным является критерий $f_1(x)$, менее важен $f_2(x)$, затем следуют остальные частные критерии $f_3(x), \ldots, f_l(x)$. Максимизируется первый по важности критерий $f_1(x)$ и определяется его наибольшее значение f_1^*. Затем назначается величина допустимого снижения (уступки) $\Delta_1 \geq 0$ критерия $f_1(x)$ и ищется наибольшее значение f_2^* второго критерия $f_2(x)$ при условии, что значение первого критерия должно быть не меньше, чем $f_1^* - \Delta_1$. Снова назначается величина уступки $\Delta_2 \geq 0$, но уже по второму критерию, которая вместе с первой используется при нахождении условного максимума третьего критерия, т.д. Наконец, максимизируется последний по важности критерий $f_l(x)$ при условии, что значение каждого критерия $f_r(x)$ из $l-1$ предыдущих должно быть не меньше соответствующей величины $f_r^* - \Delta_r$, получаемые в итоге стратегии считаются оптимальными.

Таким образом, выбор решения задачи осуществляется путем выполнения многошаговой процедуры и состоит в последовательном включении ограничений задачи $Z(F,X)$ и учете структурных особенностей его допустимой области. Оптимальным считается решение, являющееся решением последней задачи из следующей последовательности задач:

$$f_1^* = \max\left\{f_1(x)\middle| x\in X\right\},\ f_2^* = \max\left\{f_2(x)\middle| x\in X, f_1(x)\ge f_1^* - \Delta_1\right\},...,$$

$$f_l^* = \max\left\{f_l(x)\middle| x\in X, f_{r-1}(x)\ge f_{r-1}^* - \Delta_{r-1}, r\in N_l\right\}.$$

Следует отметить, что в случае, когда все Δ_r – нули, метод последовательных уступок выделяет только лексикографически оптимальные альтернативы; эти альтернативы доставляют наибольшее на множестве допустимых значений решение первому по важности критерию $f_1(x)$. Поэтому величины уступок, назначенные для многокритериальной задачи, можно рассматривать как своеобразную меру отклонения приоритета (степени относительной важности) частных критериев от жесткого, лексикографического.

Опишем применение этого метода для получения лексикографически оптимальных решений при нечетко заданном допустимом комбинаторном множестве перестановок.

Суть метода заключается в выделении сначала множества альтернатив с наилучшей оценкой по наиболее важному критерию. Если такая альтернатива одна, то она считается лучшей. Если их несколько, то из подмножества альтернатив, выделенного на предыдущем шаге, выделяются те альтернативы, которые имеют лучшую оценку по следующему критерию в ряду упорядочения их по важности и т.д.

Обозначим $f_{ij} = f_i(x_j)$ – нечеткие оценки альтернатив $x_j, j\in N_n$, по критериям $f_i,\ i\in N_l$.

Применение метода при нечеткой исходной информации сводится к следующим действиям:

1. Критерии упорядочить по важности: $f_1(x)$, $f_2(x)$,..., $f_l(x)$.

2. С согласия ЛПР назначить уровень $\alpha\in[0,1]$, для которого определяется множество лучших альтернатив в соответствии с пунктами 3 – 5:

3. Определить нижнюю (l) и верхнюю (u) границы $\alpha-$уровневых подмножеств для оценки альтернатив по рассматриваемому критерию: $l(f_{ij}) = \min\limits_{\mu_{f_{ij}}(x)\ge\alpha} x,\ u(f_{ij}) = \max\limits_{\mu_{f_{ij}}(x)\ge\alpha} x$.

4. Для каждой пары альтернатив $z, y\in\tilde{X}$ вычислить показатели взаимного превышения критериальных оценок $h_{zy}(z>y)$ и $h_{yz}(y>z)$:

а) если оценки таковы, что $f_{iy}^{\alpha}\subseteq f_{iz}^{\alpha}$, то

$$h_{zy} = \frac{u(f_{iz}) - u(f_{iy})}{u(f_{iz}) - l(f_{iz})},\ h_{yz} = \frac{l(f_{iy}) - l(f_{iz})}{u(f_{iz}) - l(f_{iz})}, \tag{5}$$

где $z, y\in\tilde{X}$;

б) если оценки не пересекаются и $\exists\ f_0^z\in S_{f_{iz}} : \forall f^y\in S_{f_{iy}}\quad f_0^z > f^y$, то

$$h_{zy} = 1 - \frac{u(f_{iy}) - l(f_{iz})}{\max\{r(z), r(y)\}},\ h_{yz} = 0, \tag{6}$$

где $r(z) = u(f_{iz}) - l(f_{iz})$, $r(y) = u(f_{iy}) - l(f_{iy})$;

в) если оценки не пересекаются и $\forall f^z \in S_{f_{iz}}, \forall f^y \in S_{f_{iy}} : f^z > f^y$, то

$$h_{zy} = 1, h_{yz} = 0. \quad (7)$$

5. Вычислить показатели μ_{ij}^D принадлежности j-й альтернативы множеству лучших (D-множеству) по i-му критерию альтернатив $\mu_{ij}^D = \sup\{0, (\max\limits_{\substack{y\in X \\ y\neq j}} h_{jy} - \max\limits_{\substack{y\in X \\ y\neq j}} h_{yj})\}$,

где h_{jy}, h_{yj} вычислены по формулам (5) – (6) для i-го критерия.

6. Если множество лучших по рассматриваемому критерию альтернатив содержит ровно одну альтернативу с $\mu_{ij}^D \geq \alpha$, то она считается лучшей. Если это множество содержит более чем одну альтернативу с $\mu_{ij}^D \geq \alpha$, то выбирается следующий по важности критерий и повторяются пункты 3 − 5. Если все критерии просмотрены и множество лучших по рассматриваемому критерию альтернатив содержит более одной альтернативы и $\alpha < 1$, то α можно увеличить и перейти к пункту 3. Если $\alpha = 1$, то окончательный выбор лучшей альтернативы предоставляется ЛПР.

Рассмотрим еще один простой метод решения задачи $Z(F, X)$, который является развитием метода идеальной точки на случай нечетко заданных альтернатив, при отсутствии информации о предпочтениях на множестве критериев.

Пусть заданы или вычислены нечеткие оценки $f_i(x_j)$ альтернатив $x_j, j \in N_n$, по критериям $f_i, i \in N_l$.

Рассмотрим метод выбора альтернатив по обобщенному критерию пессимизма (максимина). Он состоит в выполнении следующих шагов:

1. Для каждого критерия вычислить нечеткую максимальную критериальную оценку $f_{i\max} = \tilde{\max}\left\{f_i(x_j) \mid x_j \in X, j \in N_n\right\}, i \in N_l$, по каждому из критериев оценки.

2. Вычислить приведенные нормализованные оценки альтернатив по критериям $f_{ij}^* = f_i(x_j) / f_{i\max}, x_j \in X, j \in N_n$.

3. Вычислить минимальную критериальную оценку для каждой альтернативы $f_{j\min}$, определяемую как $f_{j\min} = \tilde{\min}\left\{f_{ij}^* \mid i \in N_l\right\}, j \in N_n$.

4. Определить обобщенный максимум найденных минимальных оценок $f_{0\max} = \tilde{\max}\left\{f_{j\min} \mid j \in N_n\right\}$.

5. Оценить степень сходства $f_{0\max}$ с каждой из оценок $f_{j\min}$. В качестве показателя сходства нечетких чисел может быть использована величина $\sigma_j = \sum\limits_{z\in[0,1]} \left|\mu_{f_{0\max}}(z) - \mu_{f_{j\min}}(z)\right|, j \in N_n$.

6. Выбираем альтернативу с максимальным индексом $\sigma_j, j \in N_n$.

Если альтернатива выбирается по максимаксному принципу, то на шаге 3 следует вместо $f_{j\min}$ вычислить $f_{j\max} = \tilde{\max}\left\{ f_{ij}^{*} \mid i \in N_l \right\}, j \in N_n$, и использовать в остальных шагах алгоритма вместо $f_{j\min}$ значения $f_{j\max}$.

Выводы

В данной работе в результате проведенного исследования векторной комбинаторной задачи, основанного на использовании информации о выпуклой оболочке допустимой области, изучении свойств многогранников, вершины которых определяют заданное комбинаторное множество перестановок, разработан и обоснован метод решения сложных многокритериальных задач на нечетко заданном комбинаторном множестве. Использование структурных свойств комбинаторных многогранников дает возможность разрабатывать эффективные алгоритмы решения новых классов векторных задач комбинаторной оптимизации.

Благодарности

Работа опубликована при финансовой поддержке проекта **ITHEA XXI** Института информационных теорий и приложений FOI ITHEA Болгария www.ithea.org и Ассоциации создателей и пользователей интеллектуальных систем ADUIS Украина www.aduis.com.ua.

Библиография

[1] Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – Киев: Наук. думка, 1988. – 472 с.

[2] Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. – Киев: – Наук. думка, 1981. – 287 с.

[3] Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. – К.: Наук. думка, 2003. – 264 с.

[4] Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. – Киев: Наук. думка, 1995. – 170 с.

[5] Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Семенова Н.В. О существовании решений в задачах векторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. – 2000. - № 6. – С. 39 – 46.

[6] Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І. Умови оптимальності та розв'язуваності в задачах лінійної векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною // Доповіді НАНУ. – 2003. – № 10. – С. 80–85.

[7] Лебедева Т.Т., Семенова Н.В Сергиенко Т.И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 4. – С. 90–100.

[8] Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок // Там же. – 2008. – № 3. – С. 158–172.

[9] Semenova N.V., Kolechkina L.M., Nagirna A.M. Vector combinatorial problems in a space of combinations with linear fractional functions of criteria // Inform. Theories and Appl. – 2008. – 15. – P. 240 – 245.

[10] Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Решение и исследование векторных задач комбинаторной оптимизации на множестве полиперестановок // Проблемы управления и информатики. – 2008. – № 6. – С. 26-41.

[11] Семенова Н. Векторные задачи на комбинаторном множестве полиразмещений: условия оптимальности и подход к решению // Inform. Theories and Knowledge.– 2008. – 2.– P. 187 – 195. (Intern. Book Series "Information science and computing", №7).

[12] Колечкина Л. Многокритериальные задачи на комбинаторном множестве полиразмещений: структурные свойства решений // Ibid. – 2008. – 2. – P. 180– 186.

[13] Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето–оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

[14] Rado R. An inequality. – J. London Math. Soc., 1952, 27.

[15] Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. – М.: Наука, 1981. – 344 с.

[16] Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – Киев: Наук. думка, 1986. – 265 с.

[17] Ємець О. О., Колєчкіна Л. М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями.– Київ: Наук. думка. – 2005. – 118 с.

[18] Семенова Н.В. Условия оптимальности в векторных задачах комбинаторной оптимизации // Теорія оптимальних рішень. – 2008. – № 7. – С. 153-160.

[19] Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М., Нагірна А.М. Розв'язання багатокритеріальних задач оптимізації на множині поліперестановок // Доповіді НАНУ. – 2009. – № 2. – С. 41– 48.

[20] Колечкина Л.Н. Оптимальные решения многокритериальных комбинаторных задач на размещениях // Теорія оптимальних рішень. – 2007. – № 6. – С. 67–73.

[21] Обработка нечеткой информации в системах принятия решений / А.Н. Борисов, А.В. Алексеев, Г.В. Меркурьева и др. – М.: Радио и связь, 1989. – 304с.

[22] Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / А.Н. Аверкин, И.З. Батыршин, А.Ф. Блишун и др. / Под ред. Д.А. Поспелова. – М.: Наука, 1986. – 312с.

[23] Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – М.: Наука, 1981. – 208с.

[24] Bellman R., Zade L.A. Decision-making in fuzzy environment. – Management Science, 1970, v.17, P. 141-162.

Информация об авторах

Наталия Владимировна Семенова *– Институт кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, 03680 МСП Киев 187, проспект академика Глушкова, 40, Украина; e-mail: nvsemenova@meta.ua*

Людмила Николаевна Колечкина *– Институт кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины, канд. физ.-мат. наук, доцент, докторант, 03680 МСП Киев 187, проспект академика Глушкова, 40, Украина; e-mail: ludapl@ukr.net*

Алла Николаевна Нагирна *– Институт кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины, аспирантка, 03680 МСП Киев 187, проспект академика Глушкова, 40, Украина; e-mail: vpn2006@rambler.ru*