ПОИСК ИНДИВИДУАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНЫХ РАВНОВЕСИЙ В УСЛОВИЯХ ЧАСТИЧНОЙ ИНФОРМИРОВАННОСТИ ИГРОКОВ

Сергей Мащенко

Аннотация: *Рассматривается понятие индивидуально- оптимального равновесия в некооперативных играх. Описаны методы параметризации множества этих равновесий. Предлагается процедура поиска индивидуально-оптимальных равновесий в условиях частичной информированности игроков.*

Ключевые слова*: некооперативные игры, равновесие по Нешу, оптимальность по Парето, индивидуально-оптимальное равновесие.*

ACM Classification Keywords*: H4.2 Decision support*

Conference*: The paper is selected from XVth International Conference "Knowledge-Dialogue-Solution" KDS-2 2009, Kyiv, Ukraine, October, 2009.*

Введение

Наиболее привлекательными концепциями оптимальности в условиях полной информированности игроков являются принципы оптимальности по Парето и по Нешу [1].

Концепция оптимальности по Парето основана на идее кооперативного поведения игроков, когда они коллективно выбирают свои стратегии и совместно учитывают функции выигрыша. Поэтому не существует ситуаций, которые будут для всех игроков одновременно лучше любой Парето-оптимальной. В случае, когда игроки выбирают основой для соглашения между собой концепцию Парето-оптимальности, у некоторых из них может возникнуть соблазн при выборе конкретной Парето-оптимальной ситуации изменить свою стратегию на другую, которая будет лучше для них. В этом случае такая ситуация будет нестабильной и их договоренность может быть разрушенной.

Концепция равновесий по Нешу основывается на идее некооперативного поведения игроков, когда они индивидуально выбирают свои стратегии и каждый учитывает лишь свою функцию выигрыша. Ситуация игры называется равновесием Неша, если от нее невыгодно отклоняться любому одному игроку (все другие игроки свои стратегии не изменяют), поскольку значение его функции выигрыша не улучшится (будет для него оптимальным). Если игроки заключают соглашение о своем будущем поведении и его основой является равновесие Неша, то оно будет стабильным. "Ценой" привлекательности равновесий Неша являются серьезные проблемы, которые связаны с их существованием, сложностью нахождения, проблемой выбора единственного равновесия [1].

В определенном смысле, эти принципы оптимальности представляют собой крайности в поведении игроков между коллективным и индивидуальным выбором стратегий и учетом функций выигрыша игроков.

Принцип индивидуальной оптимальности [2], предоставляет возможность каждому игроку выбирать свои стратегии индивидуально (некооперативно), но учитывать при этом интересы всех других игроков (компромисс ради разрешения конфликта). Этот принцип обоснован в, так называемых, одноцелевых играх, где у всех игроков цель – одна, но она характеризуется для каждого игрока своей функцией выигрыша. В идеале, эта цель заключается в выборе игроками своих стратегий так, чтобы сложилась наиболее предпочтительная ситуация для всех игроков. Поскольку такие ситуации могут не существовать, то игроки могут согласиться на компромисс ради общей цели.

Индивидуально-оптимальные равновесия

Рассмотрим одноцелевую игру G в нормальной форме $\left(X_i, u_i; i \in N\right)$, где $N = \{1,2,...n\}$ - множество из n игроков; X_i - множество стратегий i-го игрока; $u_i(x)$ - его функция выигрыша, которая определена на множестве ситуаций $X = \prod_{i \in N} X_i$ игры и принимает действительные значения. Каждый из игроков стремится получить по возможности большее значения своей функции выигрыша. Поскольку игроки имеют общую цель, они могут соглашаться на компромисс.

Принцип индивидуальной оптимальности основывается на специальном отношении NE-доминирования. Будем говорить, что ситуация y игры G находится в отношении сильного NE-доминирования игрока $i \in N$ к ситуации x ($y \overset{NE(i)}{\succ\succ} x$), если $y = (y_i, x_{N \setminus i})$, где вектор $x_{N\setminus i} = (x_j)_{j \in N \setminus \{i\}}$, и $u_j(y_i, x_{N\setminus i}) > u_j(x), \forall j \in N$.

Ситуация x* называется слабым индивидуально-оптимальным равновесием (множество этих равновесий обозначим через $WIOE$), если не существует такого игрока $i \in N$ и другой ситуации $y \in X$, которая бы сильно NE-доминировала x*, т. е. $\nexists i \in N, \nexists y \in X : y \overset{NE(i)}{\succ\succ} x$.

Применение слабых индивидуально-оптимальных равновесий мотивируется следующим сценарием одноцелевой игры. Игроки договариваются о необязательном соглашении придерживаться ситуации $x^* = (x_i^*)_{i \in N}$. Далее они независимо один от другого принимают решение о выборе своих стратегий. В том, и только том случае, когда основой соглашения будет слабое индивидуально-оптимальное равновесие x^*, изменение любым игроком $i \in N$, согласованной с другими игроками, стратегии x_i^* на другую, всегда приведет к ситуации, которая не будет доминировать x^* хотя бы для одного игрока (в том числе и его самого). Поэтому цель игрока $i \in N$, которая состоит из его личных интересов и интересов других игроков, которые он учитывает, может быть не удовлетворенной и достигнутый в ходе предыдущих переговоров компромисс может быть разрушенным.

Параметризация множества индивидуально-оптимальных равновесий

Свойства и условия индивидуальной оптимальной рассмотрены в [2]. В этой работе мы рассмотрим один подход к поиску индивидуально-оптимальных равновесий.

Будем считать, что функции выигрыша игроков ограничены на множестве X ситуаций игры G. Обозначим через $S = \sum_{i \in N} \sup_{x \in X} u_i(x) < \infty$ - верхнюю границу суммы функций выигрыша игроков. Введем векторы параметров $\mu_i = (\mu_i^j)_{j \in N}$, $i \in N$. Обозначим множества этих параметров через $M_i^{\geq 0} = \left\{ \mu_i = (\mu_i^j)_{j \in N} \middle| \sum_{j \in N} \mu_i^j = 1; \mu_i^j \geq 0, j \in N \right\}, i \in N$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если в игре G ситуация $x^* \in WIOE$, функции выигрыша игроков $u_i(x^*) > 0, i \in N$, то всегда существуют такие векторы параметров $\mu_i \in M_i^{\geq 0}$, $i \in N$, в частности с компонентами:

$$\overline{\mu}_i^j = u_j(x^*) / S + 1/n - \sum_{k \in N} u_k(x^*) / Sn, \ j \in N, i \in N, \qquad (1)$$

что выполняются следующие неравенства:

$$\min_{j\in N}(u_j(x_i,x^*_{N\setminus i})-S\mu_i^j)\le\min_{j\in N}(u_j(x^*)-S\mu_i^j)\,,\forall x_i\in X_i, i\in N\,. \qquad (2)$$

Любое решение x^* системы неравенств (2) при заданных $\mu_i\in M_i^{\ge 0}$, $i\in N$, является слабым индивидуально-оптимальным равновесием.

Доказательство. Пусть ситуация x^* удовлетворяет неравенствам (2). Отсюда следует, что для $\forall i\in N$ и $\forall x_i\in X_i$ имеют место неравенства: $\min_{j\in N}(u_j(x_i,x^*_{N\setminus i})-S\mu_i^j)\le\min_{j\in N}(u_j(x^*)-S\mu_i^j)\le u_k(x^*)-S\mu_i^k$, $\forall k\in N$, поэтому для $\forall i\in N$, $\forall x_i\in X_i$ существует $j\in N$ такое, что $u_j(x_i,x^*_{N\setminus i})\le u_j(x^*)$. Следовательно из определения *NE*-доминирования игрока $i\in N$ следует, что $\nexists x=(x_i,x^*_{N\setminus i})\in X: x\overset{NE}{\succ\succ}x^*$. Отсюда получим, что $x^*\in WIOE$.

Возьмем векторы $\overline{\mu}_i=(\overline{\mu}_i^j)_{j\in N}$, $i\in N$, с компонентами (1). Несложно убедиться, что $\overline{\mu}_i\in M_i^{\ge 0}$ для $\forall i\in N$. Из того, что x^* - слабое индивидуально-оптимальное равновесие следует, что $\nexists x\in X: x\overset{NE}{\succ\succ}x^*$, т. е. для $\forall i\in N$, $\forall x_i\in X_i$, $\exists j\in N$, что $u_j(x_i,x^*_{N\setminus i})\le u_j(x^*)$, а значит $u_j(x_i,x^*_{N\setminus i})-S\overline{\mu}_i^j\le u_j(x^*)-S\overline{\mu}_i^j$.

Поскольку для $\forall i\in N$ значения $u_j(x^*)-S\overline{\mu}_i^j=-\left(S-\sum_{k\in N}u_k(x^*)\right)\Big/n$ для $\forall j\in N$, то для $\forall x_i\in X_i$ получим $\min_{j\in N}(u_j(x_i,x^*_{N\setminus i})-S\overline{\mu}_i^j)\le-\left(S-\sum_{k\in N}u_k(x^*)\right)\Big/n=\min_{j\in N}(u_j(x^*)-S\overline{\mu}_i^j)$. Поэтому ситуация x^* удовлетворяет неравенствам (2). Теорема доказана.

Следует отметить, что параметры $\mu_i\in M_i^{\ge 0}$ позволяют игроку $i\in N$ выразить свое предпочтение на множестве функций выигрыша $u_j(x), j\in N$, всех игроков. Так, например, если он считает, что для него более важны интересы игрока $j_1\in N$, чем игрока $j_2\in N$, то согласно теореме 1 ему следует выбрать $\mu_i^{j_1}>\mu_i^{j_2}$. Варьируя параметры $\mu_i\in M_i^{\ge 0}$, $i\in N$, можно находить те или другие индивидуально-оптимальные равновесия, решая неравенства (2). С другой стороны, каждое индивидуально-оптимальное равновесие характеризуется некоторым множеством параметров $\mu_i\in M_i^{\ge 0}$, $i\in N$, и, соответственно, предпочтением на множестве функций выигрыша всех игроков.

Следует также отметить, что параметрам μ_i^j, которые фигурируют в неравенствах (2), можно придать определенное игровое содержание. Пусть x^* - слабое индивидуально-оптимальное равновесие игры *G*. Тогда согласно теореме 1 оно будет решением системы неравенств (2), по крайней мере при $\overline{\mu}_i^j=u_j(x^*)/S+1/n-\sum_{k\in N}u_k(x^*)/Sn,\ j\in N, i\in N$. Отсюда легко увидеть, что для каждого фиксированного игрока $i\in N$ значения параметра μ_i^j указывает каким, по его мнению, желательно, что бы был выигрыш игрока $j\in N$ в достигнутом компромиссе x^*. Тогда и только тогда игроку $i\in N$ будет невыгодно отклоняться от x^*. Поскольку величину $S=\sum_{i\in N}\sup_{x\in X}u_i(x)$ можно интерпретировать как суммарный идеальный выигрыш всех игроков, то можно также сказать, что вектор параметров μ_i, который отвечает слабому индивидуально-оптимальному равновесию x^*, является желаемым дележом суммарного идеального выигрыша *S* между игроками, с точки зрения игрока *i*. При таком дележе игроку *i* будет не выгодно разрушать достигнутый компромисс изменением своей стратегии.

Неравенства (2) могут быть значительно упрощены, если функции выигрыша игроков будут вогнутыми, а множества стратегий игроков – выпуклыми.

Теорема 2. Пусть множества стратегий игроков $X_i, i \in N$, - выпуклы, а функции их выигрыша $u_i, i \in N$, - вогнуты по стратегиям каждого игрока в отдельности. Ситуация *x** будет слабым индивидуально-оптимальным равновесием тогда и только тогда, когда существуют векторы параметров $\mu_i \in M_i, i \in N$, такие, что ситуация *x** будет удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\sum_{j \in N} \mu_i^j (u_j(x^*) - u_j(x_i, x_{N\setminus i}^*)) \geq 0 \;\; \forall x_i \in X_i, i \in N. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть выполняются неравенства (3). Допустим от противного, что $x^* \notin WIOE$. Тогда $\exists i \in N$, $\exists x \in X : x \overset{NE(i)}{\succ\succ} x^*$. Отсюда следует, $\exists i \in N : u_j(x_i, x_{N\setminus i}^*) > u_j(x^*), \forall j \in N$. Взяв взвешенную сумму этих неравенств по векторам $\mu_i \in M_i$, получим противоречие, а именно $\sum_{j \in N} \mu_i^j (u_j(x^*) - u_j(x_i, x_{N\setminus i}^*)) < 0$.

Пусть $x^* \in WIOE$. Тогда для $\forall i \in N$ система неравенств $u_j(x_i, x_{N\setminus i}^*) > u_j(x^*), j \in N$ будет несовместной на множестве X_i. Построим образы множества допустимых решений этой системы неравенств и множества стратегий X_i при отображении $y_i^j = u_j(x_i, x_{N\setminus i}^*)$. Получим соответственно: $V_i = \left\{(v_i^j)_{j\in N} \middle| v_i^j = u_j(x_i, x_{N\setminus i}^*) > u_j(x^*), j \in N\right\}$, $Y_i = \left\{(y_i^j)_{j\in N} \middle| y_i^j = u_j(x_i, x_{N\setminus i}^*), x_i \in X_i, j \in N\right\}$.

Очевидно, $V_i \cap Y_i = \varnothing$. Обозначим через $\overline{V_i} = \left\{(v_i^j)_{j\in N} \middle| v_i^j = u_j(x_i, x_{N\setminus i}^*) \geq u_j(x^*), j \in N\right\}$ - замыкание множества V_i. Очевидно, множество $\overline{V_i}$ - выпукло. Покажем выпуклость множества Y_i. Действительно, пусть $\overline{y}_i = (u_j(\overline{x}_i, x_{N\setminus i}^*))_{j\in N}$, $\overline{\overline{y}}_i = (u_j(\overline{\overline{x}}_i, x_{N\setminus i}^*))_{j\in N} \in Y_i$. Рассмотрим стратегию $\tilde{x}_i = \lambda \overline{x}_i + (1-\lambda)\overline{\overline{x}}_i, \lambda \in [0,1]$. Тогда, в силу вогнутости функций выигрыша по стратегиям игроков, получим: $u_j(\tilde{x}_i, x_{N\setminus i}^*) = u_j(\lambda \overline{x}_i + (1-\lambda)\overline{\overline{x}}_i, x_{N\setminus i}^*) \geq \lambda \overline{y}_i + (1-\lambda)\overline{\overline{y}}_i \geq u_j(x^*), \forall j \in N$. Поэтому $\lambda \overline{y}_i + (1-\lambda)\overline{\overline{y}}_i \in \overline{Y_i}$ и множество Y_i является выпуклым.

Таким образом, имеем выпуклые множества $\overline{V_i}$ и Y_i, и пустое пересечение множества Y_i с внутренностью V_i множества $\overline{V_i}$. Отсюда, согласно теореме про отделяющую гиперплоскость, всегда существует такой вектор $\mu_i = (\mu_i^j)_{j\in N} \neq 0$, что $\sum_{j \in N} \mu_i^j (v_i - y_i) \geq 0, \forall v_i \in V_i, \forall y_i \in Y_i$. Это неравенство будет верным, в частности, и для $v_i = (u_j(x^*))_{j\in N}$. Поэтому, поскольку $y_i = (u_j(x_i, x_{N\setminus i}^*))_{j\in N}$, то получим (1). Теорема доказана.

Параметрам μ_i^j можно придать следующую интерпретацию. Величина μ_i^j характеризует относительный вес выигрыша игрока $j \in N$ в предпочтении игрока $i \in N$ на множестве функций выигрыша всех игроков необходимый и достаточный для того, чтобы игроку *i* было не выгодно отклоняться от достигнутого компромисса. Так, например, если он считает, что для него более важные интересы игрока $j_1 \in N$, чем игрока $j_2 \in N$, то согласно теореме 2 ему следует выбрать $\mu_i^{j_1} > \mu_i^{j_2}$. Выбирая различные параметры $\mu_i \in M_i^{\geq 0}, i \in N$, можно находить разные индивидуально-оптимальные равновесия как решения неравенств (3). С другой стороны, каждое индивидуально-оптимальное равновесие характеризуется некоторым множеством векторов параметров $\mu_i \in M_i^{\geq 0}$, $i \in N$, и, соответственно, предпочтением на множестве функций выигрыша всех игроков.

Если подвести итог, то можно заметить, что для нахождения любого индивидуально-оптимального равновесия игрокам достаточно выбрать соответствующие векторы параметров $\mu_i \in M_i, i \in N$, и решить систему неравенств:

$$F_i(U(x_i, x^*_{N\setminus i}), \mu_i) \leq F_i(U(x^*), \mu_i) \;\; \forall x_i \in X_i, i \in N, \tag{4}$$

где функция $F_i(U(x), \mu_i) = \min_{j \in N}(u_j(x) - S\mu_i^j)$ - в общем случае и $F_i(U(x), \mu_i) = \sum_{j \in N} \mu_i^j u_j(x)$ - в случае выпуклой игры. Если игра происходит в условиях полной информированности (каждый игрок $i \in N$ знает функции выигрыша u_j, $j \in N \setminus \{i\}$, и предпочтения других игроков, которые характеризуются векторами параметров μ_j, $j \in N \setminus \{i\}$) для решения этой задачи можно применять те, или иные методы оптимизации для подобного класса задач.

Поиск индивидуально-оптимальных равновесий

Особенный интерес представляет случай частичной информированности игроков. Пусть каждый игрок $i \in N$ знает функции выигрыша u_j, $j \in N \setminus \{i\}$, всех других игроков, но векторы параметров μ_j, $j \in N \setminus \{i\}$, ему неизвестны. Такая информированность - естественна, поскольку предпочтение каждого игрока на множестве функций выигрыша других игроков, как правило, представляет собой конфиденциальную информацию. Кроме этого, это предпочтение может не всегда полностью осознаваться игроком и изменяться (уточняться) в процессе принятия решения.

Для реализации процедуры поиска индивидуально-оптимального равновесия игры в условиях частичной информированности игроков необходимо решать систему неравенств (4) так, чтобы каждый игрок оперировал лишь той информацией, которая ему известна.

Наиболее универсальной схемой, которую можно применить в условиях частичной информированности игроков есть, так называемая, процедура “нащупывания Курно” [1].

Пусть $x^0 = (x_i^0)_{i \in N}$ некоторая начальная ситуация игры. Для фиксированного вектора параметров $\mu = (\mu_i)_{i \in N}$ обозначим через $BR_i(\mu_i) = \left\{x \in X \middle| F_i(U(y_i, x_{N\setminus i}), \mu_i) \leq F_i(U(x), \mu_i), \forall y_i \in X_i; x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}\right\}$ - множество наилучших ответов игрока $i \in N$ на фиксированные наборы стратегий других игроков.

Процедура нащупывания Курно строит последовательность $x^1, ..., x^t, ...$ ситуаций игры G такую, что $x_i^t \in BR_i^{(t-1)}(\mu_i)$, t=1,2…, где $BR_i^{(t-1)}(\mu_i) = \left\{x \in X \middle| F_i(U(x_i, x_{N\setminus i}^{t-1}), \mu_i) \leq F_i(U(x^{t-1}), \mu_i), \forall x_i \in X_i\right\}$ - множество наилучших ответов игрока $i \in N$ на набор $x_{N\setminus i}^{t-1} = (x_j^{t-1})_{j \in N\setminus\{i\}}$ фиксированных стратегий других игроков, которые получены на предыдущем шаге процедуры.

Таким образом, каждый игрок $i \in N$ оперирует лишь с известной ему информацией (функции выигрыша всех игроков и вектор параметров μ_i, который характеризует его собственное предпочтение на множестве функций выигрыша других игроков).

Если процедура нащупывания Курно сходится, то мы получим некоторое индивидуально-оптимальное равновесие x^*, которое отвечает набору предпочтений всех игроков. Такая процедура может и не сходиться. Недостатком процедуры нащупывания Курно является также низкая скорость сходимости, которая в общем случае не поддается оцениванию.

В этой работе мы рассмотрим другую процедуру поиска индивидуально-оптимальных равновесий, которая основана на распределенных методах решения оптимизационных задач [3].

Общая схема распределенного решения оптимизационных задач основана на определении, так называемой, функции рассогласования [3]. Эта функция может определяться разными способами, но должна быть количественной оценкой, характеризующей несогласованность решений, которые выбраны отдельными игроками, по их принадлежности к решению всей задачи в целом. Вообще, определение функции рассогласования близко к функции штрафа и характеризует величину агрегированной разницы значений связующих переменных, которые получены в локальных решениях взаимосвязанных подзадач. Общая идея построения распределенного решения систем взаимосвязанных задач заключается в пошаговом согласовании их решений с целью обеспечить получение следующего приближения к решению задачи, с меньшей величиной функции рассогласования, чем на предыдущем шаге. Сходимость таких процедур обеспечивается коррекцией моделей задач на каждом шаге.

Перепишем задачу (4) в эквивалентном виде распределив переменные по каждому игроку в отдельности: $x^i = \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^j, x^i \in BR_i\,(\mu_i), i \in N$. Здесь каждому игроку $i \in N$ отвечают векторы распределенных переменных $x^i = (x_j^i)_{j\in N}$. Вполне понятно, что $x^* = x^i, i \in N$ тогда и только тогда, когда x^* является решением задачи (4). Построим вспомогательную задачу с квадратичной целевой функцией рассогласования, решение которой будет также совпадать с решением (4):

$$g(x) = \sum_{i\in N}\left\| x^i - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^j \right\|^2 \to \min,\ x^i \in BR_i\,(\mu_i), i \in N.$$

Для решения этой вспомогательной задачи используем итерационный метод спуска, в котором будем выбирать допустимые направления спуска, с использованием линейной аппроксимации целевой функции по векторам переменных $x^i, i \in N$.

Пусть начальное приближение $x^{i(0)} \in BR_i(\mu_i), i \in N$. Тогда для k-го приближения $x^{i(k)}$, $i \in N$, получим: $g^{(k)} = g(x^{(k)}) + 2\sum_{i\in N}\left\langle x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)}, x^i - x^{i(k)} \right\rangle$ $i = 1,2,...$. Отбросив константы и постоянные множители, будем искать направление спуска на (k+1)-м шаге, путем решения следующих задач: $\sum_{i\in N}\left\langle x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)}, x^i \right\rangle \to \min$, $x^i \in BR_i\,(\mu_i), i \in N$. Эти задачи, в свою очередь, декомпозируются на n независимых подзадач:

$$\left\langle x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)}, x^i \right\rangle \to \min\quad x^i \in BR_i\,(\mu_i) \tag{5}$$

(обозначим векторы их решений через $\bar{x}^{i(k+1)}$, $i \in N$).

Следующее (k+1)-е приближение определяется из условий уменьшения функции вдоль допустимого направления следующим образом:

$$x^{i(k+1)} = x^{i(k)} + \lambda^{(k)}(\overline{x}^{i(k+1)} - x^{i(k)}),\ i \in N\,, \tag{6}$$

где $\lambda^{(k)}$ -находиться из условий наибольшего уменьшения значения функции рассогласования:

$$\lambda^{(k)} = \arg\min_{\lambda\in[0,1]} g(x^{(k)} - \lambda(x^{(k)} - \overline{x}^{(k+1)})) = \sum_{i\in N}\left\langle x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)}, x^{i(k)} - \overline{x}^{i(k+1)}\right\rangle \Big/ \sum_{i\in N}\left\|(x^{i(k)} - \overline{x}^{i(k+1)})\right\|^2 \tag{7}$$

Таким образом, в соответствии с заданными предпочтениями на множестве функций выигрыша, игроки предлагают один другому к рассмотрению ситуации игры. Эти ситуации определяются ими по формулам (7) благодаря решению каждым игроком отдельно оптимизационной задачи (5). Эти задачи описываются на основе только той информации, которой владеет соответствующий игрок, т.е. информацией о функции его выигрыша и ситуации игры, которая наблюдается всеми игроками вместе.

Обоснуем сходимость рассмотренной выше процедуры и оценим скорость ее сходимости.

Для доказательства теоремы будем использовать общеизвестное свойство выпуклых дифференцированных функций на выпуклых множествах, приведенное в следующей лемме.

Лемма. Пусть $\varphi(x)$ - дифференцированная функция, которая определена на некотором множестве X эвклидового пространства E^n, градиент которой удовлетворяет условию Липшица, а именно $\exists L > 0$, для которого $\|\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(y)\| \le L\|x - y\|$ для $\forall x, y \in X$. Тогда для $\forall x, y \in X$ имеет место неравенство $\varphi(x) - \varphi(y) \ge \langle \nabla\varphi(x), x - y\rangle - \frac{L}{2}\|x - y\|^2$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть для фиксированного вектора параметров $\mu = (\mu_i)_{i\in N}$ множества $BR_i(\mu_i)$ наилучших ответов игроков $i \in N$ на фиксированные наборы стратегий других игроков - выпуклы и замкнуты, а их пересечение $X^*(\mu) = \bigcap_{i\in N} BR_i(\mu_i)$ - непусто. Тогда процедура (5)-(9) генерирует последовательности приближений $x^{i(k)} \in BR_i(\mu_i), i \in N$; $k = 1,2,...$, которые сходятся к некоторому индивидуально-оптимальному равновесию $x^* \in X^*(\mu)$ со скоростью геометрической прогрессии с оценкой $O\left(\frac{n}{k}\right)$.

Доказательство. Сначала определим константу Липшица для функции $\varphi(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|^2$. Поскольку $\nabla\varphi = (2(x_1 - x_2), -2(x_1 - x_2))$, то $\|\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(y)\| =$
$= \|(2(x_1 - x_2), -2(x_1 - x_2)) - (2(y_1 - y_2), -2(y_1 - y_2))\| = \|2(x_1 - x_2) - 2(y_1 - y_2), -2(x_1 - x_2) + 2(y_1 - y_2))\| =$
$= 2\|(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)\| = 2\|\varphi(x) - \varphi(y)\|$. Таким образом, константа Липшица $L = 2$.

Для некоторого $k = 0,1,...$ рассмотрим разность

$$\Delta^{(k)} = g^{(k)} - g^{(k+1)}, \tag{8}$$

которая согласно лемме при $L = 2$ может быть оценена следующим образом:

$$\Delta^{(k)} \ge \left\langle \nabla g(x), x^{(k)} - x^{(k+1)}\right\rangle - \left\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\right\|^2 = \sum_{i\in N}[2\left\langle x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)}, x^{i(k)} - x^{i(k+1)}\right\rangle - \left\|(x^{i(k)} - x^{i(k+1)})\right\|^2].$$

Пусть $x^{i(k+1)} = x^{i(k)} - \lambda(x^{i(k)} - \overline{x}^{i(k+1)}),\ i \in N$. Тогда для $\forall\lambda \in [0,1]$ получим:

$$\Delta^k \ge 2\lambda \sum_{i\in N} \left\langle x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)}, x^{i(k)} - \overline{x}^{i(k+1)} \right\rangle - \lambda^2 \sum_{i\in N} \left\| (x^{i(k)} - \overline{x}^{i(k+1)}) \right\|^2 . \qquad (9)$$

Выберем $\lambda = \lambda^{(k)}$ по формуле (7). Тогда в случае, когда $\sum_{i\in N} \left\langle x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)}, x^{i(k)} - \overline{x}^{i(k+1)} \right\rangle \ge \sum_{i\in N} \left\| (x^{i(k)} - \overline{x}^{i(k+1)}) \right\|^2$. Значение $\lambda^{(k)} = 1$ и с (9) мы получим:

$$\Delta^{(k)} \ge 2\sum_{i\in N} \left\langle x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)}, x^{i(k)} - \overline{x}^{i(k+1)} \right\rangle - \sum_{i\in N} \left\| (x^{i(k)} - \overline{x}^{i(k+1)}) \right\|^2 \ge \sum_{i\in N} \left\langle x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)}, x^{i(k)} - \overline{x}^{i(k+1)} \right\rangle .$$

Поскольку по предположению теоремы $\|x - y\| \le R < \infty$ для $\forall x, y \in BR_i(\mu_i), i \in N$, то величина $\left\langle x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)}, x^{i(k)} - \overline{x}^{i(k+1)} \right\rangle \le \left\| x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)} \right\| \cdot \left\| x^{i(k)} - \overline{x}^{i(k+1)} \right\| \le R^2$. Не трудно убедиться, что отсюда мы получим неравенство $\Delta^{(k)} \ge \frac{1}{R^2} \sum_{i\in N} \left\langle x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)}, x^{i(k)} - \overline{x}^{i(k+1)} \right\rangle^2$. В случае, когда $\sum_{i\in N} \left\langle x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)}, x^{i(k)} - \overline{x}^{i(k+1)} \right\rangle < \sum_{i\in N} \left\| (x^{i(k)} - \overline{x}^{i(k+1)}) \right\|^2$, значение $\lambda^{(k)} < 1$ и из (9) мы получим неравенство $\Delta^{(k)} \ge \sum_{i\in N} \left\langle x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)}, x^{i(k)} - \overline{x}^{i(k+1)} \right\rangle \Big/ \sum_{i\in N} \left\| (x^{i(k)} - \overline{x}^{i(k+1)}) \right\|^2$. Отсюда, поскольку по предположению теоремы $\|x - y\| \le R < \infty$ для $\forall x, y \in BR_i(\mu_i), i \in N$, получим неравенство

$$\Delta^{(k)} \ge \frac{1}{R^2} \sum_{i\in N} \left\langle x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)}, x^{i(k)} - \overline{x}^{i(k+1)} \right\rangle^2 . \qquad (10)$$

Таким образом, в обоих случаях, когда $\lambda^{(k)} = 1$ или $\lambda^{(k)} < 1$, для того, чтобы показать, что $\Delta^{(k)} > 0$ достаточно доказать справедливость неравенства

$$\delta^{(k)} = \sum_{i\in N} \left\langle x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)}, x^{i(k)} - \overline{x}^{i(k+1)} \right\rangle > 0 . \qquad (11)$$

Действительно, из (5) получим: $\delta^{(k)} = \sum_{i\in N} \max \left\{ \left\langle x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)}, x^{i(k)} - x^i \right\rangle \middle| x^i \in BR_i(\mu_i) \right\} \ge$

$$\ge \sum_{i\in N} \left\langle x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)}, x^{i(k)} - x^i \right\rangle, \forall x^i \in BR_i(\mu_i) . \qquad (12)$$

В частности, неравенство (12) будет выполняться и для $x^* = x^i, i \in N$, где x^* - решение задачи (4). Тогда

$$\delta^{(k)} \ge \sum_{i\in N} \left\langle x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)}, x^{i(k)} - x^* \right\rangle = \sum_{i\in N} \left\langle x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)}, x^{i(k)} \right\rangle =$$

$$= \sum_{i\in N} \left\langle x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)}, x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)} \right\rangle = \sum_{i\in N} \left\| x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)} \right\|^2 \ge 0 . \qquad (13)$$

Вполне понятно, что $\delta^{(k)} = 0$ тогда и только тогда, когда $x^{i(k)} = x^*, i \in N$, где x^* - решение задачи (4), т.е. $x^* \in X^*(\mu) = \bigcap_{j\in N} BR_j(\mu_j)$. Таким образом, если $x^{i(k)} \ne x^*$ хотя бы для одного $i \in N$, то неравенство (11) будет строгим. Тогда $\Delta^{(k)} > 0$, $k = 1,2,...$ и мы получим строго монотонно убывающую последовательность

$\{\Delta^{(k)}\}_{k=0,1,...}$, которая ограничена снизу. Поэтому $\Delta^* = \lim_{k\to\infty} \Delta^{(k)} = 0$, а $x^* = \lim_{k\to\infty} x^{i(k)}$, $i \in N$.

Построим оценку скорости сходимости процедуры. Из (10) посредством неравенства Минковского $(\sum_{i\in N} a_i)^2 \le n\sum_{i\in N} a_i^2$ справедливо неравенство $\Delta^{(k)} \ge \frac{1}{nR^2}(\sum_{i\in N}\langle x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)}, x^{i(k)} - \overline{x}^{i(k+1)}\rangle)^2$. Отсюда и из (11), (13) получим неравенство $\Delta^{(k)} \ge \frac{1}{R^2 n}\left(\sum_{i\in N}\left\| x^{i(k)} - \frac{1}{n}\sum_{j\in N} x^{j(k)}\right\|^2\right)^2$. Тогда согласно обозначению (8) $g^{(k)} - g^{(k+1)} \ge \frac{1}{nR^2}[g^{(k)}]^2$, $k = 0,1,...$. Поскольку $g^{(k)} > 0$, то $\frac{g^{(k)}}{g^{(k+1)}} \ge 1 + \frac{1}{nR^2}\frac{[g^{(k)}]^2}{g^{(k+1)}} \ge 1$. Тогда $\frac{1}{g^{(k+1)}} - \frac{1}{g^{(k)}} = \frac{g^{(k)} - g^{(k+1)}}{g^{(k)}g^{(k+1)}} \ge \frac{1}{nR^2}\frac{g^{(k)}}{g^{(k+1)}} \ge \frac{1}{nR^2}$. Если рассмотреть любую конечную сумму последних неравенств, получим: $\sum_{k=0}^{k_0}\left(\frac{1}{g^{(k+1)}} - \frac{1}{g^{(k)}}\right) = \left(\frac{1}{g^{(k_0)}} - \frac{1}{g^{(0)}}\right) \ge \sum_{k}^{k_0}\frac{1}{nR^2} = \frac{k_0}{nR^2}$. Тогда $g^{(k_0)} = \frac{nR^2 g^{(0)}}{nR^2 + g^{(0)}k_0} = O\left(\frac{n}{k_0}\right)$. Теорема доказана.

Заключение

Принцип индивидуальной оптимальности обобщает классические принципы оптимальности в некооперативных играх и расширяет класс конфликтно разрешимых игр. Применение этого принципа обосновано, если конфликт между игроками не может быть разрешен согласно классическим принципам оптимальности и игроки соглашаются идти на компромисс ради его достижения.

Благодарности

Работа опубликована при финансовой поддержке проекта **ITHEA XXI** Института информационных теорий и приложений FOI ITHEA Болгария www.ithea.org и Ассоциации создателей и пользователей интеллектуальных систем ADUIS Украина www.aduis.com.ua.

Литература

[1] Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – М.: Мир, 1985. -200 с.

[2] Мащенко С.О. Исследование стабильности равновесий на основе принципа индивидуальной оптимальности// Кибернетика и системный анализ. -2007.-4.–С.162-169.

[3] Волкович В.Л., Коленов Г.В., Мащенко С.О. Алгоритмы поиска допустимого решения в линейных распределенных системах// Автоматика. -1988.-4.–С. 70-77.

Информация об авторе

***Мащенко Сергей Олегович** – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, доцент, кандидат физ.-мат. наук; Проспект академика Глушкова, 6, Киев – 207, Украина;*
e-mail: msomail@yandex.ru