ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ ОРГАНИЗАЦИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА БАЗИСНЫХ МАТРИЦ

Алексей Волошин, Всеволод Богаенко, Владимир Кудин

Аннотация. *Использование разных типов данных при проведении вычислений (чисел с плавающей запятой одинарной, двойной, повышенной точности) существенно влияет на основные критерии оценки эффективности: быстродействие, точность и объемы вычислений. В работе исследовано влияние использования разных вариантов организации вычислений на эффективность алгоритмов метода базисных матриц. Предложен вариант построения системы поддержки принятия решения для организации вычислений на линейных моделях для достижения заданных значений параметров по основным критериям: точности и быстродействию.*

Ключевые слова*: линейная модель, типы данных, базисная матрица.*

ACM Classification Keywords: *H.4.2 Information Systems Applications: Types of Systems: Decision Support*

Conference*: The paper is selected from XVth International Conference "Knowledge-Dialogue-Solution" KDS-2 2009, Kyiv, Ukraine, October, 2009.*

Введение

Известно, что большинство исследуемых физических процессов на определенном этапе моделирования описываются в классе линейных моделей, в частности, в виде системы плохо обусловленных линейных алгебраических уравнений(СЛАУ) с квадратной матрицей ограничений. Малые неточности представления подобных математических моделей могут существенно влиять на количественные и качественные характеристики получаемого решения при использовании конкретного метода (алгоритма) [Воеводин, 1979]. Такие неточности зачастую обусловлены ограниченностью длины мантиссы при представлении чисел с плавающей запятой. Важно отметить, что, несмотря на наличие ЭВМ, у которых операции округления реализованы самым лучшим образом, тем не менее, избежать ошибок округления и улучшить их известные теоретические оценки не удается [Воеводин, 1979]. Выбором конкретных типов данных с плавающей запятой, достигается различная эффективность по точности получаемого решения, быстродействию и объемам вычислений. Дополнительной возможностью для повышения эффективности вычислений является правильная организация использования регистровой, кэш-памяти, оперативной и внешней памяти [Деммель, 2001]. Известно, что скорость обменов между этими типами памяти зачастую намного выше скорости проведения вычислений и при плохой организации вычислений может "свести на нет" эффект от использования "быстрой" памяти. Все это обуславливает включение в контур принятия решения лица, принимающего решение (ЛПР), с целью правильной организации вычислительного процесса: указания механизма (процедуры) устранения неопределенностей при выборе приоритетов по критериям к решению и типам данных. Достигается это, например, использованием категории функций принадлежности [Орловский, 1981]. Такой подход усложняет исследования, но, в тоже время, открывает новые возможности для построения алгоритмов.

Постановка задачи

Предметом исследования является линейная модель – система линейных алгебраических уравнений вида:

$$Au = C, \tag{1}$$

где $A = \{a_{ij}\}_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,m}}}$ - квадратная матрица размерности $(m \times m)$,

$a_j = (a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jm}),\ j \in J = I = \{1, 2, .., m\}$, – строки матрицы A, $u = (u_1, u_2, ..., u_m)^T$ – вектор переменных, $C = (c_1, c_2, .., c_n)^T$ – вектор ограничений, $a_j u \le c_j,\ j \in J$, - полупространство, определенное гиперплоскостью $a_j u = c_j,\ j \in J$. Модель (1) исследуется в пространстве E^m.

Целью исследований является:

- экспериментальный анализ влияния использования различных типов данных, алгоритмов, уровня обусловленности системы при построении вычислительных схемы на основные параметры решения - точность решения и обращения матрицы, быстродействие;

- проверка эффективности вычислительных схем метода базисных матриц (МБМ) [Кудин, 2002] по указанным критериям на моделях заданной размерности;

- построение концепции принятия решения по достижению заданной эффективности вычислительного процесса;

Концепция анализа состоит из четырех стадий.

Первая стадия содержит анализ типовой модели заданной размерности на разрешимость (существование, единственность решений СЛАУ), исследование свойств модели на основе базисного метода и алгоритма.

Вторая – проведение расчетов на основе вычислительных алгоритмов (с выбором или без выбора главного элемента, без процедуры уточнения, с одно или двухстадийной процедурой уточнения в каждом из них), при разных сценариях объявления типов данных (с плавающей запятой размерностью 64, 128, 256 бит) и уровней плохой обусловленности (0-7). Фиксируются значения параметров быстродействия, точности решения и обращения матрицы, оценки количества используемой памяти.

Третья - построение функциональных зависимостей (интерполяционных многочленов) быстродействия, точности решения и обращения от типов объявлений переменных, уровня обусловленности системы.

Четвертая стадия построение на основе интерполяционных многочленов функций принадлежности с областью значений из интервала $[0,1]$. Формирование на основе функций принадлежности (при фиксированной размерности модели и уровня обусловленности) механизма выбора приемлемых значений параметров (алгоритма и типов данных) в вычислительной схеме для достижения желаемых значений основных критериев на найденном решении.

Основные положения метода базисных матриц (МБМ)

В предложенном МБМ введены в рассмотрение строчные базисные матрицы. Базисные матрицы последовательно изменяются замещением строк вспомогательной СЛАУ строками (нормалями ограничений) основной СЛАУ. В общем случае, в модели количество ограничений превышает количество переменных вида (1), в данном случае $m = n$ (для анализа вводится в рассмотрение вспомогательная СЛАУ с известными свойствами соответствующей размерности) [Кудин, 2002].

Определение. Квадратную матрицу $A_б$, составленную из m линейно независимых нормалей ограничений, будем называть базисной, а решение соответствующей ей системы уравнений $A_б u = c^0$ базисным. Две базисные матрицы, отличающиеся одной строкой, будем называть смежными.

Установлены формулы связи базисного решения, коэффициентов разложения нормалей ограничений и целевой функции, коэффициентов обратной матрицы, невязок ограничений и значений целевой функции при переходе к базисной матрице $\overline{A}_б$ (смежной), которая образуется из матрицы $A_б$ заменой ее строки a_k на a_l, которая не входит в базисную матрицу $A_б$ [Волошин, 2009]. При нахождении формул и основных соотношений между элементами метода при переходе от одной базисной матрицы к следующей считаем $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}$ нормалями ограничений, $a_j u^T \le c_j, j \in J_б$ $J_б = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ - индексами ограничений, нормали которых образуют строки базисной матрицы $A_б$ a_l - нормалью ограничения $a_l u \le c_l$, $\alpha_l = (\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, ..., \alpha_{lm})$ - коэффициентами разложения вектора a_l по строкам базисной матрицы $A_б$.

Теорема 1. Между элементами МБМ в смежных базисных матрицах имеют место соотношения:

$$\overline{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}},\ \overline{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},\ r = \overline{0,n};\ i = \overline{1,m};\ i \ne k; \tag{2}$$

$$\overline{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}},\ \overline{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},\quad r = \overline{1,m};\ i = \overline{1,m};\ i \ne k; \tag{3}$$

$$\overline{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{1k}}\Delta_l,\ j = \overline{1,m}, \tag{4}$$

$$\overline{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}},\ \overline{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l,\ r = \overline{1,n};\ r \ne k; \tag{5}$$

причем условием невырожденности является условие $\alpha_{lk} \ne 0$, допустимости опорного базисного решения - $\alpha_{lk} < 0$, роста значения целевой функции - $\alpha_{0k} < 0$. Здесь e_{ri} - элементы матрицы $A_б^{-1}$, обратной к $A_б$; $e_k = (A_б^{-1})_k$.- столбец обратной матрицы, $\Delta_r = a_r u_0^T - c_r$ - невязка r-го ограничения в вершине u_0.

Теорема 2. Если $\exists$ индекс k такой, что $\alpha_{0k} < 0$ и $\alpha_{rk} \ge 0$ для всех небазисных r, то целевая функция (4) задачи принимает неограниченные значения на множестве допустимых решений.

На основе (2)-(5) построена вычислительная схема метода базисных матриц.

Вычислительный эксперимент

Возможность применения различных типов данных на разных модификациях алгоритмов МБМ позволяет построить систему поддержки принятия решения, которая на основе заданных пользователем ограничений на такие параметры алгоритмов, как быстродействие и точность, позволит выбрать наилучший по этим критериям алгоритм. Выбор базируется на эвристических зависимостях параметров алгоритма и значений критериев от параметров матрицы ограничений СЛАУ: размерности и оценки числа обусловленности. Быстродействие алгоритмов зависит только от размерности матрицы n и некоторого параметра быстродействия системы для заданного типа данных и может быть оценена как

$$T^0(n) = \sum_{i=1}^{n} \left(2ni + n\right) t_c = (n^3 + 2n^2) t_c, \tag{6}$$

для алгоритма без выбора ведущего элемента, и

$$T^2(n) = (3n^3 + n^2) t_c, \tag{7}$$

для алгоритма с выбором ведущего элемента, где значение параметра t_c должно оцениваться для каждой конкретной аппаратно-программной платформы экспериментальным путем.

Для построения эвристических зависимостей между точностью решения, числом обусловленности и размерностью матрицы ограничений, была проведена серия вычислительных экспериментов.

Проводилось решение разными алгоритмами МБМ СЛАУ размерностью 256x256 с матрицей ограничений:

$$A = \begin{cases} a_i = (rnd(1.0), ..., rnd(1.0)),\ i = 0 \\ a_i = a_{i-1} + \dfrac{\alpha}{n}(rnd(1.0), ..., rnd(1.0)),\ i > 0, \end{cases}$$

где $\| a_i - a_j \|^2 < \alpha$, α - число, которое коррелирует с числом обусловленности системы. В качестве критериев точности брались точность обращения матрицы $\varepsilon_1 = \left\| I - A^{-1}A \right\|$ и точность машинного решения u_0 (1) в сравнении с аналитическим (точным) $u = (1, 0, ..., 0)$, $\varepsilon_2 = \left\| u_0 - (1, 0, ..., 0) \right\|$. Полученные экспериментальные данные приведены в табл. 1,2. Из них следует, что каждый из алгоритмов дает решения, приближенные к точному, только в определённом диапазоне значений коэффициента α . Когда же α выходить за пределы этого диапазона, СЛАУ становится неразрешимой с помощью алгоритма. В пределах диапазона применения, зависимость погрешности решения от α является линейной для всех рассматриваемых алгоритмов. Эти зависимости, построенные на основе данных из табл. 1,2, приведены в табл. 3, в которой используются следующие обозначения: double –числа с плавающей запятой двойной точности (64битной размерности), dd –числа с плавающей запятой размерности 128 бит, qd – числа с плавающей запятой размерности 256 бит, +1, +2 - количество итераций уточнения, $\log_{10} \alpha$ - уровни плохой обусловленности системы (0-7).

Таблица 1. Порядок точности обращения матрицы ($\log_{10} \varepsilon_1$)

$\log_{10} \alpha$	0	1	2	3	4	5	6	7
Алгоритм без выбора ведущего элемента								
Double	-15.30	-12.48	-10.31	-9.15	-5.47			
double+1	-18.95	-17.62	-15.87	-13.96	-8.12	-9.63	-6.44	
double+2	-16.84	-15.80	-15.79	-14.08	-5.86	-9.30	-5.95	
Dd	-46.26	-43.88	-41.67	-39.77	-39.57	-37.05		
dd+1	-51.36	-48.99	-48.01	-44.47	-43.88	-41.87	-39.02	
dd+2	-51.22	-49.99	-47.43	-45.22	-43.99	-41.83	-39.68	-38.17
Qd	-108.82	-110.08	-108.03	-102.56	-102.79			

qd+1	-116.80	-112.97	-113.53	-110.23	-109.95	-108.10	-105.26	
qd+2	-117.52	-116.17	-113.75	-111.40	-108.72	-105.66	-106.13	-103.19
Алгоритм с выбором ведущего элемента								
Double	-17.70	-16.82	-14.54	-13.07	-9.87	-8.95	-7.10	
double+1	-19.02	-17.63	-15.83	-13.92	-8.27	-9.57	-6.33	-5.31
double+2	-16.83	-15.77	-15.76	-14.06	-5.89	-9.37	-5.93	-3.22
dd	-49.96	-47.71	-46.16	-43.81	-43.16	-40.95	-38.16	-35.42
dd+1	-51.31	-48.97	-47.99	-44.48	-43.85	-41.86	-39.33	-38.69
dd+2	-51.21	-49.90	-47.41	-45.21	-44.03	-41.83	-39.70	-38.16
qd	-115.70	-113.03	-111.33	-109.47	-106.46	-104.84	-103.51	-100.48
qd+1	-117.04	-114.58	-113.83	-110.06	-109.04	-106.80	-105.47	-102.29
qd+2	-112.25	-114.94	-113.79	-111.73	-108.24	-105.84	-104.93	-103.90

Таблица 2. Порядок отклонения машинного решения от аналитического, $\log_{10}\varepsilon_2$

$\log_{10}\alpha$	0	1	2	3	4	5	6	7
Алгоритм без выбора ведущего элемента								
double	-12.87	-7.95	-3.95					
double+1	-13.84	-13.07	-6.55	-4.04				
double+2	-9.08	-7.72	-7.11	-3.38				
dd	-44.92	-40.09	-36.43	-29.96	-29.35	-25.62		
dd+1	-45.81	-44.34	-38.23	-34.12	-30.16	-26.51	-22.26	
dd+2	-45.25	-42.67	-38.96	-32.50	-31.81	-26.97	-23.13	-20.36
qd	-106.98	-105.95	-103.00	-95.91	-93.20			
qd+1	-111.25	-104.62	-103.19	-98.63	-96.29	-94.11	-89.22	
qd+2	-111.67	-109.49	-107.34	-99.94	-96.08	-87.79	-89.67	-84.60
Алгоритм с выбором ведущего элемента								
double	-15.81	-12.29	-8.89	-2.75				
double+1	-12.40	-10.55	-5.37	-2.70				
double+2	-10.85	-8.55	-6.75	-2.27				
dd	-46.16	-42.45	-39.07	-34.66	-32.50	-27.71	-22.33	-19.33
dd+1	-45.92	-43.43	-36.86	-31.96	-29.12	-26.33	-22.43	-17.85
dd+2	-44.41	-42.15	-36.89	-32.16	-31.15	-26.44	-21.90	-20.09
qd	-113.35	-107.94	-104.76	-100.43	-96.25	-93.69	-86.65	-85.01
qd+1	-109.58	-108.57	-103.25	-95.93	-93.22	-91.00	-87.99	-80.48
qd+2	-101.21	-106.73	-107.70	-100.30	-93.89	-87.59	-86.52	-85.47

Таблица 3. Коэффициенты линейных зависимостей погрешностей обращения и решения от α

	Погрешность обращения $\mathrm{E}_i(256,\alpha)=a_1\alpha+b_1$		Погрешность решения $\mathrm{E}_i(256,\alpha)=a_2\alpha+b_2$	
	a_1	b_1	a_2	b_2
Алгоритм без выбора ведущего элемента				
double	2.298301	-15.13695	4.460865	-12.71689
double+1	2.187973	-19.50594	3.594783	-14.76752

double+2	1.984797	-17.89935	1.772247	-9.482547
dd	1.739039	-45.71417	3.862877	-44.0509
dd+1	1.977781	-51.30349	4.085718	-46.74769
dd+2	1.916184	-51.39725	3.674145	-45.56692
qd	1.959164	-110.3728	3.759974	-108.5303
qd+1	1.712103	-116.1141	3.357264	-109.6857
qd+2	2.113576	-117.7165	4.179782	-112.9506
Алгоритм с выбором ведущего элемента				
double	1.865153	-18.17445	4.258355	-16.31943
double+1	2.105514	-19.35422	3.425782	-12.8938
double+2	2.044694	-18.01112	2.752232	-11.2342
dd	1.974183	-50.0744	3.864485	-46.55131
dd+1	1.852254	-51.04376	3.999826	-45.73785
dd+2	1.908559	-51.36158	3.617025	-44.55755
qd	2.102657	-115.4602	4.073971	-112.7673
qd+1	2.034889	-117.0114	4.119735	-110.671
qd+2	1.61611	-115.1076	3.309921	-107.7606

Учитывая полученные зависимости, алгоритм работы системы поддержки принятия решений можно описать следующим образом.

- **Входные данные:** t_m - максимально допустимое время расчётов; ε_m - максимально допустимая погрешность решения; P - приоритетность критериев (времени и погрешности).
- **Алгоритм:**

1) Построение множества алгоритмов, которые удовлетворяют условию относительно времени расчётов:

   $A_t = \{A_i : T_i(n) < t_m\}$, где $T_i(n)$ - время работы алгоритма A_i, которое оценивается по формуле (1) или (2).

2) Построение множества алгоритмов, которые удовлетворяют условию относительно погрешности:

   $A_\varepsilon = \{A_i : \mathrm{E}_i(n,\alpha) < \varepsilon_m\}$, где $\mathrm{E}_i(n,\alpha)$ - оценка погрешности обращения матрицы или решения СЛАУ для алгоритма A_i (из табл.3).

3) Если $A_t \cap A_\varepsilon \neq \varnothing$, в зависимости от приоритетности выбирается самый быстрый или самый точный алгоритм из $A_t \cap A_\varepsilon$.

4) В случае, когда $A_t \cap A_\varepsilon = \varnothing,\ A_t \neq \varnothing,\ A_\varepsilon \neq \varnothing$, в зависимости от приоритетности выбирается самый быстрый алгоритм из A_ε или самый точный алгоритм из A_t

5) Если $A_t = \varnothing$ или $A_\varepsilon = \varnothing$, в зависимости от приоритетности, выбирается самый быстрый или самый точный алгоритм из $A_t \cup A_\varepsilon$.

Выводы

Концепция принятия решения на основе МБМ имеет следующие свойства:

- Возможность находить решение квадратной системы уравнений за фиксированное время с заданной точностью;
- Возможность использовать решение исходной модели при анализе возмущенной модели;
- Возможность контролировать или направлено изменять величину ранга системы;
- Возможность проводить анализ свойств системы при изменении значений отдельных элементов и ее компонент.

Благодарности

Работа опубликована при финансовой поддержке проекта **ITHEA XXI** Института информационных теорий и приложений FOI ITHEA Болгария www.ithea.org и Ассоциации создателей и пользователей интеллектуальных систем ADUIS Украина www.aduis.com.ua.

Список литературы

[Воеводин, 1979] Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. Макроэкономика.-К.:Вища школа,- 2004. - 207с.

[Волошин, 2009] Кудин. В., Богаенко В., Волошин А. Анализ малых возмущений линейных экономико-математических моделей // Information Science & Computing, International Book Series, Number 10, Volume 3, ITHEA, SOFIA, 2009.- P. 67-73.

[Деммель, 2001] Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложение М.: Мир, -2001.-430с.

[Кудин, 2002] Кудин В.И. Застосування методу базисних матриць при дослідженні властивостей лінійної системи // Віісник Київського університету. Серія фіз.-мат. науки. - 2002. - 2. - С. 56-61.

[Орловский, 1981] Орловский С.А Принятие решений при нечёткой исходной информации.- М:, Наука, - 1981. - 206с.

Информация об авторах

***Алексей Ф. Волошин** – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики, Украина, д. т. н., профессор, E-mail: ovoloshin@unicyb.kiev.ua*

***Всеволод А. Богаенко** – Киев,. Институт кибернетики имени В.Г. Глушкова НАН Украины, Украина,, к. т. н., н. с., E-mail: sevab@ukrnet.ua*

***Владимир И. Кудин** – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики, Украина,, д. т. н., с. н. с., E-mail: V_I_Kudin@mail.ru*