НЕЧЕТКИЙ АЛГОРИТМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА ВАРИАНТОВ

Алексей Волошин, Николай Маляр, Оксана Швалагин

Аннотация: *Предлагается модификация процедур отсева декомпозиционного метода последовательного анализа и отсеивания вариантов при нечетко заданных допустимых множествах альтернатив дискретных моделей принятия решений.*

Ключевые слова: *дискретное программирование, последовательный анализ вариантов, нечеткость.*

ACM Classification Keywords: *H.4.2 Information Systems Applications: Types of Systems: Decision Support.*

Conference*: The paper is selected from XVth International Conference "Knowledge-Dialogue-Solution" KDS-2 2009, Kyiv, Ukraine, October, 2009.*

Введение

Одним из наиболее эффективных методов решения оптимизационных задач различных классов, возникающих при моделировании процессов принятия решений, является метод последовательного анализа вариантов (ПАВ), предложенный в 60-х г. XXст. в Институте кибернетики АН Украины [Михалевич, Шор, 1961]. С точки зрения формальной логики схема ПАВ является повторением таких действий:

- разбиение множества вариантов решений задачи на подмножества с дополнительными свойствами;
- использование этих свойств при поиске логических противоречий в описании отдельных множеств;
- исключение из рассмотрения подмножеств, в описании которых имеются противоречия.

В [Михалевич, Шор, 1977] общая схема ПАВ конкретизируется для различных классов многовариантных задач, описываются алгоритмы "последовательного конструирования, анализа и отсеивания вариантов", в частности, широко известный алгоритм "Киевский веник". Основным правилом отсева бесперспективных вариантов в этих алгоритмах являлся принцип монотонной рекурсивности [Михалевич, Шор, 1961], родственной критерию оптимальности динамического программирования [Беллман, 1960]. Наряду с известными достоинствами алгоритмы пошагового конструирования обладают и определенными недостатками [Волкович, Волошин, 1984]. В развитие общих концепций ПАВ в работах [Волкович, Волошин, 1978-2009] предложены процедуры параллельного отсева подвариантов, в частности, единичной длины (алгоритм W [Волкович-Волошин,1978]). При этом возникает проблема конструирования полного варианта, которая решается путем последовательного введения ограничений на значение функционала [Волошин, 1987]. Предложенную схему можно интерпретировать как декомпозиционный метод решения задачи, в которой анализ подвариантов проводится независимо (параллельно) друг от друга, конструирование полных вариантов осуществляется на верхнем уровне при анализе агрегирующей (координирующей) задачи [Лэсдон, 1975]. Эффективность алгоритмов, базирующихся на предложенных принципах, подтверждена вычислительными экспериментами, теоретическими исследованиями и решением практических задач [Волкович, Волошин, 1987, 1993, 2004, 2009]. При решении прикладных задач исходные данные задаются, как правило, приближенно, неточно, нечетко. В [Волошин, 1980] предложен алгоритм ПАВ для нахождения ''субоптимальных" решений (ε – приближенных по функционалу и δ – приближенных по ограничениям). При этом любые ''ε, δ – отклонения'' считались ''равноприемлемыми''. В данной работе процедуры отсева в приближенных алгоритмах ПАВ обобщаются на нечеткий случай [Орловский,1981]. Предполагается, что в оптимизационной задаче математического программирования при четко заданных множествах возможных решений и значений функционалов нечетко задаются допустимых множества решений и множества уровней целевой функции.

Постановка задачи

Пусть задано некоторое конечное множество $X=\{\mathbf{x}=(x_1,...,x_j,...,x_n)\}$ возможных вариантов задачи. Множество возможных вариантов построения j-ой компонента x_j вектора $\mathbf{x}$ обозначим X_j, $j=\overline{1,n}$. Множества X_j могут задаваться множеством значений функции дискретного аргумента; задаваться таблично; быть множеством перестановок некоторого базисного множества параметров. Вектор $p=(x_{j1},x_{j2},...,x_{jk})$, где $x_{j1}\in X_{j1}$, $x_{j2}\in X_{j2}$,..., $x_{jk}\in X_{jk}$ $(1\le j_1<\dots<j_k\le n)$, назовется подвариантом длины k. Множество всех подвариантов обозначим через $P(X)$, в котором выделим множество допустимых подвариантов $D(X)\subseteq P(X)$. В множестве $D(X)$ выделяется подмножество полных допустимых вариантов (вариантов длинны n) $D\subseteq D(X)$, для которого справедливо соотношение $D\subseteq X$.

Пусть $F(p)$ – функционал, определенный на множестве $P(X)$.

Рассматривается следующая задача нахождения варианта $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}\in \operatorname*{Argmax}_{\mathrm{x}\in \mathrm{D}} F(\mathrm{x});$$

$$\operatorname*{Argmax}_{x\in D} F(\mathrm{x})=\{\mathbf{x}\in D\mid F(x)=\max_{x'\in D} F(\mathrm{x}')\}.$$

Вариант $\mathbf{x}^*\in D$, который максимизирует функционал $F(x)$, назовем оптимальным. Вариант $\mathbf{x}$, при котором достигается максимум функционала $F(\mathbf{x})$ на некотором множестве $X^{(s_0)}\subseteq X$, назовем максимальным. Полученные максимальные варианты исследуются с помощью критериев оптимальности. Множество допустимых подвариантов $D(X)$ опишем следующим образом:

$$D(X)=\left\{p\mid G_i(p)\overset{\alpha}{\prec}G_i,\ p\in P(X),\ 0\le\alpha\le1\right\},$$

где $G_i(p)=\{(g_i(p),\mu_{g_i}(g_i(p))),\ i=\overline{1,m}\}$, – функционал подварианта p, определенный на множестве $P(X)$, $G_i=\{(g_i,\mu_i(g_i)),\ g_i\in[\underline{g}_i,\overline{g}_i]\, i=\overline{1,m}\}$ – заданные нечеткие множества, $\overset{\alpha}{\succ}$ – нечеткое отношение предпочтения, $\alpha-$ степень предпочтения [Орловский, 1981].

Очевидно, что множество полных допустимых вариантов определяется как:

$$D=\left\{\mathbf{x}\mid G_i(\mathbf{x})\overset{\alpha}{\prec}G_i,\mathbf{x}\in X,\ 0\le\alpha\le1\right\}.$$

Родовым множеством подварианта $p\in D(X)$ называется множество $R(p)$, состоящее из тех вариантов $\mathbf{x}$, которые содержат подвариант p. В свою очередь, допустимым родовым множеством $\overline{R}(p)$ подварианта p называется такое подмножество родового множества $R(p)$, которое состоит из допустимых вариантов $\mathbf{x}\in D$. Родовым множеством $R(p)$ некоторого множества подвариантов

$P \subseteq P(X)$ называется множество, которое является объединением родовых множеств подварианта $p \in P$, то есть $R(p) = \bigcup_{p \in P} R(p)$.

Величина $\Delta_p^i = \left\{ \left(\Delta g_p^i, \mu\left(\Delta g_p^i\right)\right), \Delta g_p^i \in \left[\Delta \underline{g}_p^i, \Delta \overline{g}_p^i \right] \right\}$ называется допуском для подварианта p относительно множества D по i-ому ограничению, если из того, что $G_i(p) \overset{\alpha}{\succ} \Delta_p^i$, следует, что допустимое родовое подмножество $\overline{R}(p)$ подварианта p пусто.

В соответствии с методологией ПАВ необходимо построить процедуру анализа родовых множеств подвариантов и исключения тех из них, допустимые родовые множества которых пусты или не содержат оптимальных вариантов. Эта задача сводится к задаче вычисления допусков и проверки множества подвариантов на удовлетворение этим допускам.

Обозначим через $Q(P) = \left\{ \Delta_p^i \right\}$, $i = \overline{1, m}$, множество допусков относительно множества D для множества подвариантов P по всем ограничениям.

На множестве P зададим оператор $E = E(P, Q)$, отсеивающий те подварианты, которые не удовлетворяют множеству допусков Q. Применив оператор E на множестве P, получим множество подвариантов $P' \subseteq P$, такое что

$$\overline{R}(P) = \overline{R}(P'). \tag{1}$$

Тем самым, из рассмотрения выключаются подварианты $p \in \widetilde{P} = P \setminus P'$, для которых $\overline{R}(\widetilde{P}) = \varnothing$.

Обозначим $\wp = \cup P$ конечное семейство множеств подвариантов $P \subseteq P(X)$, для которого справедливо $R(\wp) = X$, $\overline{R}(\wp) = D$. Пусть $Q(\wp) = \cup Q(P)$ - система допусков семейства $\wp$.

Определим на множестве $\wp$ оператор Ω аппроксимации множества $D \subseteq X$, который вычисляет систему допусков $Q(\wp)$ и сужает множество X путем применения оператора E на множествах $R \subseteq \wp$.

Описание алгоритма

Опишем схему работы оператора Ω.

Шаг 0. Вычисляем начальную систему допусков $Q\left(\wp^{(0)}\right)$ на множестве $\wp^0 = \wp$.

Шаг s. На подмножествах $P^{(s-1)} \subset \wp^{(s-1)}$ для заданной системы допусков $Q\left(\wp^{(s-1)}\right)$ применяем оператор отсева E. В результате получаем новое семейство множеств подвариантов $\wp^{(s)} = \cup P^{(s)}$, такое, что

$$\wp^{(s)} \subseteq \wp^{(s-1)} \tag{2}$$

Учитывая, что $R\left(\wp^{(s-1)}\right) = X^{(s-1)}$ и справедливо (2), получим, что справедливо следующее условие:

$$X^{(s)} \subseteq X^{(s-1)}..$$

Поэтому, учитывая (1), получим

$$\overline{R}\left(\wp^{(s-1)}\right) = \overline{R}\left(\wp^{(s)}\right) = D.$$

Далее пересчитываем систему допуском для множества $\wp^{(s)}$.

На шаге s оператора Ω возможны следующие случаи:

a. Справедливо условие предпочтения $Q\left(\wp^{(s)}\right) \succ Q\left(\wp^{(s-1)}\right)$, то есть дальнейшее применение оператора E на множествах подвариантов $P^{(s)}$ при допусках $Q\left(\wp^{(s)}\right)$ может привести к сужению множества $P^{(s)}$. Переходим к шагу s+1.

b. Справедливо условие равности $Q\left(\wp^{(s)}\right) = Q\left(\wp^{(s-1)}\right)$, то есть $P^{(s)} = P^{(s-1)}$. Отсюда следует, что $X^{(s)} = X^{(s-1)}$. Эти условия свидетельствуют об окончании работы оператора Ω.

Аналогично [Волкович, Волошин, 1984] можно показать, что оператор Ω оканчивает работу за конечное число шагов.

В случае, когда оператор Ω недостаточно сужает множества $X^{(s_0)}$, применяются процедуры анализа по функционалу, которые заключаются в выделении из множества $X^{(s_0)}$ подмножеств перспективных по функционалу вариантов $X_\gamma^{(s_0)}$ и выборе в этом множестве максимального варианта.

На функционал вводится дополнительное ограничение:

$$F(\mathbf{x}) \overset{\beta}{\succ} F^{*(\gamma)}, \quad 0 \le \beta \le 1, \tag{3}$$

где $F^{*(\gamma)} \in \left[\min\limits_{x \in X^{(s_0)}} F(\mathbf{x}), \max\limits_{x \in X^{(s_0)}} F(\mathbf{x})\right]$ - нечеткий параметр с функцией принадлежности $\nu\left(F^{*(\gamma)}\right)$.

Обозначим множество вариантов, которые удовлетворяют (3) при выбранном значении $F^{*(\gamma)}$, через

$$D_F^\gamma = \left\{\mathbf{x} \mid F(\mathbf{x}) \overset{\beta}{\succ} F^{*(\gamma)}\right\},$$

и множество допустимых вариантов во множестве D_F^γ через

$$D_\gamma = D \cap D_F^\gamma.$$

Обозначим через $P\left(X^{(s_0)}\right)$ множество всех подвариантов. Сформируем семейство $\wp_\gamma = \cup P^\gamma$ множеств подвариантов $P^\gamma \subseteq P\left(X^{(s_0)}\right)$ такое, что $R\left(\wp_\gamma\right) = X^{(s_0)}$ и $\overline{R}\left(\wp_\gamma\right) = D_F^\gamma$.

Величина ΔF_p^γ называется допуском для множества подвариантов $P^\gamma \subseteq \wp_\gamma$ относительно множества D_F^γ по функционалу, если из того, что $F(p) \overset{\beta}{\prec} \Delta F_p^\gamma$ следует, что допустимое родовое множество $\overline{R}^\gamma(p) = R(p) \cap D_\gamma$ подварианта p пусто.

Исключение вариантов из множества $X^{(s_0)}$ по ограничению (3) осуществляется путем отсева с помощью допусков тех подвариантов $p \in P^\gamma$, которые не входят в максимальные варианты.

Аналогично [Волкович, Волошин, 1984] можно показать, что если множество D_γ не пусто и подвариант p не удовлетворяет допуску ΔF_p^γ по функционалу, то допустимое родовое множество $\overline{R}^\gamma(p)$ подварианта p не содержит оптимального варианта.

Обозначим систему допусков для семейства $\wp_\gamma$ через $Q\left(\wp_\gamma\right) = \cup\left\{\Delta F_p^\gamma\right\}$. Система допусков вычисляется с помощью оператора аппроксимации Ω, определенного на семействах $\wp_\gamma$ и $\wp$. В результате получим полную систему допусков $Q\left(\wp, \wp_\gamma\right) = Q(\wp) \cup Q\left(\wp_\gamma\right)$.

Тогда схема работы «нечеткого» оператора Ω будет следующей:

Шаг 0. Для заданного значения $F^{*(\gamma)}$ вычисляем для семейств $\wp^{(0)} = \wp$ и $\wp_\gamma^{(0)} = \wp_\gamma$ полную систему допусков $Q\left(\wp^{(0)}, \wp_\gamma^{(0)}\right)$, где $\wp = \cup P$, $\wp_\gamma = \cup P^\gamma$.

Шаг s. На множествах $P^{(s-1)}$ и $P^{\gamma(s-1)}$, выбранных из семейств $\wp^{(s-1)}$ и $\wp^{(s)}$, при заданной полной системе допусков $Q\left(\wp^{(s-1)}, \wp_\gamma^{(s-1)}\right)$, применяем оператор отсева E . В результате получим новые семейства $\wp^{(s)} = \cup P^{(s)}$, $\wp^{(s)} \subseteq \wp^{(s-1)}$ и $\wp_\gamma^{(s)} = \cup P^{\gamma(s)}$, $\wp_\gamma^{(s)} \subseteq \wp_\gamma^{(s-1)}$ и множество $X_\gamma^{(s)}$ такое, что $X_\gamma^{(s)} \subseteq X_\gamma^{(s-1)} \subseteq X$. Для семейств $\wp^{(s)}$ и $\wp_\gamma^{(s)}$ вычисляем полную систему допусков $Q\left(\wp^{(s)}, \wp_\gamma^{(s)}\right)$. При вычислении допусков предлагается использовать нечеткие множества *α*-уровней [Орловский, 1981] и смещение вправо нижней границы интервала допуска. В случае, если $Q\left(\wp^{(s-1)}, \wp_\gamma^{(s-1)}\right) = Q\left(\wp^{(s)}, \wp_\gamma^{(s)}\right)$, то вычисление оканчивается, при этом $X_\gamma^{(s_0)} = X_\gamma^{(s)}$, иначе переходим к шагу *s*+1.

Множество вариантов $X_\gamma^{(s_0)}$, которые образовывается в результате применения оператора Ω, является аппроксимацией множеств допустимых вариантов $D_\gamma \subseteq X_\gamma^{(s_0)}$, среди которых ищется максимальный вариант. Рассмотрим следующие случаи.

1. $X_\gamma^{(s_0)} = \varnothing$, то есть множество D_γ не содержит допустимых вариантов. Аналогично [Волкович, Волошин, 1984] можно показать, что в этом случае любой вариант $\mathbf{x} \in D$ удовлетворяет условию $F(\mathbf{x}) \overset{\beta}{\prec} F^{*(\gamma)}$. Таким образом, $F^{*(\gamma)}$ является оценкой функционала F на множестве X . В этом случае уменьшаем значение $F^{*(\gamma)}$, выбираем величину $F^{*(\gamma+1)} < F^{*(\gamma)}$ и опять применяем оператор Ω .

2. Множество $X_\gamma^{(s_0)}$ объемно, то есть $\left|X_\gamma^{(s_0)}\right| > N$. Тогда в нем находим максимальный вариант, который проверяем на оптимальность с помощью критериев оптимальности. Если максимальный вариант $\mathbf{x}^*$ не удовлетворяет условию (3), то он может быть выбран в качестве приближенного варианта.

3. $\left|X_\gamma^{(s_0)}\right| \le N$. В множестве $X_\gamma^{(s_0)}$ выбираем максимальный вариант $\mathbf{x}^*$, который проверяем на оптимальность. В случае, если он допустим, но не оптимален, то выбираем его в качестве приближенного. Если он недопустим, то на семействах $\wp^{(s_0)}$ и $\wp_\gamma^{(s_0)}$ применяем оператор конструирования κ, который строит множество $\tilde{\wp} = \wp \cup \wp_\gamma$ и формирует агрегированную задачу A_γ : максимизировать

$$F\left(p_1, \ldots, p_j, \ldots p_r\right)$$

при $g_i\left(p_1, \ldots, p_j, \ldots, p_r\right) \le g_i^*$, $i = \overline{1,m}$, $\left(p_1, \ldots, p_j, \ldots, p_r\right) \in \tilde{\wp},\ r \le n,\ \cup p_j = \mathbf{x} \in X_\gamma^{(s_0)}$.

Если для максимального варианта $\mathbf{x} = \cup p_j$ не выполняется критерий оптимальности, то решается задача A_γ и полученное решение проверяется на оптимальность.

Заключение

При решении практических задач принятия решений необходимо учитывать приближенность, неточность, нечеткость исходных данных. Во многих случаях ''основной компонентой нечеткости'' в ситуациях принятия решений, которые описываются моделями математического программирования, является описание допустимого множества решений (правых частей ограничений). В докладе предлагается модификация процедур метода последовательного анализа вариантов, одного из наиболее эффективных методов решения многовариантных задач выбора, на случай нечетких данных.

Благодарности

Работа опубликована при финансовой поддержке проекта **ITHEA XXI** Института информационных теорий и приложений FOI ITHEA Болгария www.ithea.org и Ассоциации создателей и пользователей интеллектуальных систем ADUIS Украина www.aduis.com.ua.

Список литературы

[Беллман, 1960] Беллман Р. Динамическое программирование.- Москва: Иностранная литераткура.,1960.-400с.

[Волкович, Волошин, 1978] Волкович В.Л., Волошин А.Ф. Об одной схеме метода последовательного анализа и отсеивания вариантов//Кибернетика,1978,№4.-С.99-105.

[Волкович, Волошин, 1984] Волкович В.Л., Волошин А.Ф. и др. Методы и алгоритмы автоматизированного проектирования сложных систем управления. – Киев: Наукова.думка, 1984. – 216 с.

[Волкович, Волошин, 1993] Волкович В.Л., Волошин А.Ф. и др.Модели и методы оптимизации надежности сложных систем.- Киев: Наукова думка,1993.-312с.

[Волошин, 1980] Волошин А.Ф. Нахождение субоптимальных решений в дискретных оптимизационных задачах методом ПАВ//Вычислительные аспекты в пакетах прикладных программ.- Киев, ИК АН УССР,1980.-С.25-35.

[Волошин, 1987] Волошин А.Ф. Метод локализации области оптимума в задачах математического программирования//Доклады АН СССР,1987,том 293,№3.-С.549-553.

[Волошин, 2004] Волошин А.Ф. Методы анализа статических балансовых эколого-экономических моделей большой размерности//Издательство ''Педагогика'', Научные записки, том 7, Киев, 2004.-С.43-55. (укр. яз.).

[Волошин, 2009] Волошин А., Кудин В., Богаенко В. Анализ малых возмущений линейных экономико-математических моделей//International Book Series ''Information Science&Computing'',N10,2009.-P.67-73.

[Гаращенко, Волошин, 2009] Гаращенко Ф.Г., Волошин А.Ф. и др. Развитие методов и технологий моделирования и оптимизации сложных систем:Монография.-Киев:Издательство ''Сталь'', 2009.-668с.

[Михалевич, Шор, 1961] Михалевич В.С., Шор Н.З. Метод последовательного анализа вариантов при решении вариационных задач управления, планирования и проектирования//Труды IV Всесоюз.мат.съезда,М.,1961.-С.91.

[Михалевич, Шор, 1977] Михалевич В.С., Шор Н.З. и др. Вычислительные методы выбора оптимальных решений.- Киев: Наукова думка,1977.-178с.

[Орловский, 1981] Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 208 с.

Сведения об авторах

Волошин Алексей Федорович *– профессор, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики. Киев, Украина. E-mail: ovoloshin@unicyb.kiev.ua*

Маляр Николай Николаевич *– декан математического факультета, заведующий кафедрой кибернетики и прикладной математики Ужгородского национального университета, кандидат технических наук, доцент. Ужгород, Украина. E-mail: cyber@mail.uzhgorod.ua*

Швалагин Оксана Юрьевна *– аспирант, Ужгородский национальный университет, математический факультет. Ужгород, Украина.*