КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ МНОГОМЕРНЫХ НЕЧЕТКИХ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

Евгений Ивохин

Аннотация: *Предлагается способ исследования устойчивости нечетких разностных систем большой размерности на основе применения метода вектор-функций Ляпунова и специальной процедуры декомпозиции системы на подсистемы.*

Ключевые слова: *разностные системы, функции Ляпунова, нечеткость*

ACM Classification Keywords: *H.4.2 Information Systems Applications: Types of Systems: Decision Support.*

Conference*: The paper is selected from XVth International Conference "Knowledge-Dialogue-Solution" KDS-2 2009, Kyiv, Ukraine, October, 2009.*

Введение

Использование нечетких множеств для описания ситуаций с неопределенностью находит все большее применение в разных прикладных отраслях [Чуличков, 2000]. Однако, следует заметить, что в основном рассматриваются системы, размерность которых невелика [Меренков, 2000; Пушков, 2001; Ивохин, Волчков, 2006]. Исследования многомерных систем усложняются не только проблемами, связанными с размерностью, но и с отсутствием специфичных операций декомпозиции и агрегирования нечетких множеств.

В данной работе рассматривается одна из возможных реализаций процедуры декомпозиции нечетких систем на подсистемы и ее использование для анализа устойчивости многомерных разностных нечетких систем методом векторних функций Ляпунова.

Постановка задачи

Рассмотрим произвольное конечномерное пространство над полем действительных чисел $X = R^n$. Будем называть X универсальным множеством.

Определение. Нечетким множеством $\tilde{A}$ универсального множества $X = \{ x \}$, называется совокупность пар $A = \{ (\mu_{\tilde{A}}(x), x) \}$, где $\mu_{\tilde{A}}(x) : X \to [0,1]$ – отображение множества X в единичный отрезок [0,1], которое называется функцией принадлежности нечеткого множества A.

Рассматривается нечеткая разностная система:

$$\tilde{X}_{k+1} = R_k \circ \tilde{X}_k, \ k = 0,1,2,... \tag{1}$$

где $\tilde{X}(t_0) = \tilde{X}_0 \in E^n$ – компактное множество начальных состояний, $\tilde{X}(t_k) = \tilde{X}_k$ – нечеткие множества в $X = R^n$ возможных состояний системы в моменты времени $t_k \in T$, которые определяют решения системы, $\mathrm{R}(t_k) = \mathrm{R}_k$ – некоторые нечеткие отображения из X в X, определяющие переходы системы, $\circ$ - операция композиции, $k = 0,1,2,...$.

Допустим, що существует траектория $\{\bar{x}_k\}_{k=0,1,2,...}$, $\bar{x}_k \in \operatorname{supp} \tilde{X}_k, k = 0,1,2,...$, которая является регулярной траекторией (РТС) системы (1).

Определение. РТС (1) $\{\bar{x}_k\}_{k=0,1,2,...}$ называется устойчивой по Ляпунову, если $\forall \bar{T} > 0, \forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0 \;\; \exists \;\; \delta(\varepsilon, \eta, \bar{T}) > 0, \gamma(\varepsilon, \eta, \bar{T}) > 0$ такие, что для любой траектории $\{x_k\}_{k=0,1,2,...}$ системы (1), начальные условия которой удовлетворяют неравенствам:

$$|| \bar{x}_0 - x_0 || < \delta ,$$

$$| \mu(x_0) - 1 | < \gamma ,$$

для $\forall k : t_k \geq \bar{T}$ справедливы неравенства:

$$|| \bar{x}_k - x_k || < \varepsilon , \; k = 0,1,2,... ,$$

$$| \mu(x_k) - 1 | < \eta , \; k = 0,1,2,... .$$

Пример разностной нечеткой системы.

Рассмотрим динамику системы

$$\tilde{X}_{k+1} = \mathrm{R}_k \circ \tilde{X}_k , \;\; k = 0,1,2,...$$

$$x_k \in \mathrm{supp}\, \tilde{X}_k = [a_k , b_k] \subseteq X = [-1,1], k = 0,1,2,...$$

$$a_{k+1} = sin(a_k), b_{k+1} = sin(b_k), a_0 = -1, b_0 = 1,$$

$$\mu_k = \begin{cases} 1 - cos(x_k), x_k \in [a_k , b_k] \\ 0, x_k \notin [a_k , b_k] \end{cases}$$

Траектории данной системы имеют вид, показанный на рис.1.

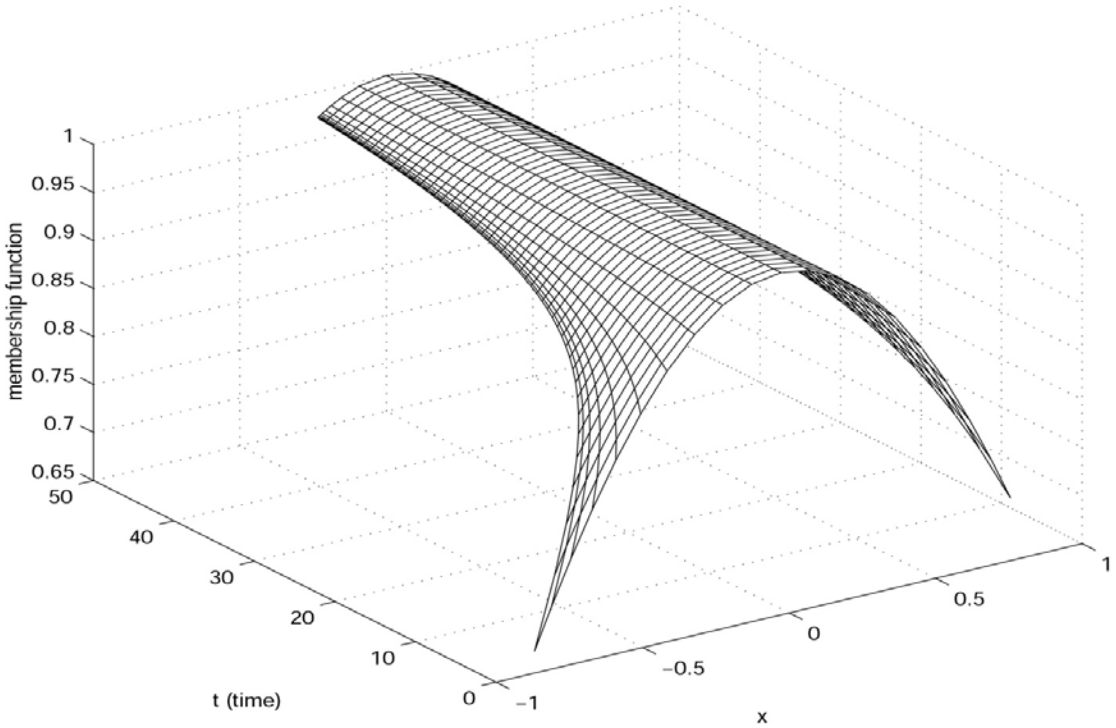

Рис.1. Траектории разностной нечеткой системы

Утверждение. Если система (1) имеет регулярную траекторию $\{\overline{x}_k\}_{k=0,1,2,...}$ и существуют функции $V: X \rightarrow [0,1]$ та $G: [0,1] \rightarrow [0,1]$ такие, что для любой траектории системы (1) $\{x_k\}_{k=0,1,2,...}$ выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} &V_k = V(x_k) \geq 0 \\ &V(\overline{x}_k) = 0 \\ &\Delta V_k = V_{k+1} - V_k \leq 0 \\ &G_k = G(\mu_k) \geq 0 \\ &G(\overline{\mu}_k) = G(1) = 0 \\ &\Delta G_k = G_{k+1} - G_k \leq 0 \end{aligned},$$

то регулярная траектория системы (1) является устойчивой по Ляпуновим.

Результаты исследования многомерных систем

I. Случай многомерной четкой разностной системы (1).

Пусть система (1) имеет вид

$$x_i(k+1) = f_i(x_i(k),k) + \sum_{j=1, j\neq i}^{m} C_{ij} x_j(k), \quad i = \overline{1,m}, \; k = 0,1,2,\ldots \quad . \tag{2}$$

Рассмотрим каждую из подсистем

$$x_i(k+1) = f_i(x_i(k),k), \quad i = \overline{1,m} \tag{3}$$

отдельно. Пусть $f_i(0,k) \equiv 0$, то есть подсистемы имеют нулевые положения равновесия, которые асимптотически устойчивы. Существуют функции Ляпунова $\upsilon_i(x_i,k)$, которые удовлетворяют вдоль решений $x_i(k)$ каждой из подсистем (3) условиям:

1. $c_{i1}\|x_i(k)\|^2 \leq \upsilon_i(x_i(k),k) \leq c_{i2}\|x_i(k)\|^2$, (4)
2. $\Delta\upsilon_i(x_i(k),k) = \upsilon_i(x_i(k+1),k+1) - \upsilon_i(x_i(k),k) \leq -c_{i3}\|x_i(k)\|^2$,
3. $\left|grad\,\upsilon_i(x_i(k),k)\right| = c_{i4}\|x_i(k)\|^2$, $c_{ij} > 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,4}$.

При этом нулевое решение $x_i(k) \equiv 0$ каждой из подсистем (3) будет экспоненциально устойчивым, то есть выполняется неравенство

$$\|x_i(k)\| \leq \sqrt{c_{i2}/c_{i1}}\,(1 - c_{i3}/c_{i2})^{k/2}\|x_i(0)\|.$$

Рассмотрим случай линейных подсистем

$$x_i(k+1) = A_i x_i(k), \; k = 0,1,2,\ldots \; i = \overline{1,m}. \tag{5}$$

Замкнутая система имеет вид

$$x_i(k+1) = A_i x_i(k) + \sum_{j=1, j\neq i}^{m} C_{ij} x_j(k), \; k = 0,1,2,\ldots \; i = \overline{1,m}. \tag{6}$$

Обозначим

$$\varphi\ (H_0)=\lambda_{max}(H_0)/\,\lambda_{min}(H_0),\ \ \gamma\ (H_0)=\lambda_{min}(Q_0)/\,\lambda_{max}(H_0),$$

где $H_0,\ Q_0$ - симметрические положительно определенные матрицы, связанные матричным разностным уравнением Ляпунова

$$H_0-R^T H_0 R=Q_0. \tag{7}$$

Здесь $R=\{r_{ij}\},\ i,j=\overline{1,m}$, - квадратная матрица, элементы которой определяются соотношениями

$$r_{ij}=\begin{cases}1+\left[-\lambda_{min}(Q_i)+\sum\limits_{s=1,s\neq i}^{m}\left|A_i^T H_i C_{is}\right|\right]/\,\lambda_{max}(H_i),\ i=j\\ \left[\left|A_i^T H_i C_{ij}\right|+\sum\limits_{s=1,s\neq i}^{m}\left|C_{ij}^T H_i C_{is}\right|\right]/\,\lambda_{min}(H_j),\ i\neq j\end{cases} \tag{8}$$

$$K=\max_{i=\overline{1,m}}\{\lambda_{max}(H_i)\}/\min_{i=\overline{1,m}}\{\lambda_{min}(H_i)\}. \tag{9}$$

а $H_i,\ Q_i,\ i=\overline{1,m}$ симметрические положительно определенные матрицы, которые входят в матричные разностные уравнения Ляпунова

$$H_i-A_i^T H_i A_i=Q_i,\ i=\overline{1,m}. \tag{10}$$

Теорема. *Пусть для каждой из подсистем (5) существуют положительно определенные матрицы* $H_i,\ i=\overline{1,m}$*, такие, что матрица* $R=\{r_{ij}\},\ i,j=\overline{1,m}$ *вида (8) асимптотически устойчива (имеет собственные числа* $\left|\lambda_i(R)\right|<1,\ i=\overline{1,m}$*). Тогда исходная система (6) также асимптотически устойчива и для ее решения* $x(k)$ *справедливо*

$$\|x(k)\|<K\sqrt{\varphi\ (H_0)}\,(1-\gamma\ (H_0))^{k/2}\|x(0)\|,\ k=1,2,\ldots. \tag{11}$$

II. Подход к качественному анализу многомерных нечетких разностных систем.

Пусть задана динамическая система *S*, множество состояний которой описывается нечеткими множествами $\tilde{A}_S=\{(x,\mu_S(x)),x\in X\}$, где *X* - некоторое универсальное множество. Предположим, что в системе выделено две подсистемы S_1,S_2, состояния которых описываются нечеткими множествами $\tilde{A}_{S_1}=\{(x_1,\mu_{S_1}(x_1)),x_1\in X_1\}$ и $\tilde{A}_{S_2}=\{(x_2,\mu_{S_2}(x_2)),x_2\in X_2\}$ универсальных множеств X_1,X_2 соответственно, $X_1\cup X_2=X$. Отождествляя $\mu_{S_1}(x_1)$ та $\mu_{S_2}(x_2)$ с полезностью подсистем S_1,S_2, будем представлять величины меры принадлежности $\mu_S(x)$ в виде

$$\mu_S(x)=[\mu_{S_1}(x_1)]^{\alpha}[\mu_{S_2}(x_2)]^{\beta}, \tag{12}$$

где $\alpha,\beta\geq 0$.

Нахождение α,β можно провести на основе методики принятия решения в многокритериальной ситуации с учетом важности критериев.

Пусть элементы квадратной матрицы $P=\{p_{ij}\}_{i,j=\overline{1,2}}$, $p_{ij}=1,\ p_{ij}\geq 0,\ i,j=\overline{1,2}, i\neq j$ определяют важности подсистем S_1,S_2. Матрица с неотрицательными элементами называется *М*-матрицей (позитивной матрицей). По теореме Перрона-Фробениуса она имеет максимальное собственное число $\lambda(P)\geq 0$ и неотрицательный собственный вектор $v(P)=(v_1,v_2)$, соответствующий собственному числу $\lambda(P)$. Выбираем $\alpha=v_1,\beta=v_2$, получаем показатели степеней в (12). Кроме этого, $\mu_{S_1}(x_1)+\mu_{S_2}(x_2)=1$. В результате нахождение функций $\mu_{S_1}(x_1)$ и $\mu_{S_2}(x_2)$ сводится к решению нелинейной системы уравнений

$$\begin{aligned}&[\mu_{S_1}(x_1)]^{\alpha}[\mu_{S_2}(x_2)]^{\beta}=\mu_S(x)\\&\mu_{S_1}(x_1)+\mu_{S_2}(x_2)=1\end{aligned}. \qquad (13)$$

Заключение

Предложенные процедуры декомпозиции и агрегирования нечетких систем на основе введенной операции с нечеткими множествами позволяют рассмотреть задачи качественного анализа динамики многомерных нечетких систем вида (1) с использованием метода вектор-функций Ляпунова.

Благодарности

Работа опубликована при финансовой поддержке проекта **ITHEA XXI** Института информационных теорий и приложений FOI ITHEA Болгария www.ithea.org и Ассоциации создателей и пользователей интеллектуальных систем ADUIS Украина www.aduis.com.ua.

Список литературы

[Ивохин, Волчков, 2006] Ивохін Е.В., Волчков С.А. Качественное исследование динамики нечетких дискретных систем// Информационно-управляющие комплексы и системы. —2006. — №1. — С. 114-122. (укр. яз.).

[Меренков, 2000] Меренков Ю.Н. Устойчивоподобные свойства дифференциальных включений, нечетких и стохастических дифференциальных уравнений М.:Ун-т Др.Нар., 2000. 123с.

[Пушков, 2001] Пушков С.Т. Об общей теории нечетких систем: глобальное состояние и нечеткая глобальная реакция нечеткой системы// Изв.РАН. Теория и системы управления, 2001, №5, стр. 105-109.

[Чуличков, 2000] Чуличков А.И. Математические модели нелинейной динамики. М: Физматлит, 2000. 294с.

Сведения об авторе

***Ивохин Евгений Викторович** – доцент, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики. Киев, Украина. E-mail: ivohin@univ.kiev.ua*