Krassimir Markov, Vitalii Velychko, Oleksy Voloshin
(editors)

Natural and Artificial Intelligence

ITHEA
SOFIA
2010

Krassimir Markov, Vitalii Velychko, Oleksy Voloshin (ed.)

Natural and Artificial Intelligence

ITHEA®

Sofia, Bulgaria, 2010

ISBN 978-954-16-0043-9

First edition

Recommended for publication by The Scientific Concil of the Institute of Information Theories and Applications FOI ITHEA

This book is engraved in prof. Zinoviy Lvovich Rabinovich memory. He was a great Ukrainian scientist, co-founder of ITHEA International Scientific Society (ITHEA ISS). To do homage to the remarkable world-known scientific leader and teacher this book is published in Russian language and is concerned to some of the main areas of interest of Prof. Rabinovich.

The book is opened by the last paper of Prof. Rabinovich specially written for ITHEA ISS. Further the book maintains articles on actual problems of natural and artificial intelligence, information interaction and corresponded intelligent technologies, expert systems, robotics, classification, business intelligence; etc. In more details, the papers are concerned in:conceptual problems of the natural and artificial intelligent systems: structures and functions of the human memory, ontological models of knowledge representation, knowledge extraction from the natural language texts;network technologies;evolution and perspectives of development of the mechatronics and robotics;visual communication by gestures and movements, psihology of vision and information technologies of computer vision, image processing;object classification using qualitative characteristics;methods for comparing of alternatives and their ranging in the procedures of expert knowledge processing;ecology of programming – a new trend in the software engineering;decision support systems for economics and banking;systems for automated support of disaster risk management;and etc.

It is represented that book articles will be interesting for experts in the field of information technologies as well as for practical users.

General Sponsor: Consortium FOI Bulgaria (www.foibg.com).

Printed in Bulgaria

ISBN 978-954-16-0043-9

C\o Jusautor, Sofia, 2010

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ В НЕЧЕТКИХ УСЛОВИЯХ

Юрий Зайченко, Ови Нафас Агаи Аг Гамиш

***Abstract**: The dual problem of fuzzy portfolio optimization is considered and investigated. A mathematical model of this problem was constructed , explored and the sufficient conditions for its convexity were obtained. The sufficient optimality conditions of its solution are presented. The results of experimental investigations of solutions are presented and discussed*

***Keywords**: fuzzy portfolio optimization, dual optimization problem/ convexity sufficient conditions,*

***ACM Classification Keywords**: G.1.0 Mathematics of Computing– General – Error analysis; G.1.6 Mathematics of Computing – NUMERICAL ANALYSIS – Optimization - Gradient methods, Least squares methods; I.2.3 Computing Methodologies - ARTIFICIAL INTELLIGENCE - Uncertainty, "fuzzy", and probabilistic reasoning; I.2.6 Computing Methodologies - ARTIFICIAL INTELLIGENCE – Learning - Connectionism and neural nets;*

Введение

В последние годы проблема оптимизации инвестиционных портфелей представляет значительный интерес в связи с развитием финансовых рынков в Украине и мире. Нахождение оптимального портфеля позволяет инвесторам и финансовым фондам распределять финансовые средства в портфели ценных бумаг с целью получения максимально возможной прибыли и сократить риск ошибочных решений. Особенностью данной проблемы является существенная неопределенность исходной информации относительно доходности ценных бумаг (ЦБ) в будущий момент времени. Новый подход к задаче оптимизации портфеля, который позволяет учесть неопределенность исходных данных и является альтернативой классической модели Марковица, базируется на применении аппарата нечетких множеств. Проблема нечеткой портфельной оптимизации была рассмотрена и исследована в работах [1,2,3]. В этих работах рассматривалась следующая постановка задачи: необходимо оптимизировать ожидаемую доходность портфеля при ограничениях на возможный риск. Алгоритм для решения этой задачи был предложен и исследован в [2]. В работе [3] было предложено использовать прогнозирование доходностей акций, что позволило повысить эффективность получаемых решений.

Целью настоящей работы является рассмотрение двойственной задачи нечеткой портфельной оптимизации, ее исследование и определение достаточных условий выпуклости этой задачи.

Двойственная задача нечеткой портфельной оптимизации

Исходная задача оптимизации нечеткого портфеля, которую естественно называть прямой, имеет следующий вид: [1,2]

Найти ожидаемую доходность нечеткого портфеля

$$\tilde{r} = \sum_{i=1}^{N} \tilde{r}_i x_i \rightarrow max \qquad (1)$$

при ограничениях на риск

$$\beta(x) \leq \beta_{задан} 0 < \beta < 1 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \tag{3}$$

$$x_i \geq 0 \tag{4}$$

Рассмотрим случай, когда критериальное значение доходности r^*удовлетворяет условиям

$$\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \leq r^* \leq \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i = \tilde{r} \tag{5}$$

Тогда величина риска равна

$$\beta(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2} - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1}} \left[\left(r^* - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \right) + \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i - r^* \right) ln \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i - r^*}{\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1}} \right) \right] \tag{6}$$

Рассмотрим двойственную задачу оптимизации нечеткого портфеля относительно задачи (1)-(4)

Минимизировать

$$\beta(x) \tag{7}$$

при условиях

$$\tilde{r} = \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i \geq r_{\text{зад}} = r^* \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1\,, x_i \geq 0 \tag{9}$$

Требуется доказать, что функция риска $\beta(x)$ является выпуклой, где

$$\beta(x) = \left(A(x) + B(x) ln \frac{B(x)}{C(x)} \right) * D(x)$$

Для этого необходимо доказать, что функция

$$D(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i2} - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1}}$$

– выпукла, и функция

$$A(x) + B(x) ln \frac{B(x)}{C(x)}$$

выпукла. А кроме того обе функции являются убывающими поx_i и неотрицательными, где

$$A(x) = r^* - \textstyle\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1};\, B(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i - r^*;\, C(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i - \sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1}$$

Действительно $A(x)$- линейна и поэтому не строго выпукла, а функции $B(x)$ и $C(x)$также линейны.

Кроме того $r_i \geq r_{i1},\ i = \overline{1, N},\ \ \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i - r^* > 0$; по предположению (условие (8))..

Рассмотрим функцию $D(x)$.

$$\frac{\partial D(x)}{\partial x_i} = -\frac{1}{(r_{i2} - r_{i1}) x_i^2} \frac{\partial^2 D(x)}{\partial x_i^2} = \frac{2}{(r_{i2} - r_{i1}) x_i^3}$$

И т.к.$r_{i2} \geq r_{i1}$, то $\frac{\partial^2 D(x)}{\partial x_i^2} > 0$, для всех $i = \overline{1, N}$. Следовательно, функция $D(x)$выпуклая.

Вычислим

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[B(x)ln\frac{B(x)}{C(x)}\right] = B^{`}(x)ln\frac{B(x)}{C(x)} + B(x)\frac{B(x)}{C(x)}\frac{B^{`}(x)C(x) - C^{`}(x)B(x)}{C^2(x)} =$$

$$= B^{`}(x)ln\frac{B(x)}{C(x)} + B^{`}(x) - \frac{C^{`}(x)B(x)}{C(x)} \qquad (10)$$

Поскольку

$$C_j^{`}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}C(x) = \tilde{r}_j - r_{j1}B^{`}(x) = \frac{\partial \boldsymbol{B}(x)}{\partial x_i} = \tilde{r}_i$$

то подставляя в (10), получим:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[B(x)ln\frac{B(x)}{C(x)}\right] = \tilde{r}_i ln\frac{B(x)}{C(x)} + \tilde{r}_i - (\tilde{r}_i - r_{i1})\frac{B(x)}{C(x)} \qquad (11)$$

Найдем вторую частную производную

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[B(x)ln\frac{B(x)}{C(x)}\right] = \tilde{r}_i\frac{C(x)}{B(x)}\frac{B^{`}(x)C(x) - C^{`}(x)B(x)}{C^2(x)}$$

$$= (\tilde{r}_i - r_{i1})\frac{B^{`}(x)C(x) - C^{`}(x)B(x)}{C^2(x)} =$$

$$= \tilde{r}_i\left(\frac{B^{`}(x)}{B(x)} - \frac{C^{`}(x)}{C(x)}\right) - (\tilde{r}_i - r_{i1})\left[\frac{B^{`}(x)}{C(x)} - \frac{C^{`}(x)B(x)}{C^2(x)}\right] = \qquad (12)$$

$$= \tilde{r}_i\left[\frac{\tilde{r}_i}{\sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i - r^*} - \frac{\tilde{r}_i - r_{i1}}{\sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i - \sum_{i=1}^N x_i r_{i1}}\right] -$$

$$-(\tilde{r}_i - r_{i1})\left[\frac{\tilde{r}_i}{\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_i - r_{i1})} - \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i - r^*\right)(\tilde{r}_i - r_{i1})}{\left(\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_i - r^*{}_{i1})\right)^2}\right] =$$

$$-(\tilde{r}_i - r_{i1})\left[\frac{\tilde{r}_i}{\sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i - \sum_{i=1}^N x_i r_{i1}} - \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i - r^*\right)(\tilde{r}_i - r_{i1})}{\left(\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_i - r^*{}_{i1})\right)^2}\right] = \qquad (13)$$

$$\frac{\tilde{r}^2{}_i}{\sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i - r^*} - \frac{2\tilde{r}_i(\tilde{r}_i - r_{i1})}{\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_{i-} r_{i1})} + \frac{(\tilde{r}_i - r_{i1})^2(\sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i - r^*)}{\left(\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_i - r^*{}_{i1})\right)^2} = \qquad (14)$$

После приведения к общему знаменателю получим:

$$= \frac{\tilde{r}^2{}_i\left(\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_i - r^*{}_{i1})\right)^2 - 2\tilde{r}_i(\tilde{r}_i - r_{i1})\left(\sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i - r^*\right)\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_{i-} r_{i1})}{(\sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i - r^*)\left(\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_i - r^*{}_{i1})\right)^2} +$$

$$+\frac{(\tilde{r}_i - r_{i1})^2(\sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i - r^*)^2}{\left(\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_i - r^*{}_{i1})\right)^2(\sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i - r^*)} =$$

$$= \frac{\left[\tilde{r}_i\left(\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_{i-} r_{i1}) - (\tilde{r}_i - r_{i1})\left(\sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i - r^*\right)\right)\right]^2}{(\sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i - r^*)\left(\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_i - r^*{}_{i1})\right)^2} \geq 0 \qquad (15)$$

А т.к. $\tilde{r}_i > (\tilde{r}_i - r_{i1})$ и $\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_i - r_{i1})) > \sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i - r^*$, то выражение (15) строго больше 0. Таким образом все частные производные второго порядка

$$\Delta_{ii} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[B(x)ln\frac{B(x)}{C(x)}\right] > 0$$

и соответственно

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[A(x)+B(x)ln\frac{B(x)}{C(x)}\right]>0$$

Теперь необходимо показать, что все диагональные миноры вида

$$\begin{bmatrix}\Delta_{ii} & \Delta_{ij}\\ \Delta_{ji} & \Delta_{jj}\end{bmatrix}=\Delta_{ii}\Delta_{jj}--\Delta_{ij}\Delta_{ji}=\Delta_{ii}\Delta_{jj}-\Delta_{ji}{}^2>0 \qquad (16)$$

Эти условия будут достаточные условия выпуклости функции $B(x)ln\frac{B(x)}{C(x)}$, а следовательно и исходной функции $A(x)+B(x)ln\frac{B(x)}{C(x)}$.

Вычислим смешанные частные производные $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}\left[B(x)ln\frac{B(x)}{C(x)}\right]$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}\left[B(x)ln\frac{B(x)}{C(x)}\right]=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(B^{`}(x)ln\frac{B(x)}{C(x)}+B^{`}(x)-\frac{C^{`}(x)B(x)}{C(x)}\right)=$$

$$=\tilde{r}_i\frac{C(x)}{B(x)}\frac{B_j^{`}(x)C(x)-C_j^{`}(x)B(x)}{C^2(x)}-(\tilde{r}_i-r_{i1})\frac{B_j^{`}(x)C(x)-C_j^{`}(x)B(x)}{C^2(x)}=$$

$$=\ \tilde{r}_i\left(\frac{B_j^{`}(x)}{B(x)}-\frac{C_j^{`}(x)}{C(x)}\right)-(\tilde{r}_i-r_{i1})\left[\frac{B_j^{`}(x)}{C(x)}-\frac{C_j^{`}(x)B(x)}{C^2(x)}\right] \qquad (17)$$

Где $B_j^{`}(x)=\frac{\partial}{\partial x_j}B(x)=\ \tilde{r}_j;\ C_j^{`}(x)=\frac{\partial}{\partial x_j}C(x)=\tilde{r}_j-r_{j1}$.

Подставляя эти значения в (17), получим

$$\tilde{r}_i\left(\frac{\tilde{r}_j}{\sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i-r^*}-\frac{\tilde{r}_j-r_{j1}}{\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_i-r_{i1})}\right)-$$

$$-(\tilde{r}_i-r_{i1})\left[\frac{\tilde{r}_j}{\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_i-r_{i1})}-\frac{(\tilde{r}_j-r_{j1})\sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i-r^*}{\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_i-r_{i1})^2}\right]=$$

$$=\frac{\tilde{r}_i\tilde{r}_j(\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_i-r_{i1})^2-\tilde{r}_i(\tilde{r}_j-r_{j1})(\sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i-r^*)(\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_i-r_{i1})-\tilde{r}_j(\tilde{r}_i-r_{i1})-}{\left(\sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i-r^*\right)(\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_i-r_{i1})^2)}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_i-r_{i1})\left(\sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i-r^*\right)+(\tilde{r}_i-r_{i1})(\tilde{r}_j-r_{j1})\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_i-r_{i1})^2}{\left(\sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i-r^*\right)(\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_i-r_{i1})^2)}=$$

$$=\frac{\tilde{r}_i\tilde{r}_j(\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_i-r_{i1})^2-(2\tilde{r}_i\tilde{r}_j-\tilde{r}_ir_{j1}-\tilde{r}_jr_{i1})(\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_i-r_{i1})\left(\sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i-r^*\right)}{\left(\sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i-r^*\right)(\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_i-r_{i1})^2)}+$$

$$+\frac{(\tilde{r}_i-r_{i1})(\tilde{r}_j-r_{j1})\left(\sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i-r^*\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i-r^*\right)(\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_i-r_{i1})^2)} \qquad (18)$$

Для удобства и сокращения выкладок обозначим знаменатель

$$\sum_{i=1}^N x_i\tilde{r}_i-r^*\sum_{i=1}^N x_i(\tilde{r}_i-r_{i1})^{\ \ 2}=E(x) \qquad (19)$$

Подставим выражение для $\Delta_{ii}u\Delta_{ij}$ из (15) и (18) в (16) и получим

$$\Delta_{ii}\Delta_{jj}-\Delta_{ji}{}^2=$$

$$\frac{\left[\tilde{r}_i \sum_{i=1}^{N} x_i(\tilde{r}_i - r_{i1}) - (\tilde{r}_i - r_{i1})\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\tilde{r}_i - r^*\right)\right]^2}{E^2(x)} *$$
$$* \left[\frac{\tilde{r}_j(\sum_{i=1}^{N} x_i(\tilde{r}_i - r_{i1}) - (\tilde{r}_j - r_{j1})\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\tilde{r}_i - r^*\right))}{E(x)}\right] -$$
$$- \frac{\left\{\tilde{r}_i\tilde{r}_j(\sum_{i=1}^{N} x_i(\tilde{r}_i - r_{i1})^2 - (2\tilde{r}_i\tilde{r}_j - \tilde{r}_i r_{j1} - \tilde{r}_j r_{i1})(\sum_{i=1}^{N} x_i(\tilde{r}_i - r_{i1})\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\tilde{r}_i - r^*\right)\right\}}{E^2(x)} + \tag{20}$$
$$+ \frac{(\tilde{r}_i - r_{i1})(\tilde{r}_j - r_{j1})\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\tilde{r}_i - r^*\right)}{\mathrm{E}^2(\mathrm{x})}$$

Для дальнейшего упрощения введем обозначения

$$\sum_{i=1}^{N} x_i(\tilde{r}_i - r_{i1}) = \tilde{r} - r_{min};\ \sum_{i=1}^{N} x_i\tilde{r}_i - r^* = \tilde{r} - r^*\ . \tag{21}$$

Подставляя их в (20) получим

$$\Delta_{ii}\Delta_{jj} - {\Delta_{ji}}^2 = \frac{[\tilde{r}_i(\tilde{r} - r_{min}) - (\tilde{r}_i - r_{i1})(\tilde{r} - r^*)]^2}{E^2(x)} *$$
$$* \left[\frac{\tilde{r}_j(\tilde{r} - r_{min}) - (\tilde{r}_j - r_{j1})(\tilde{r} - r^*)}{E^2(x)}\right] -$$
$$- \frac{\{\tilde{r}_i\tilde{r}_j(\tilde{r} - r_{min})^2 - (2\tilde{r}_i\tilde{r}_j - \tilde{r}_i r_{j1} - \tilde{r}_j r_{i1})(\tilde{r} - r_{min})(\tilde{r} - r^*)\}}{E^2(x)} + \tag{22}$$
$$+ \frac{(\tilde{r}_i - r_{i1})(\tilde{r}_j - r_{j1})(\tilde{r} - r^*)}{E^2(x)}$$

Далее обозначим

$$\tilde{r}_i(\tilde{r} - r_{min}) - (\tilde{r}_i - r_{i1})(\tilde{r} - r^*) = F\ ; \quad \Delta_{ji} = \frac{H}{E}$$
$$\tilde{r}_j(\tilde{r} - r_{min}) - \left(\tilde{r}_j - r_{j1}\right)(\tilde{r} - r^*) = G \tag{23}$$

и подставляем в (23), получим

$$\Delta_{ii}\Delta_{jj} - {\Delta_{ji}}^2 = \frac{F^2G^2 - H^2}{E^2} = \frac{(FG - H)(FG + H)}{E^2} > 0 \tag{24}$$

Условие неотрицательности (24) таково:

$$FG - H > 0$$

откуда

$$FG - H = [\tilde{r}_i(\tilde{r} - r_{min}) - (\tilde{r}_i - r_{i1})(\tilde{r} - r^*)]\left[\tilde{r}_j(\tilde{r} - r_{min}) - (\tilde{r}_j - r_{j1})(\tilde{r} - r^*)\right] -$$
$$- \tilde{r}_i\tilde{r}_j(\tilde{r} - r_{min})^2 - \left(2\tilde{r}_i\tilde{r}_j - \tilde{r}_i r_{j1} - \tilde{r}_j r_{i1}\right)(\tilde{r} - r_{min})(\tilde{r} - r^*) - (\tilde{r}_i - r_{i1})(\tilde{r}_j - r_{j1})\ (\tilde{r} - r^*)^2$$
$$= \tilde{r}_i\tilde{r}_j\left(\tilde{r} - r_{min}\right)^2 - \tilde{r}_j\left(\tilde{r}_i - r_{i1}\right)(\tilde{r} - r^*)(\tilde{r} - r_{min}) - \tilde{r}_i(\tilde{r} - r_{min})\left(\tilde{r}_j - r_{j1}\right)(\tilde{r} - r^*) +$$
$$+ (\tilde{r}_i - r_{i1})\left(\tilde{r}_j - r_{j1}\right)(\tilde{r} - r^*) - \tilde{r}_i\tilde{r}_j(\tilde{r} - r_{min})^2 + (2\tilde{r}_i\tilde{r}_j - \tilde{r}_i r_{j1} - \tilde{r}_j r_{i1}(\tilde{r} - r_{min})(\tilde{r} - r^*) -$$
$$- (\tilde{r}_i - \tilde{r}_{i1})\ \left(\tilde{r}_j - r_{j1}\right)(\tilde{r} - r^*)^2 =$$
$$= (\tilde{r} - r_{min})(\tilde{r} - r^*)\left[-\tilde{r}_j(\tilde{r}_i - r_{i1}) - \tilde{r}_i\left(\tilde{r}_j - r_{j1}\right) - 2\tilde{r}_i\tilde{r}_j - \tilde{r}_i r_{j1} - \tilde{r}_j r_{i1}\right] = 0 \tag{25}$$

Итак, мы получили следующие условия

$$\Delta_{ii}=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[B(x)ln\frac{B(x)}{C(x)}\right]>0 \text{ для всех } i=\overline{1,N},$$

и кроме того, диагональные миноры $\mu_{i1}=\begin{bmatrix}\Delta_{ii} & \Delta_{ij}\\ \Delta_{ji} & \Delta_{jj}\end{bmatrix}\geq 0$

Это является достаточными условиями выпуклости функции $B(x)ln\frac{B(x)}{C(x)}$ следовательно и функции

$$A(x)+B(x)ln\frac{B(x)}{C(x)}.$$

Теперь остается показать, что произведение выпуклых функций $A(x)+B(x)ln\frac{B(x)}{C(x)}$ и $D(x)$ будет так же выпуклым на интервале $x_i\in[0,1], i=\overline{1,N}$с учетом того, что

$$D(x)=\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}x_i(r_{i2}-r_{i1})}$$

где $r_{i2}\geq r_{i1}$, $x_i\in[0,1]$, $\sum_{i=1}^{N}x_i=1$.

Заметим, что $A(x)+B(x)ln\frac{B(x)}{C(x)}$ и $D(x)$, как показано выше, положительны и $D(x)$монотонно убывающая функция, поскольку

$$\frac{\partial D(x)}{\partial x_i}=-\frac{1}{(r_{i2}-r_{i1})x_i^2}<0$$

Для удобства обозначим $A(x)+B(x)ln\frac{B(x)}{C(x)}=\varphi(x)$.

Докажем, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\varphi'(x)<0$$

:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A(x)+B(x)ln\frac{B(x)}{C(x)}\right)=A'(x)+B'(x)+B(x)\frac{C(x)}{B(x)}\frac{B`(x)C(x)-C`(x)B(x)}{C^2(x)}=$$

$$=A'(x)+B'(x)ln\frac{B(x)}{C(x)}+B'(x)-\frac{B`(x)C(x)}{C(x)} \qquad (26)$$

Подставив значения $A'(x)$ и $B'(x)$ в (26), получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=-r_{i1}+\tilde{r}_i ln\frac{B(x)}{C(x)}+\tilde{r}_i-(\tilde{r}_i-r_{i1})\frac{B(x)}{C(x)}=\tilde{r}_i\left(1+ln\frac{B(x)}{C(x)}-r_{i1}-(\tilde{r}_i--r_{i1})\frac{B(x)}{C(x)}\right) \qquad (27)$$

Поскольку $\frac{B(x)}{C(x)}<1$, то $-r_{i1}+\tilde{r}_{i1}\frac{B(x)}{C(x)}<0$

Отсюда после упрощения (27), мы получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\tilde{r}_i(1+ln\frac{B(x)}{C(x)}-\frac{B(x)}{C(x)}) \qquad (28)$$

$$1+ln\frac{B(x)}{C(x)}-\frac{B(x)}{C(x)}=1+ln\frac{\tilde{r}-r^*}{\tilde{r}-r_{min}}-\frac{\tilde{r}-r^*}{\tilde{r}-r_{min}} \qquad (29)$$

Заметим, что $r^*>r_{min}=\sum_{i=1}^{N}x_i r_{i1}$ и $\tilde{r}>r^*$. Покажем, что выражение (29) меньше 0.

Обозначим $\tilde{r}-r^*=a$,

Тогда $\tilde{r} - r_{min} = \tilde{r} - r^* + (r^* - r_{min}) = a + y$, где y=$r^* - r_{min} > 0$.

Подставляя в (29) , получим

$$1 + ln\frac{\tilde{r} - r^*}{\tilde{r} - r_{min}} - \frac{\tilde{r} - r^*}{\tilde{r} - r_{min}} = 1 + ln\frac{a}{a+y} - \frac{a}{a+y} \quad (30)$$

Покажем, что

Δ= $ln\frac{a}{a+y} - \frac{a}{a+y} < 0$для всех y>0.

Очевидно, Δ= $ln\frac{a}{a+y} - \frac{a}{a+y} = 0$ при y=0 и кроме того функция Δ (y) монотонно убывающая, т.к.

$\Delta'(y) = -\frac{1}{a+y} - \frac{a}{(a+y)^2} = -\frac{y}{(a+y)^2} < 0$, для всех y>0.

Таким образом $\Delta(y) < 0$, для всех y>0, и окончательно $\frac{\partial\beta(x)}{\partial x_i} < 0$.

Вычислим первые производные

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\big(\varphi(x)D(x)\big) = \varphi'(x)D(x) + D'(x)\varphi(x) < 0 \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\ \ x^2{}_i}\big(\varphi(x)D(x)\big) = \varphi''(x)D(x) + D'(x)\varphi'(x) + D''(x)\varphi(x) + D'(x)\varphi'(x) =$$

$$= \varphi''(x)D(x) + \varphi(x)D''(x) + 2D'(x)\varphi'(x) \quad (32)$$

Но поскольку $D''(x) > 0, \varphi''(x) > 0, D'(x) < 0, \varphi'(x) < 0,\ then(32) > 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial\ \ x^2{}_i}\big(\varphi(x)D(x)\big) > 0 \quad (33)$$

А условия (33) являются достаточными условиями того, что β(x)=$\varphi(x)D(x)$ - выпукла..

Итак , мы доказали что в случае, когда $\sum_{i=1}^{N} x_i r_{i1} \le r^* \le \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i = \tilde{r}$

то функция риска $\beta(x)$ является выпуклой .

Кроме , того если интервалы для нечетких доходностей (r_{i2}, r_{i1}) таковы, что удовлетворяют значению порядка, а именно:

если$\tilde{r}_1 < \tilde{r}_2 < \cdots < \tilde{r}_i < \tilde{r}_{i+1} < \cdots$, то $\tilde{r}_{11} \le \tilde{r}_{21} \le \cdots \le \tilde{r}_{i1} \le \tilde{r}_{i+1,1} \le$

то как было доказано раньше функция риска $\beta(x)$ монотонно убывающая.

Таким образом, для данного случая задача нечеткой портфельной оптимизации (7)-(8) является задачей выпуклого программирования.

Учитывая, что ограничение (8) линейны, составим функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda, \mu) = \beta(x) + \lambda\left(r^* - \sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i\right) + \mu\left(\sum_{i=1}^{N} x_i - 1\right)$$

Условия оптимальности по Куну-Таккеру будут таковы

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial\beta(x)}{\partial x_i} - \lambda r_i + \mu \ge 0\,;\ i = \overline{1, N}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda} = -\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i + r^* \le 0 \frac{\partial L}{\partial\mu} = \sum_{i=1}^{N} x_i - 1 = 0$$

И условия дополняющей нежесткости

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} x_i = 0\ ;\ i = \overline{1, N}\frac{\partial L}{\partial \lambda}\lambda = \lambda\left(-\sum_{i=1}^{N} x_i \tilde{r}_i + r^*\right) = 0 x_i \geq 0\ ,\ \ x \geq 0$$

где $\lambda \geq 0$ и μ - неопределенные множители Лагранжа. Эту задачу можно решать стационарными методами выпуклого программирования, например,методом Зойтендейка , или штрафных функций.

Экспериментальные исследования

Входными данными для экспериментов являются рыночные цены акций ведущих российских компании – ОАО РАО ЕЭС России, ОАО ГМК Норильский никель, ОАО ЛУКОЙЛ и ОАО Газпром за февраль 2008 года. Наиболее доходными за этот период являются акции ОАО ГМК Норильский никель, наименее доходными – акции ОАО «Газпром».

Исследуем зависимость уровня риска risk от заданного порового значения доходности r^* для различных комбинации бумаг в портфеле.

Таблица 1. Результаты по портфелю из акций ОАО Газпром и ОАО РАО ЕЭС

r^*	risk
0,2	0,374
0,4	0,398
0,5	0,4887
0,6	0,5921
0,8	0,71
1	0,8097
1,2	0,892
1,4	0,954
1,6	0,995

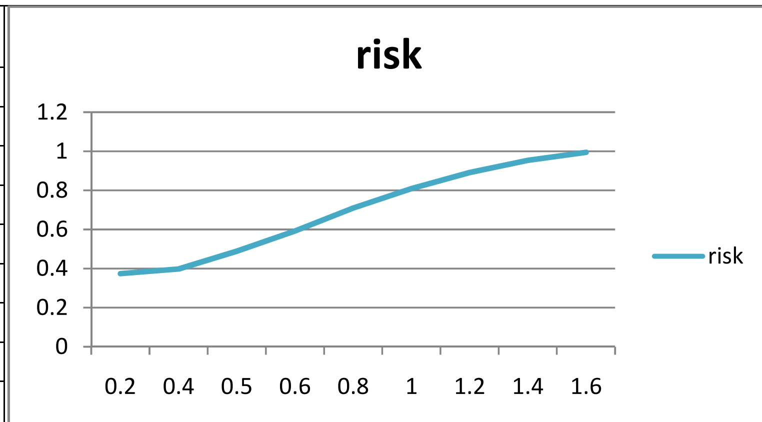


Таблица2. Результаты по портфелю из акций ОАО ЛУКОЙЛ и ОАО РАО ЕЭС России

r^*	risk
0,2	0,373
0,4	0,452
0,6	0,603
0,8	0,725
1	0,799
1,2	0,86
1,4	0,903
1,6	0,95
1,8	0,985

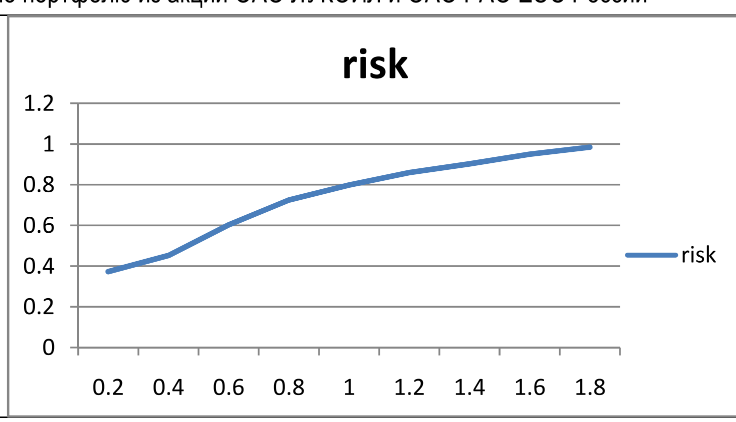


Таблица3.Результаты по портфелю из акций ОАО Газпром и ОАО ЛУКОЙЛ

r^*	risk
0,1	0,468
0,2	0,561
0,4	0,638
0,6	0,718
0,8	0,787
1	0,844
1,2	0,897
1,4	0,948
1,6	0,99

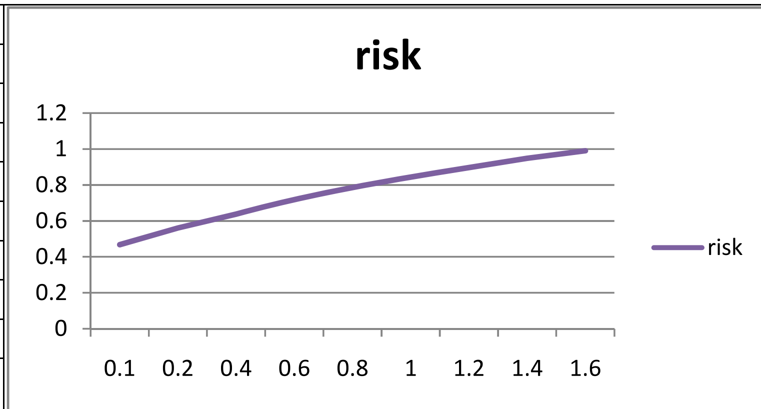
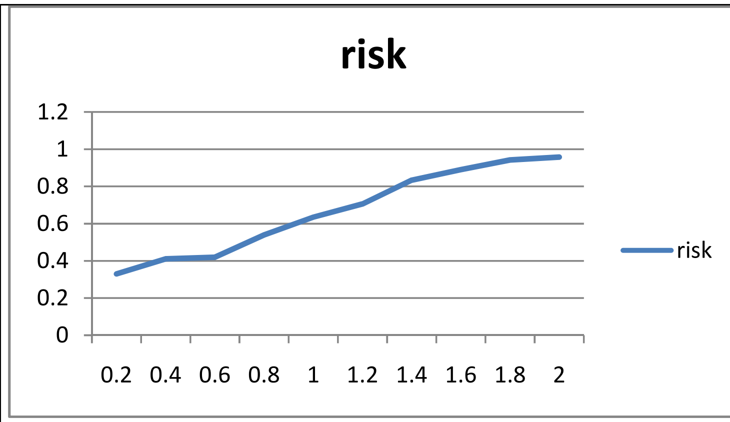


Таблица 4.Результаты по портфелю из акцийОАО Газпром, ОАО ГМК Норильский никель и ОАО ЛУКОЙЛ

r^*	risk
0,2	0,457
0,4	0,477
0,6	0,625
0,8	0,745
1	0,82
1,2	0,871
1,4	0,918
1,6	0,962
1,8	0,999



Таким образом, судя по полученным графикам можно сделать вывод что при увеличении заданного порового значения доходности, уровень риска увеличивается.

Исследуем зависимость уровня доходности портфеля R=(R1;R_;R2) от уровня риска risk.

На рис.1 и в таблице 5 приведены результаты по портфелю из акцийОАО Газпром и ОАО РАО ЕЭС России

Таблица 5

R1	R_	R2	risk
-3,27524	0,32628	4,88492	0,374
-3,27693	0,325257	4,878173	0,398
-3,6526	0,228595	4,396182	0,4887
-3,77124	0,197885	4,242538	0,5921
-3,88174	0,16928	4,09942	0,71
-3,89545	0,165732	4,081668	0,8097
-3,88902	0,167396	4,089994	0,892
-3,90088	0,163151	4,065503	0,954
-3,88659	0,168024	4,093136	0,995

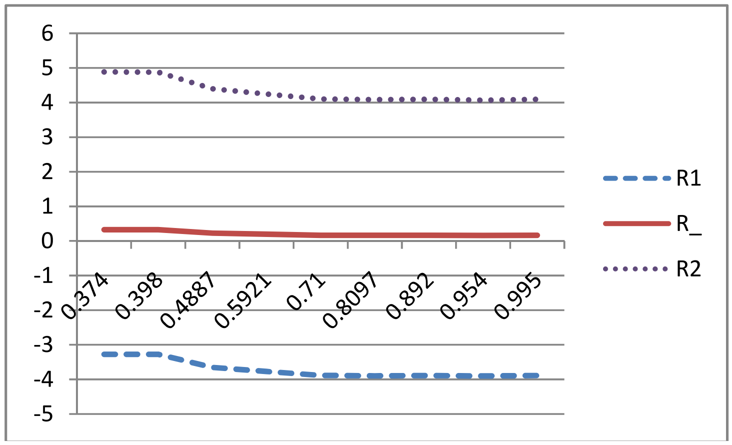


Рис. 1

На рис.2, 3 и в таблице 6приведены результаты по портфелю из акцийОАО ГМК Норильский никель и ОАО Газпром

Таблица 6

R1	R_	R2	risk
-4,12801	0,42681	5,738035	0,391
-3,72911	0,4227	5,39345	0,4391
-3,73777	0,40998	5,32853	0,462
-3,77676	0,35274	5,03639	0,55
-3,84824	0,2478	4,5008	0,6837
-3,89062	0,185578	4,183233	0,79737
-3,90398	0,165963	4,083121	0,8836
-3,906	0,163	4,068	0,954
-3,906	0,163	4,068	0,999

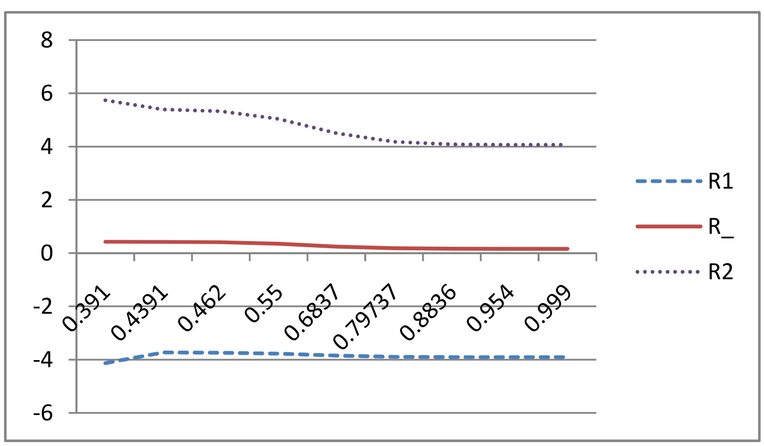


Рис. 2

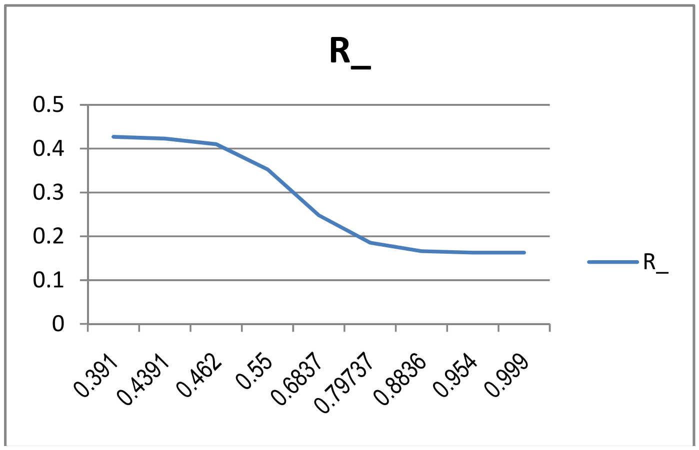


Рис. 3

На рис 4,.5 и в таблице 7 приведены результаты по портфелю из акцийОАО ЛУКОЙЛ и ОАО ГМК Норильский никель

Таблица 7

R1	R_	R2	risk
-4,19568	0,463374	5,638832	0,342
-4,26125	0,440213	5,524536	0,415
-4,38483	0,396564	5,309132	0,462
-4,67612	0,293676	4,801394	0,5924
-4,78078	0,256708	4,61896	0,695
-4,79717	0,250918	4,590386	0,7858
-4,77927	0,257242	4,621598	0,8705
-4,78709	0,254481	4,60797	0,937
-4,80222	0,249136	4,581594	0,989

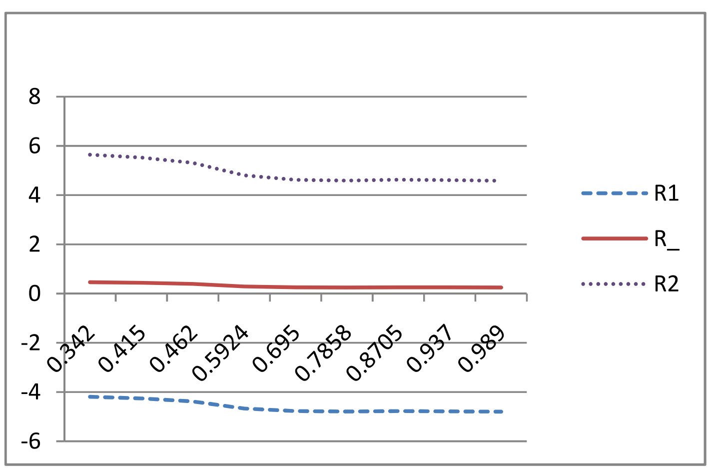


Рис. 4

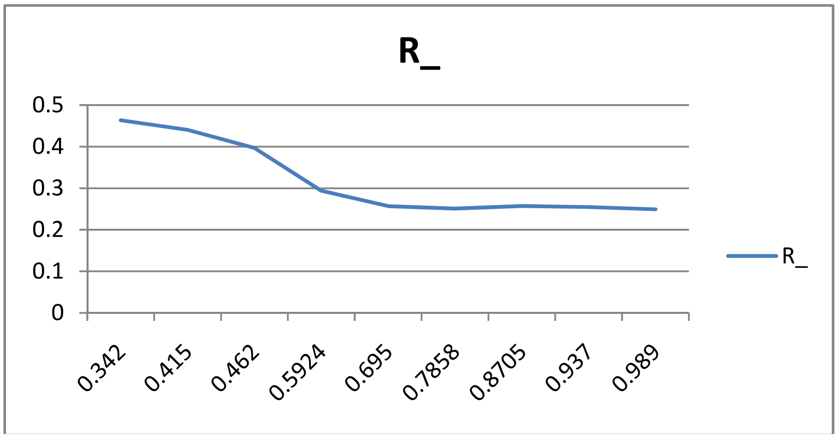


Рис. 5

На рис.6, и в таблице 8 приведены результаты по портфелю из акцийОАО Газпром, ОАО ГМК Норильский никель и ОАО ЛУКОЙЛ

Таблица 8

R1	R_	R2	risk
-3,76731	0,403705	5,295202	0,457
-4,029	0,347101	5,023902	0,477
-4,15759	0,315776	4,872436	0,625
-4,64647	0,262933	4,63917	0,745
-4,7979	0,250057	4,584974	0,82
-4,7952	0,249805	4,58345	0,871
-4,79988	0,248554	4,577364	0,918
-4,79988	0,248454	4,577364	0,962
-4,78547	0,252836	4,598328	0,999

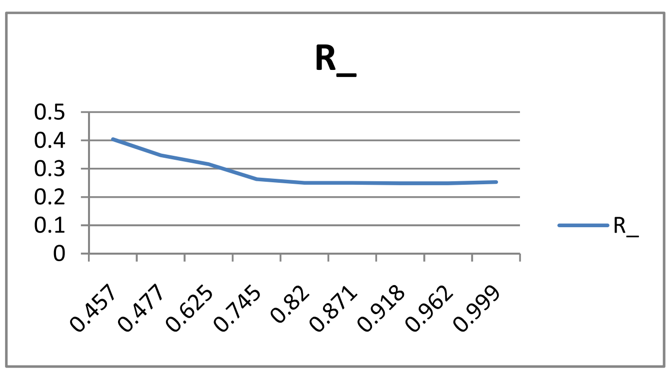


Рис. 6

На рис.7 и в таблице 9 приведены результаты по портфелю из акцийОАО РАО ЕЭС России, ОАО ГМК Норильский никель и ОАО ЛУКОЙЛ

Таблица 9

R1	R_	R2	risk
-3,61028	0,445731	5,522534	0,341
-3,5609	0,434741	5,46456	0,42
-4,11287	0,377739	5,19912	0,528
-4,41087	0,290823	4,773968	0,701
-4,41639	0,291458	4,77744	0,786
-4,57568	0,272961	4,690976	0,853
-4,66402	0,264004	4,64962	0,907
-4,71599	0,258063	4,621886	0,955
-4,72066	0,258482	4,624224	0,995

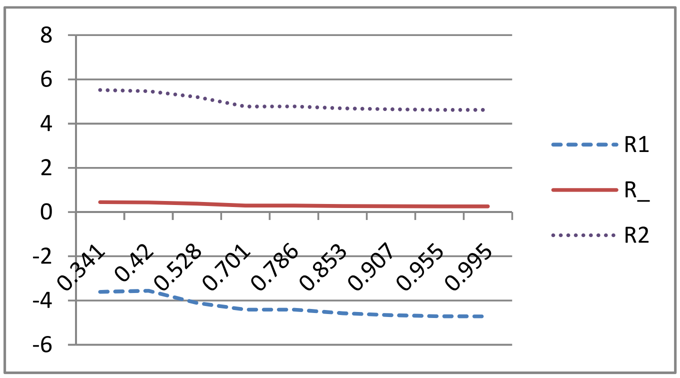


Рис. 7

На рис.8 и в таблице 10 приведены результаты по портфелю из акцийОАО РАО ЕЭС России, ОАО Газпром, ОАО ГМК Норильский никель и ОАО ЛУКОЙЛ

Таблица 10

R1	R_	R2	risk
-4,09352	0,452824	5,577784	0,34
-3,89222	0,461952	5,610476	0,404
-3,88378	0,439452	5,49371	0,5235
-3,985	0,294998	4,751116	0,688
-4,32256	0,292872	4,768776	0,799
-4,42812	0,286567	4,744776	0,857
-4,38233	0,214641	4,368052	0,954

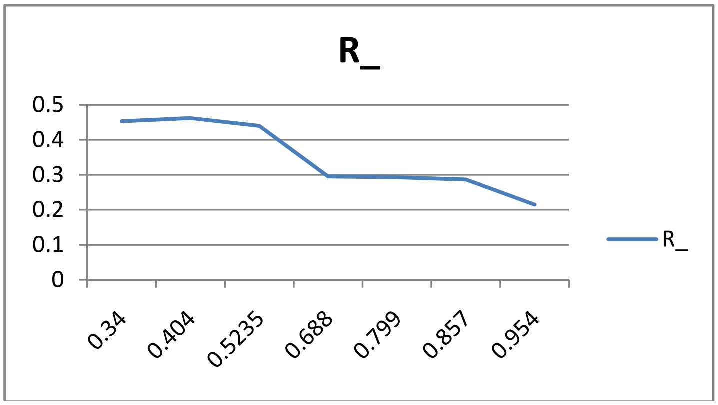


Рис. 8

Таким образом, судя по полученным графикам можно сделать вывод, что при увеличении уровня риска ожидаемая доходность инвестиционного портфеля падает.

Заключение

В работе рассмотрена и исследована двойственная задача нечеткой портфельной оптимизации Определены достаточные условия, при которых данная задача является задачей выпуклого программирования В этом случае данную задачу можно решать стандартными методами выпуклого программирования. Проведены экспериментальные исследования, в ходе которых построены зависимости риска портфеля от критериального значения доходности, а также ожидаемой доходности портфеля от величины риска

Благодарности

Статья частично финансирована из проекта **ITHEA XXI** Института Информационных теорий и Приложений FOI ITHEA и консорциума FOIBulgaria (www.ithea.org, www.foibg.com)

Литература

1) Зайченко Юрий, Малихех Есфандиярфард. Анализ и сравнение результатов оптимизации инвестиционного портфеля при применении модели Марковитца и нечетко-множественного метода .//Proceedings of X111-th International Conference KDS-2007 “Knowledge, Dialogue Solution”, Vol.1 , pp.278-286.
2) Зайченко Ю.П., Малихех Есфандиярфард. Оптимизация инвестиционного портфеля в условиях неопределенности// Системні дослідження та інформаційні технології.-№2-2008.-с. 59-76.
3) Зайченко Ю.П., д.т.н., проф., Малихех Есфандиярфард, Заика А.И. Анализ инвестиционного портфеля на основе прогнозирования курсов акций // Вісник національного технічного університету України «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка.»» Київ ТОО «ВЕК+», №47 – 2007, - С. 168-179.

Информация об авторах

***Юрий Зайченко**– доктор технических наук, профессор. Институт прикладного системного анализа НТУУ «КПИ»,03056, Киев-56, Украина phone: 38044 -4068393,*

e-mail:, baskervil@voliacable.com ,

***Ови Нафас Агаи Аг Гамиш (Иран) -** аспирант НТУУ «КПИ»; 03056, Киев-56, Украина*

e-mail: ovinafas@yahoo.com