ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ И ДВОЙСТВЕННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА "ЗАТРАТЫ-ВЫПУСК"

Игорь Ляшенко, Елена Ляшенко, Андрей Онищенко

Аннотация: *В статье авторами предложены новые двойственные модели цен для динамической модели Леонтьева «затраты-выпуск», которые используют разные гипотезы относительно финансовых балансов. Параллельно к классической гипотезе о отсутствии денежных запасов используется одна из трех альтернативных: гипотеза о неизменности во времени общей стоимости капитала, гипотеза о расширении производства только за счет инфляции, а также гипотеза о коррупции при расширении производства. В зависимости от принятой гипотезы получены разные магистральные траектории цен.*

Ключевые слова: *динамическая модель Леонтьева «затраты-выпуск», двойственная динамическая модель, экономические гипотезы относительно финансовых балансов, динамика равновесных цен.*

ACM Classification Keywords: *I. Computing Methodologies, H.4.2 Information Systems Applications: Types of Systems: Decision Support*

Conference: *The paper is selected from XVth International Conference "Knowledge-Dialogue-Solution" KDS-2 2009, Kyiv, Ukraine, October, 2009.*

Введение

Изучение отраслевой структуры экономики в натуральных показателях приводит к необходимости перехода к соответствующей стоимостной структуре – ценовым показателям. Определение динамики цен с учетом разнообразных экономических гипотез позволяет проанализировать существующую систему цен, сравнить ее с расчетными значениями, установить взаимосвязь основных показателей динамики натуральных и стоимостных моделей.

Постановка задачи

В развитии экономико-математического моделирования, как в теоретическом так и практическом аспектах, особую роль сыграла модель Леонтьева [1, 2], ставшая основой линейной экономики. Математическая формализация модели имеет вид:

$$x = Ax + y, \quad x \ge 0, \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор-столбик валового выпуска продукции, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ – вектор-столбик конечного продукта, $A = (a_{ij})_1^n \ge 0$ – неотрицательная матрица коэффициентов прямых производственных затрат.

Данной модели соответствует двойственная модель цен [2]:

$$p = pA + r, \quad p \ge 0, \tag{2}$$

где $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ – вектор-строка цен на продукцию, $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ – вектор-строка коэффициентов прибавочной стоимости.

Умножив соотношение (1) слева на вектор p, а соотношение (2) – справа на вектор x, приходим к двум соотношениям:

$$px = pAx + py, \quad x \geq 0, \tag{3}$$

$$px = pAx + rx, \quad p \geq 0.$$

Сравнивая полученные соотношения, приходим к условию:

$$py = rx,\ x \geq 0,\ p \geq 0\ , \tag{4}$$

левая часть которого отражает стоимость конечного продукта, а правая – суммарную прибавочную стоимость. Таким образом, соотношение (4) является гипотезой отсутствия денежных запасов, т.е. созданная стоимость равна использованной стоимости. Что является классической экономической гипотезой всех балансовых экономико-математических моделей.

Следующим шагом развития модели (1) стал переход к динамической модели “затраты-выпуск” [2]:

$$x = Ax + B\dot{x} + y, \quad x \geq 0, \tag{5}$$

где $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \ldots, \dot{x}_n(t))^T$ – вектор-столбик приростов производства продукции, $B = (b_{ij})_1^n \geq 0$ – неотрицательная матрица коэффициентов фондоемкости приростов производства.

Умножая соотношение (5) слева на вектор p и учитывая гипотезы (4) получаем:

$$px = pAx + pB\dot{x} + rx, \quad x \geq 0, \quad p \geq 0. \tag{6}$$

Экономический смысл слагаемого $pB\dot{x}$ заключается в отражении им стоимости капитала необходимого для обеспечения прироста производства $\dot{x}$.

В математических исследованиях переход к двойственной дифференциальной модели осуществляют с помощью постановки задачи оптимального управления и построения гамильтониана, относительно которого записываются необходимые условия оптимальности. В механике, как правило, гамильтониан отражает суммарную энергию: потенциальную и кинетическую. В случае модели (5) гамильтониан

$$H = pBx$$

отражает суммарную стоимость капитала. При этом классическая гипотеза о неизменности во времени этой стоимости формализируется следующим образом:

$$\frac{d}{dt}(pBx) = \dot{p}Bx + pB\dot{x} = 0\,. \tag{7}$$

Учитывая данный результат, соотношение (6) можно записать в виде:

$$(p - pA + \dot{p}B - r)x = 0, \quad x \geq 0, \quad p \geq 0. \tag{8}$$

Для выполнения условия (8) при любом $x \geq 0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$p = pA - \dot{p}B + r, \quad p \geq 0. \tag{9}$$

Полученная модель является двойственной по отношению к модели (5) при условии, что выполняются две классические гипотезы: статическая (4) и динамическая (7).

Возможно рассмотрение иных альтернативных к введенным гипотез. В частности,

$$pB\dot{x} = \dot{p}Bx, \quad (10)$$

которая отражает условие увеличения общей стоимости прироста капитала за счет инфляции стоимости общего капитала, а также

$$(1+\varepsilon)pB\dot{x} = \dot{p}Bx, \quad \varepsilon > 0, \quad (11)$$

которая вводит понятие коррупции (“отката”) в объеме $\varepsilon pB\dot{x}$ при осуществлении прироста производства.

Задача данной работы состоит в обосновании новых гипотез (10) и (11), а также в исследовании магистральных траекторий валового выпуска продукции и соответствующих траекторий цен, характерных для введенных трех случаев.

Результаты

1. Магистральные траектории классических прямой и двойственной моделей Леонтьева “затраты-выпуск”.

Проводя исследование прямой модели, будем искать общее решение системы линейных дифференциальных уравнений (5) как общее решение системы однородных уравнений (при $y \equiv 0$) и частное решение системы неоднородных уравнений (5) при общем значении $y(t)$.

Рассмотрим неотрицательное общее решение системы дифференциальных уравнений (5) при условии $y \equiv 0$ в виде

$$x(t) = e^{\mu t}x(0), \quad (12)$$

где μ – неотрицательный числовой параметр, $x(0) \geq 0$ – произвольный неотрицательный вектор.

Подставляя условие (12) в (5), приходим к соотношению

$$x(0) = \mu(I-A)^{-1}Bx(0). \quad (13)$$

Вводя предположение о продуктивности матрицы прямых затрат $A \geq 0$ [2], приходим к выводу, что ее корень Фробениуса $\lambda_A \in (0,1)$ и существует обратная неотрицательная матрица $(I-A)^{-1} \geq 0$.

Перепишем соотношение (13) в виде

$$\left((I-A)^{-1}B - \lambda I\right)x(0) = 0, \quad x(0) \geq 0, \quad \mu = \lambda^{-1}. \quad (14)$$

Условие (14) имеет место лишь в случае равенства λ корню Фробениуса, а $x(0)$ правому вектору Фробениуса неотрицательной матрицы $(I-A)^{-1}B$, то есть

$$\lambda = \lambda_{(I-A)^{-1}B} > 0, \quad x(0) = x_{(I-A)^{-1}B} \geq 0. \quad (15)$$

Тогда темп роста валового выпуска продукции удовлетворяет неравенству:

$$\mu = \lambda^{-1}_{(I-A)^{-1}B} > 0. \quad (16)$$

Следующее неотрицательное частное решение системы неоднородных уравнений (5) будем искать при условии $y = y_0 e^{st}$, где s – числовой параметр, а $y_0 \geq 0$ – заданный неотрицательный вектор. Согласно общей теории дифференциальных уравнений оно также будет иметь вид

$$x_0(t) = e^{st} x_0, \quad x_0 \geq 0,$$

что позволяет перейти к соотношению

$$(I - A - sB)x_0 = y_0 \geq 0,$$

откуда следует

$$\left(I - s(I - A)^{-1} B\right)x_0 = (I - A)^{-1} y_0 \geq 0. \tag{17}$$

Соотношение (17) при условии, что матрица $s(I - A)^{-1} B \geq 0$ продуктивна, имеет неотрицательное решение

$$x_0 = \left(I - s(I - A)^{-1} B\right)^{-1} (I - A)^{-1} y_0 \geq 0. \tag{18}$$

Из условия продуктивности матрицы $s(I - A)^{-1} B \geq 0$ следует, что

$$s\lambda_{(I-A)^{-1}B} < 1,$$

то есть

$$s < \mu = \lambda_{(I-A)^{-1}B}. \tag{19}$$

Таким образом, общее неотрицательное решение системы дифференциальных уравнений (5) при $y(t) = e^{st} y_0$, $s < \mu = \lambda_{(I-A)^{-1}B}$ задается соотношением

$$x(t) = Ce^{\mu t} x_{(I-A)^{-1}B} + e^{st} (I - A - sB)^{-1} y_0, \tag{20}$$

где $C > 0$ произвольное положительное число, а μ и s удовлетворяет условию (19).

Анализ полученного решения при $t \to \infty$ указывает на то, что доминирующим является первое слагаемое. Таким образом, магистральной траекторией валового выпуска продукции является правый вектор Фробениуса матрицы $(I - A)^{-1} B$ с темпом роста μ, который равен обратному значению корня Фробениуса этой же матрицы (16).

Придерживаясь проведенной выше процедуры, проведем исследование двойственной модели цен (9), а именно определим общее неотрицательное решение соответствующей системы дифференциальных уравнений и магистральную траекторию развития. Для этого на первом этапе будем искать решение при условии $r \equiv 0$ в виде:

$$p(t) = e^{\nu t} p(0), \tag{21}$$

где ν неизвестный числовой параметр, $p(0) \geq 0$ – произвольный неотрицательный вектор.

Подставив соотношение (21) в (9) приходим к равенству

$$p(0)\left(I + \nu B(I - A)^{-1}\right) = 0, \quad p(0) \geq 0. \tag{22}$$

Последнее перепишем в виде

$$p(0)\left(B(I - A)^{-1} - \lambda I\right) = 0, \quad p(0) \geq 0, \quad \nu = -\lambda^{-1}. \tag{23}$$

Из условия (22) следует, что λ является корнем Фробениуса, а $p(0)$ – левым вектором Фробениуса неотрицательной матрицы $B(I-A)^{-1} \geq 0$, то есть

$$\lambda = \lambda_{B(I-A)^{-1}} > 0, \quad p(0) = p_{B(I-A)^{-1}} \geq 0\,. \tag{24}$$

Поскольку $\lambda_{B(I-A)^{-1}} = \lambda_{(I-A)^{-1}B}$, то

$$\nu = -\mu = -\lambda^{-1}_{(I-A)^{-1}B} < 0\,. \tag{25}$$

На следующем этапе ищем решение частное неотрицательное решение системы неоднородных уравнений (9) при условии $r(t) = e^{kt} r_0$, где k – некоторый числовой параметр, а $r_0 \geq 0$ – заданный неотрицательный вектор. Частное неотрицательное решение также будем искать в виде

$$p_0(t) = e^{kt} p_0, \quad p_0 \geq 0\,,$$

что приводит к соотношению

$$p_0(I - A + kB) = r_0 \geq 0,$$

откуда получаем

$$p_0\left(I + kB(I-A)^{-1}\right) = r_0 (I-A)^{-1} \geq 0\,. \tag{26}$$

Последнее соотношение при условии, что матрица $-kB(I-A)^{-1} \geq 0$ продуктивна, имеет неотрицательное решение

$$p_0 = r_0 (I-A)^{-1}\left(I + kB(I-A)^{-1}\right)^{-1} \geq 0\,.$$

Из продуктивности матрицы $-kB(I-A)^{-1} \geq 0$ следует, что

$$-k\lambda_{B(I-A)^{-1}} < 1\,,$$

то есть

$$k > \nu = -\mu = -\lambda^{-1}_{(I-A)^{-1}B}\,. \tag{27}$$

Таким образом, общее неотрицательное решение системы дифференциальных уравнений (9) при условии $r(t) = e^{kt} r_0 \geq 0$, $k > \nu = -\lambda^{-1}_{(I-A)^{-1}B}$ задается в виде:

$$p(t) = C_1 e^{-\mu t} p_{B(I-A)^{-1}} + e^{kt} (I - A + kB)^{-1} r_0\,, \tag{28}$$

где $C_1 > 0$ – произвольное положительное число, а $k > -\mu$.

Анализ полученного решения при $t \to \infty$ позволяет утверждать, что в (28) доминирующим является второе слагаемое. Отсюда приходим к выводу о существовании магистральной траектории цен – вектор r_0, который изменяется с темпом $k > -\mu$ во времени.

2. Гипотеза о расширении производства за счет инфляции.

Введенная гипотеза описывается соотношением (10). С учетом этого, модель (6) принимает вид:

$$\left(p - pA - \dot{p}B - r\right)x = 0, \quad x \geq 0, \quad p \geq 0. \tag{29}$$

Полученное равенство имеет место при любых $x \geq 0$ тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$p = pA + \dot{p}B + r, \quad p \geq 0. \tag{30}$$

Полученная модель является двойственной моделью к (5) при условии, что выполняются две гипотезы: классическая гипотеза (4) и новая динамическая – (10).

Рассмотрим задачу построения магистральной траектории для двойственной модели (30). Для этого необходимо определить общее неотрицательное решение соответствующей системы дифференциальных уравнений. Общее неотрицательное решение системы (30) при $r \equiv 0$ будем искать в виде

$$p(t) = e^{\nu t} p(0), \tag{31}$$

где ν – неизвестный числовой параметр, $p(0) \geq 0$ – произвольный неотрицательный вектор.

Подставив соотношение (31) в (30) получаем

$$p(0)\left(I - \nu B(I - A)^{-1}\right) = 0, \quad p(0) \geq 0. \tag{32}$$

Уравнение (32) перепишем в виде

$$p(0)\left(B(I - A)^{-1} - \lambda I\right) = 0, \quad p(0) \geq 0, \quad \nu = \lambda^{-1}. \tag{33}$$

Из полученного результата следует, что λ является корнем Фробениуса, а $p(0)$ – левым вектором Фробениуса неотрицательной матрицы $B(I - A)^{-1} \geq 0$, то есть

$$\lambda = \lambda_{B(I-A)^{-1}} > 0, \quad p(0) = p_{B(I-A)^{-1}} \geq 0. \tag{34}$$

Таким образом, приходим к условию

$$\nu = \mu = \lambda^{-1}_{(I-A)^{-1}B} > 0. \tag{35}$$

Далее будем искать частное неотрицательное решение системы (30) при условии $r = e^{kt} r_0$, где k – некоторый числовой параметр, а $r_0 \geq 0$ – заданный неотрицательный вектор в виде

$$p_0(t) = e^{kt} p_0, \quad p_0 \geq 0,$$

что позволяет прийти к соотношению

$$p_0(0)(I - A - kB) = r_0 \geq 0,$$

из которого следует

$$p_0\left(I - kB(I - A)^{-1}\right) = r_0 (I - A)^{-1} \geq 0. \tag{36}$$

Полученное соотношение при условии, что матрица $kB(I-A)^{-1} \geq 0$ продуктивна, имеет неотрицательное решение

$$p_0 = r_0 (I-A)^{-1} \left(I - kB(I-A)^{-1}\right)^{-1} \geq 0 .$$

Из условия продуктивности матрицы $kB(I-A)^{-1} \geq 0$ следует, что

$$k\lambda_{B(I-A)^{-1}} < 1 ,$$

то есть

$$k < \nu = \mu = \lambda^{-1}_{(I-A)^{-1}B} . \tag{37}$$

Таким образом, общее неотрицательное решение системы дифференциальных уравнений (30) при $r = e^{kt} r_0 \geq 0$, $k < \nu = \mu = \lambda^{-1}_{(I-A)^{-1}B}$ задается соотношением

$$p(t) = C_2 e^{\mu t} p_{B(I-A)^{-1}} + e^{kt}_{r_0} (I - A - kB)^{-1} , \tag{38}$$

где $C_2 > 0$ – произвольное положительное число, а μ и k удовлетворяют условию (37).

Поскольку при $t \to \infty$ в решении (38) доминирующим является первое слагаемое, то можно утверждать, что левый вектор Фробениуса матрицы $B(I-A)^{-1}$ является магистральной траекторией, которая возрастает с темпом μ, равному обратному значению корня Фробениуса этой же матрицы.

Проведенное исследование позволяет сделать следующий вывод: в условиях выполнения гипотезы о увеличении производства только за счет инфляции цен возможно прийти к сбалансированному состоянию экономики, когда и производство продукции, и цены возрастают с одним и тем же темпом.

3. Гипотеза о коррупции (“откат”) при расширении производства.

Введенная гипотеза отражена соотношением (11). Включение ее в модель (6) приводит к следующему равенству

$$\left(p - pA - (1+\varepsilon)^{-1} \dot{p}B - r\right)x = 0, \quad x \geq 0, \quad p \geq 0. \tag{39}$$

Для выполнения полученного соотношения при любом $x \geq 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$p = pA + (1+\varepsilon)^{-1} \dot{p}B + r, \quad p \geq 0. \tag{40}$$

Полученная модель является двойственной по отношению к (5) при условии, что выполняются две гипотезы: классическая (4) и динамическая (11).

Рассмотрим задачу построения магистральной траектории двойственной модели (40). Учитывая идентичность алгоритма построения выше рассмотренному кратко остановимся на основных результатах.

Найдем общее неотрицательное решение системы (40) при $r \equiv 0$ в виде

$$p(t) = e^{\nu t} p(0), \quad p(0) \geq 0, \tag{41}$$

от которого переходим к соотношению

$$p(0)\left(B(I-A)^{-1}-\lambda I\right)=0, \quad p(0)\geq 0, \quad \nu=(1+\varepsilon)\lambda^{-1}. \tag{42}$$

Из последнего следует, что λ является корнем Фробениуса, а $p(0)$ – левым вектором Фробениуса неотрицательной матрицы $B(I-A)^{-1}\geq 0$, то есть

$$\nu=(1+\varepsilon)\lambda_{(I-A)^{-1}B}=(1+\varepsilon)\mu>0\,. \tag{43}$$

Соответствующее частное неотрицательное решение системы (40) при $r(t)=e^{kt}r_0$ в виде $p_0(t)=e^{kt}p_0, \quad p_0\geq 0,$ где k – некоторый числовой параметр, а $r_0\geq 0$ – заданный неотрицательный вектор, приводит к соотношению

$$p_0\left(I-k(1+\varepsilon)^{-1}B(I-A)^{-1}\right)=r_0(I-A)^{-1}\geq 0. \tag{44}$$

Полученное уравнение при условии продуктивности матрицы $k(1+\varepsilon)^{-1}B(I-A)^{-1}\geq 0$ имеет неотрицательное решение

$$p_0=r_0(I-A)^{-1}\left(I-k(1+\varepsilon)^{-1}B(I-A)^{-1}\right)^{-1}\geq 0.$$

Из условия продуктивности матрицы $k(1+\varepsilon)^{-1}B(I-A)^{-1}$ следует неравенство

$$k(1+\varepsilon)^{-1}\lambda_{B(I-A)^{-1}}<1\,,$$

то есть

$$k<\nu=(1+\varepsilon)\mu=(1+\varepsilon)\lambda^{-1}_{(I-A)^{-1}B}\,. \tag{45}$$

Таким образом, общее неотрицательное решение системы дифференциальных уравнений (40) при $r(t)=e^{kt}r_0\geq 0$, $k<(1+\varepsilon)\mu=(1+\varepsilon)\lambda^{-1}_{(I-A)^{-1}B}$ задается соотношением

$$p(t)=C_3e^{(1+\varepsilon)\mu t}p_{B(I-A)^{-1}}+e^{kt}_{r_0}\left(I-A-k(1+\varepsilon)^{-1}B\right)^{-1}, \tag{46}$$

где $C_3>0$ – произвольное положительное число, а μ и k удовлетворяют (45).

Анализ полученного решения при $t\to\infty$ указывает на доминирующее первое слагаемое, что позволяет рассматривать левый вектор Фробениуса матрицы $B(I-A)^{-1}$ магистральной траекторией цен, которая возрастает с темпом $(1+\varepsilon)\mu$, связанным условием (16) с соответствующим корнем Фробениуса.

Таким образом, при выполнении гипотезы о коррупции при расширении производства достигается состояние сбалансированности экономики, в которой цены возрастают более быстрым темпом, чем производство продукции.

Замечание. Соотношение темпов магистральных траекторий выпуска продукции и цен

$$\nu=(1+\varepsilon)\mu$$

дает возможность оценить уровень коррупции

$$\varepsilon = \frac{\nu}{\mu} - 1 \tag{47}$$

В качестве примера приведем следующие данные: при $\mu = 0{,}08$, $\nu = 0{,}12$ получаем $\varepsilon = 0{,}5$, а при $\mu = 0{,}08$, $\nu = 0{,}16$ – $\varepsilon = 1$.

Выводы

Исследование магистральных траекторий в случае классической гипотезы о постоянстве во времени суммарного объема капитала показало, что темп выпуска продукции определяется только матрицами прямых затрат A и фондоемкости прироста продукции B, а темп роста цен – вектором прибавочной стоимости r. Введение новой гипотезы о расширении производства только за счет инфляции цен приводит к результату сбалансированности темпов валового выпуска продукции и роста цен (выполняется строгое равенство). Вторая рассмотренная гипотеза о коррупции при расширении производства приводит к закономерным результатам: темп роста цен опережает темп роста объемов валового выпуска продукции. Наличие информации о данных характеристиках позволяет оценивать уровень коррупции.

Благодарности

Работа опубликована при финансовой поддержке проекта **ITHEA XXI** Института информационных теорий и приложений FOI ITHEA Болгария www.ithea.org и Ассоциации создателей и пользователей интеллектуальных систем ADUIS Украина www.aduis.com.ua.

Литература

[Леонтьев, 1997] Леонтьев В.В. Межотраслевая экономика. – М.: ОАО «Издательство «Экономика», 1997. – 479 с.

[Ляшенко, 2009] Ляшенко І.М., Онищенко А.М. Прямі та двоїсті балансові моделі “витрати-випуск” // Економічна кібернетика. – Донецьк, 2009. – №1-2.

[Пономаренко, 1995] Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М. Основи математичної економіки. – К.: Інформтехніка. 1995. – 320 с.

Информация об авторах

И.Н. Ляшенко *– д-р физ.-мат. наук, заслуженный профессор Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, 01601, ул. Владимирская 64, Киев, Украина*

Е.И. Ляшенко *– д-р екон.наук, профессор кафедры экономической кибернетики Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, 01601, ул. Владимирская 64, Киев, Украина*

А.М. Онищенко *– канд. екон. наук, доцент, докторант Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, 01601, ул. Владимирская 64, Киев, Украина, e-mail: onyshchenko@yandex.ru*