Krassimir Markov, Vitalii Velychko, Oleksy Voloshin
(editors)

# Natural and Artificial Intelligence

ITHEA
SOFIA
2010

Krassimir Markov, Vitalii Velychko, Oleksy Voloshin (ed.)
Natural and Artificial Intelligence
ITHEA®
Sofia, Bulgaria, 2010
ISBN 978-954-16-0043-9

First edition

Recommended for publication by The Scientific Concil of the Institute of Information Theories and Applications FOI ITHEA

This book is engraved in prof. Zinoviy Lvovich Rabinovich memory. He was a great Ukrainian scientist, co-founder of ITHEA International Scientific Society (ITHEA ISS). To do homage to the remarkable world-known scientific leader and teacher this book is published in Russian language and is concerned to some of the main areas of interest of Prof. Rabinovich.

The book is opened by the last paper of Prof. Rabinovich specially written for ITHEA ISS. Further the book maintains articles on actual problems of natural and artificial intelligence, information interaction and corresponded intelligent technologies, expert systems, robotics, classification, business intelligence; etc. In more details, the papers are concerned in:conceptual problems of the natural and artificial intelligent systems: structures and functions of the human memory, ontological models of knowledge representation, knowledge extraction from the natural language texts;network technologies;evolution and perspectives of development of the mechatronics and robotics;visual communication by gestures and movements, psihology of vision and information technologies of computer vision, image processing;object classification using qualitative characteristics;methods for comparing of alternatives and their ranging in the procedures of expert knowledge processing;ecology of programming – a new trend in the software engineering;decision support systems for economics and banking;systems for automated support of disaster risk management;and etc.

It is represented that book articles will be interesting for experts in the field of information technologies as well as for practical users.

General Sponsor: Consortium FOI Bulgaria (www.foibg.com).

Printed in Bulgaria



**ISBN 978-954-16-0043-9**

C\o Jusautor, Sofia, 2010

# МЕТОДЫ АНАЛИЗА МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ

**Алексей Волошин, Григорий Кудин, Владимир Кудин**

***Аннотация.***_Предложено применение методов базисных матриц (МБМ), теории возмущения псевдообратных и проекционных матриц (ТПМ) для анализа влияний малых возмущений в линейных моделях._

***Ключевые слова:*** _линейныемодели, количественный и качественный анализ, базисная матрица,. псевдообращение матриц_

***ACM Classification Keywords***_: : I. Computing Methodologies – I.6. Simulation and modeling_

## Введение

Подавляющее большинство технических, экономических процессов описываются в классе линейных моделей (ЛМ). Например, основная макроэкономическая модель, модель Леонтьева (МЛ) [Волошин, 2004] - в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) при ограничениях на переменные в виде гиперпараллелепипеда. Известно, что:

1. Наличие нечеткостей, неопределенностей значений параметров ЛМ [Кудин. 2008] предопределяет наличие в контуре принятия решения экспертов (ЛПР), которые должны качественно проанализировать структуру модели и указать механизм (процедуру) устранение неопределенностей при ее формировании.

2. Учет неточности представления ЛМ (так называемая проблема адекватности математической и машинной модели) предопределяет разработку механизма согласования результатов проведения вычислений при разной точности представления модели.

3. Некорректность модели при проведении вычислений в рамках ЛМ может существенно повлиять на качественные характеристики, например, величину ранга [Кудин, 2002] .

4. Структурные связи в классе ЛМ с прямоугольной матрицей ограничений используются при построении современных методов [Кириченко 2007].

**Цель исследования.** Предложить новые методыисследования влияния малых изменений (возмущений) ЛМ, на точность решения, величину невязок на широком классе ЛМ.

**Концепция анализа** ЛМ предполагается двухстадийной. Первая стадия содержит анализ модели - “порождающейї” (эталонной, математической, точной), а вторая стадия - анализ “возмущенной” (неточной, нечеткой, машинной).

## Постановка задачи

Предметом исследования будет ЛМ:

$$Au = C \qquad (1)$$

где $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,m}$ матрица размерности $(n \times m)$, $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jm})$, $j \in J = \{1,2,\ldots,n\}$, $I = \{1,2,\ldots,m\}$ – строки матрицы $\grave{A}$ , $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^T$, – вектор переменных, $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$, – вектор градиента ограничений модели.

Предполагаются заданными модели вида (1 ) с известными (или установленными) свойствами и слабо возмущенные (реальные вычисления с разным уровнем точности и учетом нечеткости задания значений или малых возмущений). Это ставит, как начальную задачу, анализ непротиворечивости структурных элементов :ЛМ (1), установление ее невырожденности (величины ранга) матрицы ограничений, направленной коррекции величины ранга матрицы ограничений изменением отдельных элементов модели, исследование свойств разрешимости, единственности или неединственности решений, а также дальнейшие задачи - анализа влияния малых возмущений на свойства ЛМ..

## Основные положения метода базисных матриц (МБМ)

В МБМ введены в рассмотрение строчные базисные матрицы. Базисные матрицы в ходе итераций последовательно изменяются замещением строк вспомогательной СЛАУ строками (нормалями ограничений) основной СЛАУ. В общем случае в исследуемой модели количество ограничений превышает количество переменных. В частности, для МЛ предполагается $m = n$ (для анализа вводится в рассмотрение вспомогательная СЛАУ с известными свойствами соответствующей размерности).

Определение 1. Квадратная матрица $A_b$, составленная с m линейно независимых нормалей ограничений (вспомогательной СЛАУ), будем называть базисной, а решение соответствующей ей системы уравнений $A_b u_0^T = c^0$ базисным. Две базисные матрицы с отличной одной строкой будем называть смежными.

Пусть $\beta_{ij}, i, j = 1,2,\ldots m$ элементы базисной матрицы $A_b$ $e_{ri}$ - элементы матрицы $A_b^{-1}$ обратной к $A_б$; $e_k = (A_б^{-1})_k$ .- столбец обратной матрицы. Решение $u_0 = (u_{01}, u_{02}, \ldots, u_{0m})^T$, системы уравнений $A_b u = c^0$, где $c^0$ - подвектор C, - компоненты которого состоят из правых частей ограничений, нормали, которых образовывают базисную матрицу $A_б$; $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, ..., \alpha_{rm})$ - вектор развития нормали ограничения $a_r u_1 \le c_r$ по строками базисной матрицы $A_b$, $\Delta_r = a_r u_0^T - c_r$ - невязкая r-го ограничение в вершине $u_0$; $J_b, J_H$, $J = J_b \cup J_H$ - множества индексов базисных и небазисных ограничений. Установлены формулы связи базисного решения, коэффициентов развития нормалей ограничений, коэффициентов обратной матрицы, невязок ограничений при переходе к базисной матрице $\overline{A}_b$ (смежной), которая образовывается из матрицы $A_б$ заменой ее строки $a_k$ на $a_l$, что не входит в базисную матрицу $A_b$ [Кудин, 2002]. При нахождении формул и основных соотношений между элементами метода при переходе от одной базисной матрицы к следующей считаем, что $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}$ - нормали ограничений, $a_j u^T \le c_j$, $j \in J_b$, где $J_б = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ - индексы ограничений, нормали которых образовывают строки базисной матрицы $A_b$, $a_l$ - нормаль ограничения $a_l u \le c_l$, $\alpha_l = (\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, ..., \alpha_{lm})$ - коэффициенты разложения вектора $a_l$ по строкам базисной матрицы $A_б$.

**Теорема1.** Между элементами МБМ в смежных базисных матрицах имеют место соотношения

$$\overline{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}},\ \overline{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li}, \quad r = \overline{0,n};\ i = \overline{1,m};\ i \ne k; \tag{2}$$

$$\overline{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}},\ \overline{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li}, \quad r = \overline{1,m};\ i = \overline{1,m};\ i \ne k; \tag{3}$$

$$\overline{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{1k}} \Delta_l, \qquad j = \overline{1,m}, \tag{4}$$

$$\overline{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}}, \ \overline{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}} \Delta_l, \ r = \overline{1,n}; \quad r \neq k\ ; \tag{5}$$

причем условием невырожденности является $\alpha_{lk} \neq 0$, допустимости опорного базисного решения

$$\alpha_{lk} < 0 \tag{6}$$

**Теорема 2.** Для существования единственного решения (1) необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_{lk}^{(i)} \neq 0,\ i = \overline{1,m}$, где $\alpha_{lk}^{(i)}$ ведущие элементы симплексной итерации МБМ по замещению строк базисной матрицы нормалями ограничений (1).

**Следствие.** Ранг матрицы ограничений системы (1) определяется количеством корректных замещений строк матрицы ограничений вспомогательной системы векторами нормалями (1), по формулам (2)-(6).

**Теорема 3.** Необходимым условием невырождености новой $\overline{A}_b$ образованной замещением нормали $a_l$, которая занимает $k$-ю строку в базисной матрице возмущенной нормалью $(a_l + a_l^{'})$ являются выполнения условия $\exists\ i\ \ e_{ik} \neq 0$, где $e_{ik}$ элемент $A_b^{-1}$, такого, что $\alpha_{li}^{'} \neq 0$. Решение будет определяться соотношением $\overline{u}_{oj} = u_{oj} - \frac{e_{jk}}{\tilde{\alpha}_{lk}} \overline{\Delta}_l$, причем если $\overline{\Delta}_l = 0$, то $\overline{u}_{oj} = u_{oj}$, $j = 1, m$.

**Следствие.**Если ведущий элемент итерации $\alpha_{lk} \neq 0$, то при возмущении сохраняющем невырожденность должно выполняться $\alpha_{lk}^{'} + \alpha_{lk} \neq 0$.

Теорема дает условия направленного восстановления свойства невырожденности базисной матрицы (1) и анализировать влияние возмущений на решение.

## Основные положения теории псевдообратных матриц

**Определение** 1 .Для матрицы $A \in R^{m\times n}$ псевдообратную матрицу $A^+ \in R^{n\times m}$ можно определить согласно условию:

$$\forall b \in R^m, \quad A^+ b = \arg\min_{x\in\Omega_A(b)} \|x\|^2, \text{ где } \Omega_A(b) = Arg\min_{x\in R^n}\|Ax - b\|^2. \tag{7}$$

В практике применения псевдообращения важными являются проекционные матрицы, которые определяются и вычисляются с использованием матриц $A$ и $A^+$:проекционные матрицы

$$Z(A) = I_n - A^+ A, \qquad Z(A^T) = I_m - AA^+ \tag{8}$$

- это проекторы на подпространство, ортогональное подпространству вектор – строк матрицы $A$ и на подпространство, ортогональное подпространству вектор - столбцов матрицы $A$ соответственно; взвешенные проекционные матрицы

$$R(A) = A^+(A^+)^T, \qquad R(A^T) = (A^+)^T A^+. \tag{9}$$

Если предположить, что расширение матрицы $A$ происходит добавлением новой строки $a^T \in R^n$ после $(i-1)$ - ой строки ( $i = \overline{2, m+1}$), т.е. образуется матрица

$$A_{i,a} = (a_{(1)} \vdots \ldots \vdots a_{(i-1)} \vdots a \vdots a_{(i)} \vdots \ldots \vdots a_{(m)})^T \ \in\ R^{(m+1)\times n}. \tag{10}$$

то при известной псевдообратной матрице $A^+ \in R^{n\times m}$ для рекуррентного вычисления псевдообратной матрицы $A^+_{i,a} \in R^{n\times(m+1)}$ имеют место соотношения - прямые формулы Гревиля.

**Теорема 3.** Если неизвестную псевдообратнаую матрицу $A^+_{i,a}$ представить в виде

$$A^+_{i,a} = (p(1)\vdots\ldots\vdots p(i-1)\vdots p(i)\vdots p(i+1)\vdots\ldots\vdots p(m+1)) \in R^{n\times(m+1)}, \tag{11}$$

где

$$P_i = (p(1)\vdots\ldots\vdots p(i-1)\vdots p(i+1)\vdots\ldots\vdots p(m+1)), \tag{12}$$

т.е. считать, что матрица $A^+_{i,a}$ может быть получена из матрицы $P_i \in R^{n\times m}$ добавлением после $(i-1)$ - го столбца вектора $p(i)$, то для матрицы $P_i$ имеет место формула:

$$P_i = (1 - p(i)a^T)A^+. \tag{13}$$

При этом неизвестный вектора $p(i)$ определяется в зависимости от свойств линейной зависимости вектора $a$ от векторов подпространства вектор – строк матрицы $A$:

1) если вектор $a$ линейно независим от векторов подпространства вектор – строк матрицы $A$, т.е.

$$a^T Z(A)a > 0, \text{ то } p(i) = Z(A)a)\|Z(A)a\|^{-2}; \tag{14}$$

2) если вектор $a$ линейно зависим от векторов подпространства вектор – строк матрицы $A$, т.е.

$$a^T Z(A)a = 0, \text{ то } p(i) = R(A)a(1 + a^T R(A)a)^{-1} \tag{15}$$

**Теорема 4.** Если для матрицы $A_{i,a} \in R^{(m+1)\times n}$ ( после $(i-1)$ - ой строки ( $i = \overline{2, m+1}$ ) матрицы $A$ расположена вектор – строка $a^T$ ), известна её псевдообратная матрица $A^+_{i,a} \in R^{n\times(m+1)}$, то для опредепения псевдообратной матрицы $A^+ \in R^{n\times m}$ (строка $a^T$ из матрицы $A_{i,a}$ удаляется ) имеют место обратные формулы Гревиля.

1) в случае линейной зависимости вектор – строки $a^T$, которая удаляется, от векторов подпространства вектор – строк матрицы $A_{ia}$, а это определяется выполнением условия

$$a^T p(i) < 1 \tag{16}$$

псевдообратная матрица $A^+ \in R^{n\times m}$ имеет вид

$$A^+ = \left(I_n + p(i)a^T(1 - a^T p(i))^{-1}\right)P_i \tag{17}$$

При этом ранг псевдообратной матрицы не изменяется, т.е. $rank\ A = rank\left(A^T \ \vdots\ a\right)^T$.

2) в случае линейной независимости вектор – строки $a^T$, которая удаляется, от векторов подпространства вектор – строк матрицы $A$, а это определяется выполнением условия

$$a^T p(i) = 1, \tag{18}$$

матрица $A^+ \in R^{n\times m}$ определяется формулой

$$A^+ = (I_n - p(i)p^T(i)\|p(i)\|^{-2})P_i, \tag{19}$$

При этом ранг псевдообратной матрицы падает, то есть : $rank\ A = rank\left(A^T \ \vdots\ a\right)^T - 1$.

Имеют место соотношения

$$\|p(i)\|^2 = R_{ii}\left(A_{i,a}^T\right), \tag{20}$$

$$1 - p^T(i)a = Z_{ii}\left(A_{i,a}^T\right). \tag{21}$$

**Замечание.** Прямые и обратные формулы Гревиля получены для проекционных,а также и для взвешенных проекционных матриц.

**Следствие**. Операция псевдообращения коммутативна с транспонированием, поэтому формулы Гревиля аналогично выписываются для варианта добавления (удаления) столбца матрицы .

Псевдообращение при возмущении элементов исходной матрицы. Пусть для матрицы

$$A = \left(a(1)\vdots\ldots\vdots a(n)\right) \equiv \left(a_{(1)}\vdots\ldots\vdots a_{(m)}\right)^T \equiv \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,\,m}\\ j=\overline{1,\,n}}} \in R^{m\times n}. \tag{22}$$

где $a(j) = (\alpha_{1j},...,\alpha_{ij},...\alpha_{mj})^T \in R^m, \quad a_{(i)} = (\alpha_{i1},...,\alpha_{ij},...\alpha_{in}) \in R^n$

известна её псевдообратная матрица

$$A^+ = \left(p(1)\vdots\ldots\vdots p(m)\right) = \left(p_{(1)}\vdots\ldots\vdots p_{(n)}\right)^T \equiv \left(p_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,\,n}\\ j=\overline{1,\,m}}} \in R^{n\times m}, \tag{23}$$

$$p(j) = (p_{1j},...,p_{ij},...p_{nj})^T \in R^n, \quad j = \overline{1,m}, \tag{24}$$

$$p_{(i)} = (p_{i1},...,p_{ij},...p_{im})^T \in R^m, \quad i = \overline{1,n}. \tag{25}$$

Если элемент $\alpha_{ij}$ матрицы $A \in R^{m\times n}$ изменяется на некоторую величину $\delta_{ij} \in R$ , т.е. она приобретает возмущённый вид

$$\tilde{A} = A + \Delta A(\delta_{ij}). \tag{26}$$

Возмущение $\Delta A(\delta_{ij})$ можно представить в матричном виде

$$\Delta A(\delta_{ij}) = \delta_{ij}\, e_m(i)\; e_n^T(j), \tag{27}$$

где векторы $e_n(j) \in R^n$ , $e_m(i) \in R^m$ определены в соответствии обозначения

$$e_m(i) = (0 \;\; \ldots \;\; \underset{i}{1} \;\; \ldots \;\; 0)^T \in R^m. \tag{28}$$

Возникает задача - определить как влияет возмущение такого вида на элементы псевдообратной матрицы $\tilde{A}^+$

$$\Delta A^+(\delta_{ij}) = \tilde{A}^+ - A^+, \tag{29}$$

**Теорема.5** Если для матрицы $A \in R^{m\times n}$ ( формула (22) ) известна её псевдообратная матрица $A^+ \in R^{n\times m}$ ( формулы (23), (24) ) и некоторый её элемент $\alpha_{ij}$ изменяется на величину $\delta_{ij} \in R$ , т.е. имеют место формулы (25), (), то формулы возмущений для псевдообратной матрицы имеют следующий вид:

1. если

$$a_{(i)}^T p(i) < 1, \quad p_{(j)}^T a(j) < 1, \tag{30}$$

т.е. когда векторы $e_i(m)$ и $e_j^T(n)$ линейно независимы от векторов – столбцов и векторов - строк матрицы $A$ соответственно:

$$\Delta A^+(\delta_{ij}) = -p(i)e_i^T(m)Z\left(A^T\right) - Z(A)e_j(n)p_{(j)}^T + Z(A)e_j(n)e_i^T(m)Z\left(A^T\right)\left(p_{ji} + \frac{1}{\delta_{ij}}\right), \tag{31}$$

2. если

$$a_{(i)}^T p(i) = 1\,, \quad p_{(j)}^T a(j) < 1\,, \tag{32}$$

т.е. когда вектор $e_i(m)$ линейно зависим от векторов - столбцов, а вектор $e_j^T(n)$ линейно независим от векторов - строк матрицы $A$:

$$\Delta A^+(\delta_{ij}) = -K(A^+, \delta_{ij})\, A^+\,, \tag{33}$$

$$K(A^+, \delta_{ij}) = \frac{kk^T}{\|p(i)\|^2 \delta_{ij}{}^2 - 2p_{ij}\delta_{ij} + 1}\,, \tag{34}$$

$$k = p(i)\delta_{ij} - e_j(n)\ ; \tag{35}$$

3. если

$$a_{(i)}^T p(i) = 1\,, \quad p_{(j)}^T a(j) = 1 \tag{36}$$

и при этом

$$p_{ji}\delta_{ij} = -1\,, \tag{37}$$

т.е. когда векторы $e_i(m)$ и $e_j^T(n)$ линейно зависимы от векторов – столбцов и векторов – строк матрицы $A$ соответственно, а ранг возмущённой матрицы $A + \delta_{ij}\, e_i(m)\ e_j^T(n)$ падает:

$$rank(A + \delta_{ij}\, e_i(m)\ e_j^T(n)) = rank(A) - 1. \tag{38}$$

Для этого случая

$$(A + \Delta A(\delta_{ij}))^+ = A^+ - \frac{p(i)\, p^T(i)}{\|p(i)\|^2} A^+ - A^+ \frac{p_{(j)} p_{(j)}^T}{\|p_{(j)}\|^2} + \alpha \frac{p(i)}{\|p(i)\|} \frac{p_{(j)}^T}{\|p_{(j)}\|}\ , \tag{39}$$

$$\alpha = \left(\frac{p_{(j)}^T}{\|p_{(j)}\|} A^{+T} \frac{p(i)}{\|p(i)\|}\right)\ , \tag{40}$$

4. если

$$a_{(i)}^T p(i) = 1\,, \quad p_{(j)}^T a(j) = 1 \tag{41}$$

и при этом

$$p_{ji}\delta_{ij} \neq -1\,, \tag{42}$$

т.е. когда векторы $e_i(m)$ и $e_j^T(n)$ линейно зависимы от векторов - строк и векторов - столбцов матрицы $A$ соответственно, а ранг возмущённой матрицы $A + \delta\, e_i(m)\ e_j^T(n)$ не падает:

$$rank(A + \delta_{ij}\, e_i(m)\ e_j^T(n)) = rank(A). \tag{43}$$

Для этого случая

$$\Delta A^+(\delta_{ij}) = -\delta_{ij} \frac{p(i)\, p_{(j)}^T}{1 + p_{ji}\delta_{ij}}\ , \tag{44}$$

**Замечание.** Формулы возмущений получены также для проекционных и для взвешенных проекционных матриц..

**Теорема 6.** Невязка $\|Ax - b\|^2$ для СЛАУ $Ax = b$ определяется соотошением

$$\|Ax - b\|^2 = b^T Z(A^T)b. \quad (45)$$

## Выводы

Совместное применение идеологий на основе МБМ и ПОМ при анализе ТПМ дает возможность:

1. контролировать или направлено изменять величину ранга матрицы ограничений системы;
2. проводить анализ свойств системы при изменении значений отдельных элементов и ее компонент:
3. использовать решения начальной системы при анализе возмущенной задачи;
4. анализировать корректность построения модели.

## Благодарности

Статья частично финансирована из проекта ITHEA XXI Института Информационных теорий и Приложений FOI ITHEA и Консорциума FOIBulgaria (www.itea.org, www.foibg.com).

## Литература

[Волошин, 2004] Волошин О.Ф. Методи аналізу статичних балансових еколого-економічних моделей великої розмірності // Наукові записки, Т.VII, КПДВ "Педагогіка", Київ, 2004,- С. 43-55.

[Кудин. 2008] Кудин. В., Кудин Г., Волошин А. Анализ свойств модели Леонтьева при нечетко заданных параметрах с применением метода базисных матриц // Information Science & Computing, International Book Series, Number 7, Volume 7, ITHEA, SOFIA, p. 86-90, 2008.

[Кудин, 2002] Кудин В.И. Применение метода базисных матриц при исследовании свойств линейной системы // Вестник Киевского университета. Серия физ.-мат. науки. - 2002.-2., С. 56-61

[Кириченко 2007] Кириченко Н.Ф.., Донченко В.С. Псевдообращение в задачах кластеризации // Кибернетика и системный анализ.–2007.-№4.-С. 73-91.

## Информация об авторах

***Алексей Ф. Волошин*** *– доктор технических наук, профессор, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина, 01017 Киев, ул. Владимирская, 64; e-mail: ovoloshin@unicyb.kiev.ua,*

***Григорий И. Кудин****, Киев,. Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики, Украина,, к.ф.-м.. н., зав. паб.., E-mail: _Kudin@unicyb.kiev.ua*

***Владимир И. Кудин,*** *Киев,. Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики, Украина,, д.т. н., с. н.с., E-mail: V_I_Kudin@mail.ru*