Krassimir Markov, Vitalii Velychko, Oleksy Voloshin
(editors)

Natural and Artificial Intelligence

ITHEA
SOFIA
2010

Krassimir Markov, Vitalii Velychko, Oleksy Voloshin (ed.)
Natural and Artificial Intelligence
ITHEA®
Sofia, Bulgaria, 2010
ISBN 978-954-16-0043-9

First edition

Recommended for publication by The Scientific Concil of the Institute of Information Theories and Applications FOI ITHEA

This book is engraved in prof. Zinoviy Lvovich Rabinovich memory. He was a great Ukrainian scientist, co-founder of ITHEA International Scientific Society (ITHEA ISS). To do homage to the remarkable world-known scientific leader and teacher this book is published in Russian language and is concerned to some of the main areas of interest of Prof. Rabinovich.

The book is opened by the last paper of Prof. Rabinovich specially written for ITHEA ISS. Further the book maintains articles on actual problems of natural and artificial intelligence, information interaction and corresponded intelligent technologies, expert systems, robotics, classification, business intelligence; etc. In more details, the papers are concerned in:conceptual problems of the natural and artificial intelligent systems: structures and functions of the human memory, ontological models of knowledge representation, knowledge extraction from the natural language texts;network technologies;evolution and perspectives of development of the mechatronics and robotics;visual communication by gestures and movements, psihology of vision and information technologies of computer vision, image processing;object classification using qualitative characteristics;methods for comparing of alternatives and their ranging in the procedures of expert knowledge processing;ecology of programming – a new trend in the software engineering;decision support systems for economics and banking;systems for automated support of disaster risk management;and etc.

It is represented that book articles will be interesting for experts in the field of information technologies as well as for practical users.

General Sponsor: Consortium FOI Bulgaria (www.foibg.com).

Printed in Bulgaria

ISBN 978-954-16-0043-9

C\o Jusautor, Sofia, 2010

ПРОЦЕДУРЫ НАХОЖДЕНИЯ СТРОГОГО РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕГО ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ АЛЬТЕРНАТИВ В ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО УПОРЯДОЧЕНИЯ АЛЬТЕРНАТИВ

Павел П. Антосяк, Алексей Ф. Волошин

Аннотация*: Разработаны новые процедуры последовательного анализа для задачи линейного упорядочения альтернатив. В результате применения предлагаемых процедур происходит сужение множества возможных вариантов, на котором гарантируется существование оптимального варианта. Работа процедур иллюстрируется на численном примере.*

Ключевые слова*: задача линейного упорядочения альтернатив, комбинаторная оптимизация, булево программирование, последовательный анализ вариантов.*

ACM Classification Keywords*: H.4.2 Information Systems Applications: Types of Systems: Decision Support.*

Вступление

Задача линейного упорядочения альтернатив (ЗЛУА) имеет широкое практическое применение в принятии коллективных решений в экономике, теории расписаний, проектировании вычислительной техники и т.п. Она является NP-сложной комбинаторной проблемой, ей посвящены многочисленные публикации [Reinelt,1985, Laguna,1999, Campos,2001].. В [Antosiak,2009] для решения ЗЛУА были предложены процедуры последовательного анализа и отсеивания вариантов, общая идеология которого предложена в [Mikhalevich,1965] и развита в [Mikhalevich,1977, Volkovich, Voloshin,,1978,1984] для решения разнообразных оптимизационных задач. В частности, для решения различных классов многовариантных задач [Mikhalevich,1977] был разработан широко известный алгоритм «Киевский веник».

В работе [Antosiak, 2009] процедуры одного из эффективных алгоритмов последовательного анализа для решения дискретных оптимизационных задач W [Volkovich, Voloshin,, 1978] были применены для ЗЛУА. Отмечались, в частности, сложности применения алгоритма W в случае формулирования ее как задачи булевого программирования.

В данной работе предлагаются процедуры предварительного сужения множества допустимых вариантов задачи путем фиксации элементов перестановки, которые не могут участвовать в конструировании транзитивных отношения и тем самым образовывать оптимальный вариант.

Постановка задачи

Рассматривается множество альтернатив $A = \{a_1,...,a_n\}$ и перестановка $p : A \to A$. Каждая перестановка $p = (p_1,...,p_n)$ однозначно определяет некоторое линейное упорядочение альтернатив. Обозначим через e_{ij}, $i, j \in N = \{1,...,n\}$ цену размещения альтернативы a_i перед альтернативой a_j в линейном порядке, а через E квадратную матрицу цен порядка n. Тогда ЗЛВА состоит в нахождении такой перестановки p, при которой достигается максимальная суммарная цена:

$$E(p) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} e_{p_i p_j} \quad (1)$$

Задачу (1) можно также представить как задачу булевого программирования [Reinelt, 1985]:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}d_{ij}x_{ij}\to\max \tag{2}$$

$$x_{ij}+x_{jk}-x_{ik}\le 1,\ 1\le i<j<k\le n \tag{3}$$

$$-x_{ij}-x_{jk}+x_{ik}\le 0,\ 1\le i<j<k\le n, \tag{4}$$

$$x_{ij}\in X_{ij},\ 1\le i<j\le n, \tag{5}$$

где $d_{ij}=e_{ij}-e_{ji}$, $X_{ij}=\{0,1\}$ – множество возможных вариантов значений компоненты x_{ij}, $X=\prod_{j>i}X_{ij}$ – множество всех возможных вариантов.

Процедуры фиксации отношений между двумя альтернативами для ЗЛУА

Обозначим $a_i\overset{*}{\succ}a_j$, $i,j\in N$, $i\ne j$, если в оптимальном решении $(p_1^*,\dots,p_n^*)$ задачи (1) для некоторых $t<h$ справедливо $p_t^*=i$, $p_h^*=j$ либо для оптимального варианта x^* задачи (2)–(5) выполнено $x_{ij}^*=1$.

Для каждой альтернативы $a_i\in A$, $i\in N$ введем обозначения:

$$N_i^-=\{z\in N\,|\,d_{iz}<0,z\ne i\},\ N_i^+=\{z\in N\,|\,d_{iz}\ge 0,z\ne i\},$$

$$S_i^-=\sum_{z\in N_i^-}d_{iz},\ S_i^+=\sum_{z\in N_i^+}d_{iz}.$$

Утверждение 1.

1) Если $d_{ij}>-S_i^-$, то $\forall\ v^*\in\operatorname{Arg}\max_p E(p)\Rightarrow a_i\overset{*}{\succ}a_j$.

2) Если $d_{ij}\ge -S_i^-$, то $\exists\ v^*\in\operatorname{Arg}\max_p E(p)\Rightarrow a_i\overset{*}{\succ}a_j$.

Доказательство. Пусть $d_{ij}>-S_i^-$. Предположим противоположное. Пусть существует оптимальный вариант v^* такой, что $v^*=(p_1^*,\dots,p_{t-1}^*,j,p_{t+1}^*,\dots,p_{h-1}^*,i,p_{h+1}^*,\dots,p_n^*)$, $1\le t<h\le n$. Для этого варианта выполняются необходимые условия оптимальности задачи (1) [Антосяк, 2008] и, в частности, следующие:

$$\sum_{k=1}^{h-t}d_{ip_{h-k}^*}\le 0. \tag{6}$$

Своего наименьшего значения сумма в левой части (6) примет, если $\sum_{k=1}^{h-t-1}d_{ip_{h-k}^*}=S_i^-$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{h-t}d_{ip_{h-k}^*}=d_{ij}+\sum_{k=1}^{h-t-1}d_{ip_{h-k}^*}\ge d_{ij}+S_i^->0,$$

что противоречит (6).

Пусть теперь $d_{ij}\ge -S_i^-$. Выберем произвольный оптимальный вариант v° задачи (1) такой, что $v^\circ=(p_1^\circ,\dots,p_{t-1}^\circ,j,p_{t+1}^\circ,\dots,p_{h-1}^\circ,i,p_{h+1}^\circ,\dots,p_n^\circ)$, $1\le t<h\le n$. Возьмем вариант $v^*=(p_1^*,\dots,p_{t-1}^*,i,j,p_{t+1}^*,\dots,p_{h-1}^*,p_{h+1}^*,\dots,p_n^*)$ и рассмотрим разность:

$$E(v^*) - E(v^o) = \sum_{k=1}^{h-t} d_{ip^*_{h-k}} = d_{ij} + \sum_{k=1}^{h-t-1} d_{ip^*_{h-k}} \geq d_{ij} + S_i^- \geq 0. \quad (7)$$

Из (7) вытекает, что вариант v^* эквивалентен всякому оптимальному варианту задачи (1) по значению целевой функции. □

Следующее утверждение обеспечивает "противоположный" результат.

Утверждение 2.

1) Если $d_{ij} < -S_i^+$, то $\forall \quad v^* \in \operatorname{Arg}\max_p E(p) \Rightarrow a_j \overset{*}{\succ} a_i$.

2) Если $d_{ij} \leq -S_i^+$, то $\exists \quad v^* \in \operatorname{Arg}\max_p E(p) \Rightarrow a_j \overset{*}{\succ} a_i$.

Этот факт доказывается аналогично утверждению 1.

Строгое результирующее отношение между двумя альтернативами как следствие использования процедур локализации интервалов изменения оптимальных рангов

В работе [Антосяк, 2008] введено понятие интервала изменения оптимальных рангов (ИИОР) для ЗЛУА. Пусть $[R_i^{(k_i^{loc})}, r_i^{(k_i^{loc})}]$ интервал, который локализует интервал $[R_i^*, r_i^*]$ изменения оптимальных рангов i-ой альтернативы. Из определений ИИОР и процедур локализации ИИОР очевидным становится следующий результат:

$$\text{если } r_i^{(k_i^{loc})} \leq R_j^{(k_j^{loc})}, \text{ то } \forall \quad v^* \in \operatorname{Arg}\max_p E(p) \Rightarrow a_j \overset{*}{\succ} a_i.$$

Из необходимых условий оптимальности для варианта $v^* = (p_1^*, ..., p_{t-1}^*, j, p_{t+1}^*, ..., p_{h-1}^*, i, p_{h+1}^*, ..., p_n^*)$, $1 \leq t < h \leq n$, и определения интервала изменения рангов альтернатив получаем неравенство $1 \leq R_j^{(k_j^{loc})} \leq t < h \leq r_i^{(k_i^{loc})} \leq n$. Возьмем произвольный индекс q, $t < q < h$. Тогда, если $z = i_q^*$, то для ИИОР альтернативы с индексом z выполняется система неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} R_j^{(k_j^{loc})} < R_z^{(k_z^{loc})} < r_i^{(k_i^{loc})}, \\ R_j^{(k_j^{loc})} < r_z^{(k_z^{loc})} < r_i^{(k_i^{loc})}. \end{array}\right. \quad (8)$$

(8) означает, что для альтернативы a_z еще не установлено $a_z \overset{*}{\succ} a_j$ и $a_i \overset{*}{\succ} a_z$, или в терминах эквивалентной постановки (2)–(5) $|X_{zj}^{(s)}| \neq \{1\}$ и $|X_{iz}^{(s)}| \neq \{1\}$, $s = 0,1,\ldots$ Поэтому в дальнейшем введем в рассмотрение множество индексов альтернатив

$$N_{ij}^- = \left\{z \in N_i^- : |X_{zj}^{(s)}| \neq \{1\}, |X_{iz}^{(s)}| \neq \{1\}, s = 0,1,\ldots\right\} \text{ и обозначим } S_{ij}^- = \sum_{z \in N_{ij}^-} d_{iz}.$$

Сказанное делает справедливым следующий результат, который обобщает утверждение 1.

Утверждение 3.

1) Если $d_{ij} > -S_{ij}^-$, то $\forall \quad v^* \in \operatorname{Arg}\max_p E(p) \Rightarrow a_i \overset{*}{\succ} a_j$.

2) Если $d_{ij} \geq -S_{ij}^-$, то $\exists \quad v^* \in \operatorname{Arg}\max_p E(p) \Rightarrow a_i \overset{*}{\succ} a_j$.

По аналогии, если для ИИОР альтернативы с индексом $z = i_q^*$ выполняется система неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} R_i^{(k_i^{loc})} < R_z^{(k_z^{loc})} < r_j^{(k_j^{loc})}, \\ R_i^{(k_i^{loc})} < r_z^{(k_z^{loc})} < r_j^{(k_j^{loc})}, \end{array}\right. \tag{9}$$

Из (9) следует, что для альтернативы a_z еще не установлено $a_z \overset{*}{\succ} a_i$ и $a_j \overset{*}{\succ} a_z$, или в терминах эквивалентной постановки (2)–(5) $|X_{zi}^{(s)}| \neq \{1\}$ и $|X_{jz}^{(s)}| \neq \{1\}$, $s = 0,1,\ldots$. Далее аналогично, введя в рассмотрение обозначения

$$N_{ij}^{+} = \left\{z \in N_i^{+} : |X_{zi}^{(s)}| \neq \{1\}, |X_{jz}^{(s)}| \neq \{1\}, s = 0,1,\ldots\right\},$$

$$S_{ij}^{+} = \sum_{z \in N_{ij}^{+}} d_{iz},$$

получаем обобщение утверждения 2.

Утверждение 4.

1) Если $d_{ij} < -S_{ij}^{+}$, то $\forall \quad v^* \in \operatorname{Arg}\max_p E(p) \Rightarrow a_j \overset{*}{\succ} a_i$.

2) Если $d_{ij} \leq -S_{ij}^{+}$, то $\exists \quad v^* \in \operatorname{Arg}\max_p E(p) \Rightarrow a_j \overset{*}{\succ} a_i$.

Далее для отсева значений, которые делают невозможным построение ни одного транзитивного отношения, можно применять процедуру последовательного анализа и отсеивание вариантов W_1 [Antosiak, 2009], которая, в силу выше сказанного, уже не может закончиться аварийно. Проведенные вычислительные эксперименты на данных [LOLIB]. показали высокую эффективность предложенных процедур.

Пример

Проиллюстрируем работу алгоритма на примере, сгенерированного случайным образом [Mitchell, 2000], матрицу выигрышей которого в удобной для нас форме будет записано в следующем виде:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	0	3	-5	7	6	4
a_2	-3	0	4	7	-3	2
a_3	5	-4	0	-10	-4	0
a_4	-7	-7	10	0	-5	-3
a_5	-6	3	4	5	0	6
a_6	-4	-2	0	3	-6	0

Результат работы первого шага процедуры фиксации представлено ниже.

i	j	d_{ij}	N_{ij}^{-}	$-S_{ij}^{-}$	N_{ij}^{+}	$-S_{ij}^{+}$	Зафиксированное значение $\overline{x}_{ij}$
1	2	3	{3}	5	–	–	–
1	3	-5	–	–	{2,4,5,6}	-20	–
1	4	7	{3}	5	–	–	1
1	5	6	{3}	5	–	–	1
1	6	4	{3}	5	–	–	–
2	1	-3	–	–	{3,6}	-6	–
2	3	4	{1,5}	6	–	–	–
2	4	7	{5}	3	–	–	1
2	5	-3	–	–	{3,4,6}	-13	–
2	6	2	{1,5}	6	–	–	–
3	1	5	{2,4,5}	18	–	–	–
3	2	-4	–	–	{1}	-5	–
3	4	-10	–	–	{1}	-5	0
3	5	-4	–	–	{1}	-5	–
3	6	0	{2,4,5}	18	{1}	-5	–
4	5	-5	–	–	{3}	-10	–
4	6	-3	–	–	{3}	-10	–
5	2	3	{1}	6	–	–	–
5	3	4	{1}	6	–	–	–
5	4	5	{∅}	0	–	–	1
5	6	6	{1}	6	–	–	1
6	1	-4	–	–	{∅}	0	0
6	2	-2	–	–	{∅}	0	0
6	3	0	{1,2,5}	12	{4}	-3	–
6	4	3	{∅}	0	–	–	1

Итак, в результате получим такое сокращенное множество допустимых вариантов:

$$X^{(1)} = \prod_{j>i} | X_{ij}^{(1)} | =$$

$$= \{0,1\}\times\{0,1\}\times\{1\}\times\{1\}\times\{1\}\times\{0,1\}\times\{1\}\times\{0,1\}\times\{1\}\times\{0\}\times\{0,1\}\times\{0,1\}\times\{0\}\times\{0\}\times\{1\}. \quad (10)$$

Применим к сокращенному множеству (10) процедуру последовательного анализа W_1. Сначала по критерию

$$\bar{x}_{13} < -\max_{x_{34}^{(1)}} x_{34} + \min_{x_{14}^{(1)}} x_{14}$$

отсеивается значение $\bar{x}_{13} = 0$. А потом последовательно значения $\bar{x}_{23} = 0$, $\bar{x}_{35} = 1$, $\bar{x}_{36} = 1$ по соответствующими критериям отсева:

$$\bar{x}_{23} < -\max_{x_{34}^{(1)}} x_{34} + \min_{x_{24}^{(1)}} x_{24},\ \bar{x}_{35} > \max_{x_{34}^{(s)}} x_{34} + \max_{x_{45}^{(s)}} x_{45},\ \bar{x}_{36} > \max_{x_{34}^{(s)}} x_{34} + \max_{x_{46}^{(s)}} x_{46}.$$

Таким образом, получаем следующее сокращенное множество допустимых вариантов:

$$X^{(1)} = \{0,1\}\times\{1\}\times\{1\}\times\{1\}\times\{1\}\times\{1\}\times\{1\}\times\{0,1\}\times\{1\}\times\{0\}\times\{0\}\times\{0\}\times\{0\}\times\{0\}\times\{1\}. \quad (11)$$

Применение процедур фиксации на втором шаге к сокращенному множеству (11) дает:

i	j	d_{ij}	N_{ij}^{-}	$-S_{ij}^{-}$	N_{ij}^{+}	$-S_{ij}^{+}$	Зафиксированное значение $\bar{x}_{ij}$
1	2	3	$\{\varnothing\}$	0	–	–	1
2	5	-3	–	–	$\{\varnothing\}$	0	0

Итак, получаем сокращение множества допустимых вариантов, с единственным допустимым вариантом, который и есть оптимальной перестановкой альтернатив $v^* = (1,5,2,6,4,3)$.

Заключение

Задача линейного упорядочения альтернатив имеет широкое практическое применение в принятии коллективных решений в экономике, теории расписаний, проектировании вычислительной техники и т.п. Она является NP-сложной комбинаторной проблемой, ей посвящены многочисленные публикации. Задача линейного упорядочения альтернатив может непосредственно рассматриваться как оптимизационная комбинаторная задача и как эквивалентная ей задача булевого программирования. Каждый из этих подходов не лишен недостатков, которые в данной работе предлагается преодолевать «комбинаторным» применением идеологии последовательного анализа и отсеивания вариантов – предварительным анализом задачи в комбинаторной постановке с последующим ее решением, как задачи булевого программирования, с помощью алгоритма последовательного анализа, конструирования и отсеивания W[Volkovich, Voloshin, 1978].

Благодарности

Статья частично финансирована из проекта ITHEA XXI Института Информационных теорий и Приложений FOI ITHEA и Консорциума FOIBulgaria (www.itea.org, www.foibg.com).

Библиография

[Antosiak, 2009] Antosiak P., Voloshin O. Procedures of sequential analysis and sifting of variants for the linear ordering problem / International Book Series "Information science computing",– Volume 7, Number 3, – 2009. - P. 100–105.

[Reinelt, 1985]. Reinelt G. The linear ordering problem: algorithms and applications. Research and Exposition in Mathematics. –Berlin, Germany: Heldermann Verlag, 1985.

[Grotschel, 1984] Grotschel M., Jünger M., Reinelt G. A cutting plane algorithm for the linear ordering problem// Operations Research. –1984. –vol. 2.– №6.–P. 1195-1220.

[Chanas, 1996] Chanas S., Kobylanski P. A new heuristic algorithm solving the linear ordering problem// ComputationalOptimization and Applications.– 1996.– vol. 6.– P. 191-205.

[Laguna,1999] Laguna M., Marti R., Campos V. Intensification and diversification with elite tabu search solutions for the linear ordering problem// Computers \& Operations Research.–1999. –vol. 26.- P. 1217-1230.

[Campos, 2001] Campos V., Glover F., Laguna M., Marti R. An experimental evaluation of a scatter search for the linear ordering problem// Journal of Global Optimization. – 2001.– vol. 21.–№ 4.– P. 397-414.

[Mikhalevich, 1965] Mikhalevich V.S. Consecutive optimization algorithms and their application. I. II// Cybernetics. – 1965. – №1. – P. 45-55; – №2. – P. 85-88 .

[Mikhalevich, 1977] Михалевич В.С., Шор Н.З. и др. Вычислительные методы выбора оптимальных решений.-Киев: Наукова думка,1977.-178с.

[Volkovich, Voloshin, 1978] Волкович В.Л., Волошин А.Ф. Об одной схеме метода последовательного анализа и отсеивания вариантов//Кибернетика,1978,№4.-С.99-105.

[Volkovich, Voloshin,, 1984] Волкович В.Л., Волошин А.Ф. и др. Методы и алгоритмы автоматизированного проектирования сложных систем управления. – Киев: Наукова .думка, 1984. – 216 с.

[Volkovich, Voloshin, 1993] Волкович В.Л., Волошин А.Ф. и др.Модели и методы оптимизации надежности сложных систем.- Киев: Наукова думка,1993.-312с.

[Антосяк, 2008] Антосяк, П. П. Локалізація інтервалів зміни оптимальних рангів об'єктів у задачі знаходження медіани Кемені – Снелла // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. –2008. – № 8. – С. 4 - 7.

[Mitchell, 2000] Mitchell John E., Brian Borchers. Solving linear ordering problems with a combined interior point/simplex cutting plane algorithm // High Performance Optimization / Ed. by H. Frenk et al. –Dordrecht, TheNetherlands: KluwerAcademicPublishers, 2000. –P. 345–366.

Информация об авторах

Антосяк Павел Павлович *–Ассистент, Ужгородский национальный университет, математический факультет. Ужгород, Украина. E-mail: antosp@ukr.net*

Основные области научных исследований: коллективное принятие решений, методы дискретной оптимизации, «мягкие» вычисления.

Волошин Алексей Федорович *– Профессор, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики. Киев, Украина. E-mail:* ovoloshin@unicyb.kiev.ua

Основные области научных исследований: теория принятия решений, методы оптимизации, математическая экономика, системы поддержки принятия решений, экспертные системы,е-образование