Krassimir Markov, Vitalii Velychko, Oleksy Voloshin
(editors)

Information Models of Knowledge

I T H E A®
KIEV – SOFIA
2010

Krassimir Markov, Vitalii Velychko, Oleksy Voloshin (ed.)
Information Models of Knowledge
ITHEA®
Kiev, Ukraine – Sofia, Bulgaria, 2010
ISBN 978-954-16-0048-1

First edition

Recommended for publication by The Scientific Concil of the Institute of Information Theories and Applications FOI ITHEA
ITHEA IBS ISC: 19.

This book maintains articles on actual problems of research and application of information technologies, especially the new approaches, models, algorithms and methods fot information modeling of knowledge in: Intelligence metasynthesis and knowledge processing in intelligent systems; Formalisms and methods of knowledge representation; Connectionism and neural nets; System analysis and sintesis; Modelling of the complex artificial systems; Image Processing and Computer Vision; Computer virtual reality; Virtual laboratories for computer-aided design; Decision support systems; Information models of knowledge of and for education; Open social info-educational platforms; Web-based educational information systems; Semantic Web Technologies; Mathematical foundations for information modeling of knowledge; Discrete mathematics; Mathematical methods for research of complex systems.

It is represented that book articles will be interesting for experts in the field of information technologies as well as for practical users.

General Sponsor: Consortium FOI Bulgaria (www.foibg.com).

Printed in Ukraine

ISBN 978-954-16-0048-1

C\o Jusautor, Sofia, 2010

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЧЕТКОЙ МОДЕЛИ ПОТРЕБЛЕНИЯ

Олег Пошелюжный

***Abstract**: В данной работе рассматривается неоклассическая задача теории потребления. Применяется нечеткий подход для построения и оптимизации функции полезности. Приводиться иллюстративный пример.*

***Keywords**: микроэкономика, теория потребления, функция полезности, методы оптимизации, нечеткие множества, принцип расширения.*

***ACM Classification Keywords**: Decision Support & Artificial Intelligence*

Введение

В теории принятия решений часто возникают ситуации, в которых исходные условия задачи нечетко определены. Такие ситуации отображают недостаточную информированность лица, принимающего решение (ЛПР). Таким образом, для дальнейшего применения математических методов анализа и исследование все более сложных систем появилась потребность в использовании теории нечетких множеств. Одним из наиболее актуальных направлений этой теории является проблема принятия решений при нечетких условиях и критериях, которая привела к появлению нового направления в математическом программировании – нечеткого математического программирования (НМП).

Классическая постановка

Пусть существует конечное число $n, n \geq 1$, товаров, которые имеют свойство количественной измеримости. Выбор потребителя характеризуется набором товаров $x = (x_1, \ldots, x_n) = (x_i)_{i=\overline{1,n}}$, $x_i \geq 0$, где x_i — количество i-го товара, приобретенного потребителем. Тогда все возможные наборы товаров является точками пространства товаров X (множество альтернатив) $X \subseteq R_+^n$.

Выбор потребителем определенного набора товаров зависит не только от его потребностей, а частично и от его вкусов. Он характеризуется субъективным отношением предпочтения на множестве товаров, которое обозначим $\succeq$. В математической теории потребления считается, что отношение предпочтения удовлетворяет ряду аксиом, которые интерпретируют естественные свойства выбора потребителя и обеспечивают возможность развития полноценной теории. Основную группу аксиом представляют такие:

A1. Отношение предпочтения является полным квазипорядком в пространстве товаров X, т.е. является бинарным отношением, для которого выполняются такие свойства [Пономаренко, 2004]:

I. Отношение $\succeq$ рефлексивное, т.е. $x \succeq x, \forall x \in X$;

II. Отношение $\succeq$ транзитивное, т.е. из $x \succeq y$ и $y \succeq z$ для $\forall x, y, z \in X$ вытекает, что $x \succeq z$;

III. Отношение $\succeq$ полное, т.е. для $\forall x, y \in X$ или $x \succeq y$, или $y \succeq x$.

A2. Отношение предпочтения $\succeq$ непрерывное.

Тогда пара $(X, \succeq)$, т.е. пространство товаров X с отношением предпочтения $\succeq$ определенного потребителя, называется полем предпочтений этого потребителя.

Определение 1. Числовая функция $U: X \to R_+^1$, определенная на X, называется функцией полезности, которая представляет отношение предпочтения $\succeq$, если для $\forall x, y \in X$ выполняется $\left(U(x) \geq U(y)\right) \Leftrightarrow \left(x \succeq y\right)$.

Функция полезности потребителя выражает количественную меру ценности разных потребительских наборов товара из пространства товаров. Одним из основных результатов теории потребления и теории полезности в задачах принятия решений является теорема Ж. Дебре, которая задает достаточные условия существования функции полезности [Волошин, 2006].

Нечеткая постановка задачи потребления

Процесс принятия решений как выбор наилучшей альтернативы из множества альтернатив X, может происходить при разной степени информированности ЛПР. На практике могут быть такие ситуации, когда у ЛПР отсутствует четкое представление об отношении предпочтения между всеми или некоторыми альтернативами, а можно лишь оценить степень выполнения того или другого предпочтения между парами альтернатив в виде числового значения μ, $\mu \in [0,1]$.

Аналогично "обычным" бинарным отношением можно рассматривать понятие нечеткого бинарного отношения на множестве X, как нечеткое подмножество декартового произведения $X \times X$ с функцией принадлежности $\mu_R(x,y)$, $0 \le \mu_R(x,y) \le 1$, тогда, с помощью ЛПР, можно ввести нечеткое отношение предпочтения [Орловский, 1981].

Определение 2. Нечетким отношением предпочтения на множестве альтернатив X будем называть любое заданное на этом множестве нечеткое рефлексивное отношение R, которое характеризуется функцией принадлежности $\mu_R : X \times X \to [0,1]$.

На нечеткое отношение предпочтения в теории потребления накладываются условия *A1, A2.*

Если R – нечеткое отношение предпочтения на множестве X, то для произвольной пары альтернатив $(x,y) \in R$ значения $\mu_R(x,y)$ следует понимать как степень выполнения предпочтения $x \succeq y$, далее нечеткое отношение предпочтения будем обозначать как $x \overset{\mu}{\succeq} y$. Используя определение 1, предложим следующее определение функции полезности при нечетком отношении предпочтения.

Определение 3. Числовая функция $U : X \to R^1_+$, определенная на X, называется функцией полезности, которая представляет нечеткое отношение предпочтения $\overset{\mu}{\succeq}$, $0 \le \mu \le 1$, если для $\forall x, y \in X$ выполняется $\left(U(x) \overset{\mu}{\ge} U(y) \right) \Leftrightarrow \left(x \overset{\mu}{\succeq} y \right)$.

Для ЛПР набор товаров x предпочтительнее набора y со степенью μ, тогда и только тогда, когда число $U(x)$ больше за число $U(y)$ со степенью μ, т.е. применяется понятие "субъективной вероятности" – "в μ случаях набор x есть предпочтительнее набора y".

Согласно теории экономического поведения потребителя считается, что потребители выбирают наилучший относительно сравнительных преимуществ набор товаров, который они могут себе позволить. Тогда пусть ЛПР был осуществлен рациональный выбор нечеткого подмножества недоминированных альтернатив $X^p = \left\{ x \in X \mid \mu^p(x) = 1 - \sup\limits_{y \in X} \left(\mu_R(y,x) - \mu_R(x,y) \right) \right\}$, где $\mu^p(x)$ – есть степень, с которой альтернатива x не доминируется ни одной из альтернатив множества X.

Например, для человека потребление набора товаров x, которые оцениваются 1500 ккал. является более полезным за набор товаров y, которые дают 500 ккал. $\left(1500 \overset{6/7}{\ge} 500 \right) \Leftrightarrow \left(x \overset{6/7}{\succeq} y \right)$. Тогда бывают случаи (один раз в неделю), когда набор y предпочтительнее набора x, т.е. $\left(500 \overset{1/7}{\ge} 1500 \right) \Leftrightarrow \left(y \overset{1/7}{\succeq} x \right)$.

На основе определения 3 возможны следующее методы построения нечеткой функции полезности.

1. Функция полезности является обычной четкой функцией, сравнение нечетким.
2. ЛПР строит функцию полезности на основе нечетких параметров.
3. Функция полезности является нечеткой функцией, сравнение четким.
4. Функция полезности и сравнение являются нечеткими.
5. ЛПР задает нечеткую функцию полезности.

При построении нечетких моделей используются различные типы функций принадлежности – треугольная, трапециедальная, колоколобразная, гауссовская [Зайченко, 2008].

Рассмотрим основные классы функций полезности на нечетком подмножестве недоминированных альтернатив X^p.

I. Класс линейных функций полезности.

$\tilde{U}(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$; $x=(x_i)_{i=\overline{1,n}} \in R_+^n$, $a_i \ge 0$, где a_i – нечеткий параметр, определяется как множество аргументов, для которых функция принадлежности $\mu_i(a_i) \ge \lambda$, $i=\overline{1,n}$, где $\lambda=\mu_{\succeq}(x,y)$, $\forall y \in X$.

II. Класс мультипликативных функций полезности.

$\tilde{U}(x)=\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$; $x=(x_i)_{i=\overline{1,n}} \in R_+^n$, $\alpha_i \ge 0$, где α_i – нечеткий параметр.

При применении полей предпочтений потребителей $(X,\succeq)$ чаще всего наблюдается ситуация, когда выбор потребителя ограничен бюджетом. К бюджетным факторам принадлежат цена p_i на товар вида i, $i=\overline{1,n}$, и уровень потребительского дохода I. Тогда потребитель при выборе набора товаров x должен учесть бюджетное ограничение $xp=p_1x_1+\ldots+p_nx_n \le I$.

Таким образом, допустимые наборы товаров в пространстве R_+^n образуют потребительский симплекс $S_n=\left\{x \in R_+^n \mid xp \le I\right\}$, который является замкнутым выпуклым множеством в R_+^n.

При заданной нечеткой функции полезности и бюджетном ограничении задача потребления принимает следующий вид:

$$\tilde{U}(x) \to \max, \quad xp \le I, \; x \in R_+^n. \tag{1}$$

Задача (1) является задачей нечеткого математического программирования (НМП). Поскольку допустимое множество для этой задачи является выпуклым и компактным, то она имеет единственное решение $\xi^*=x^*(p,I)$, которое называется функцией спроса потребителя, с функцией принадлежности множеству альтернатив со степенью $\mu_D(\xi^*)=\min\{\mu_G(\xi^*),\mu_C(\xi^*)\}$, где $\mu_G(\xi^*)$ - функция принадлежности нечеткой цели, $\mu_C(x^*)$ - функция принадлежности ограничению.

На практике, в условиях динамического развития рынка и конкурентной среды, цены на товары и услуги, а также доходы потребителей не могут быть определены “точно”. Как правило, они колеблются в определенном диапазоне в краткосрочном периоде. Поэтому, в качестве их описания предлагается использовать “нечетко” заданные цены и “нечеткий” доход, с заданием приоритета (функции принадлежности). Тогда задачу (1) можно записать следующим образом:

$$\tilde{U}(x) \to \max, \quad x\tilde{p} \le \tilde{I}, \; x \in R_+^n, \tag{2}$$

где $\tilde{U}(x)$ – нечеткая функция полезности потребителя, $\tilde{p}$ – нечеткий вектор цен на товары, $\tilde{I}$ – нечетких доход (капитал).

Исследование нечеткой модели потребления

Определим функцию Лагранжа L для задачи (2): $L(x,\lambda)=\tilde{U}(x)+\gamma(\tilde{I}-x\tilde{p})$. Условие оптимального потребления принимает вид системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{U}}{\partial x_i}(x_1^*,\dots,x_1^n)-\gamma^*\tilde{p}_i=0,\ i=\overline{1,n}, \\ \tilde{I}-\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{p}_i x_i^*=0,\ x_i>0, i=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{3}$$

Задача (2) является ЗНМП, когда нечетко описанные как параметры в ограничении задачи, так и в самой максимизирующей функции. Предложим метод решения данной задачи. Введем несколько определений.

Определение 4. Нечетким числом называется нечеткое множество A, определенное на множестве действительных чисел $A\subseteq R$ с функцией принадлежности $\mu_A: R\to[0,1]$ и удовлетворяющее условиям [Орловский, 1981]:

1. $\sup\limits_{x\in R}\mu_A(x)=1$, т.е. нечеткое множество A является нормальным.
2. $\mu_A\left[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right]\ge\min\left\{\mu_A(x_1),\mu_A(x_2)\right\},\ \forall x_1,x_2\in R,\ \forall\lambda\in[0,1]$, т.е. нечеткое множество A выпуклое.
3. Функция $\mu_A(x)$ является непрерывной.

Пусть $f: X\to Y$ - заданное отображение и пусть A - некоторое нечеткое подмножество множества X. Соответственно обобщению Лотфи А. Заде, образ A при отображении φ определяется как нечеткое подмножество множества Y, которое представляет собой совокупность пар вида $\left(y,\mu_B(y)\right)$, где $\mu_B: Y\to[0,1]$ функция принадлежности образа. Тогда можно записать:

$$\mu_B(y)=\sup_{x\in f^{-1}(y)}\mu_A(x),\ y\in Y \tag{4}$$

где $f^{-1}(y)=\left\{x\mid x\in X,\ f(x)=y\right\},\ \forall y\in Y$.

Выражение (3) есть одним из определений принципа расширения Лотфи А. Заде, для расширения области применения нечетких множеств на отображение. Применим принцип расширения для операций над нечеткими числами.

Если существует некоторое четкое отображение $f: X_1\times X_2\times\ldots\times X_n\to Y$, а также некоторые нечеткие множества $A_1\subseteq X_1,\ A_2\subseteq X_2,\dots,A_n\subseteq X_n$, то соответственно принципу расширения нечеткое число $B=f(A_1,\ A_2,\dots,A_n)$ определяется функцией принадлежности:

$$\mu_B(y)=\begin{cases} \sup\limits_{(x_1,\dots,x_n)\in f^{-1}(y)}\min\left(\mu_{A_1}(x_1),\dots,\mu_{A_n}(x_n)\right),\ if\ \ f^{-1}(y)\neq 0, \\ 0,\ if\ \ f^{-1}(y)=0. \end{cases} \tag{5}$$

Это разрешает найти функцию принадлежности нечеткого числа, которое отвечает значению четкой функции от нечетких аргументов.

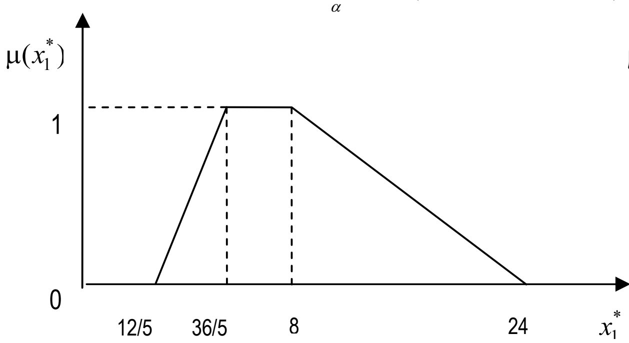
Рассмотрим иллюстративный пример. Пусть потребитель делает выбор между двумя наборами товаров, которые содержат два товара хлеб и молоко $x=(6,\ 1)$ и $y=(3,\ 2)$, и считает, что $x\overset{0,7}{\succeq}y$. Функция полезности имеет вид $U(x_1,x_2)=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$. Найти функцию спроса, если цены товаров $p_1=1,\ p_2=3$ и доход потребителя $I=12$. $\alpha,\ \beta$ - нечеткие числа с функциями принадлежности треугольного и трапецеидального вида:

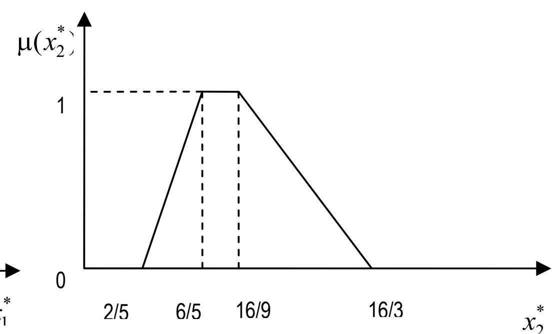
$$\mu_A(\alpha)=\begin{cases}0, & \alpha\le 1/4;\\ 4\alpha-1, & 1/4\le\alpha\le 1/2;\\ 3-4\alpha, & 1/2\le\alpha\le 3/4;\\ 0, & \alpha\ge 3/4.\end{cases}\qquad \mu_B(\beta)=\begin{cases}0, & \beta\le 1/8;\\ 8\beta-1, & 1/8\le\beta\le 1/4;\\ 1, & 1/4\le\beta\le 1/3;\\ 3-6\beta, & 1/3\le\beta\le 1/2;\\ 0, & \beta\ge 1/2.\end{cases}$$

Задача оптимального поведения потребителя:

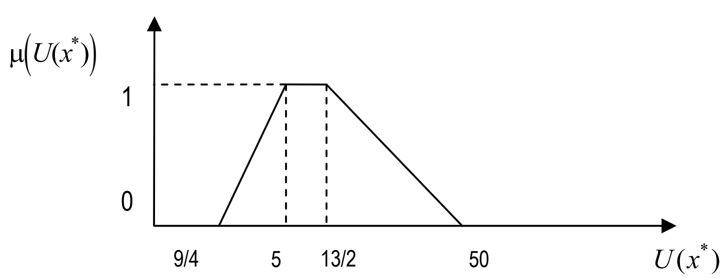
$$\begin{cases}U(x)=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}\to\max,\\ p_1x_1+p_2x_2=I,\\ x_1,\quad x_2>0.\end{cases}$$

Применим условие оптимального потребления (3), тогда функция спроса первого товара $x_1^*=\dfrac{\alpha I}{(\alpha+\beta)p_1}$, функция спроса второго товара $x_2^*=\dfrac{\beta I}{(\alpha+\beta)p_2}$. Поскольку α, β являются нечеткими числами, то решение также является нечетким с функцией принадлежности $\mu_D(x^*)$. Найдем его с помощью принципа расширения (5): $\mu_{A+B}(\eta)=\sup\limits_{\alpha}\min\{\mu_A(\alpha),\mu_B(\eta-\alpha)\}$, $\mu_{A/B}(\eta)=\sup\limits_{\alpha}\min\{\mu_A(\eta\alpha),\mu_B(\alpha)\}$, тогда





Построим функцию принадлежности для функции полезности. Таким образом, $\mu\big(U(x)\big)=0,9$, $\mu\big(U(y)\big)=0,75$.



ЛПР анализирует величину интервала оптимальных значений полезности от определенного набора товаров $\xi^*=x^*(p,I)$ в зависимости от степени достоверности интервала $\mu(U)$ и принимает решение какое количество товаров ему приобрести.

Заключение

Модели и методы нечеткого анализа *("Fuzzy Sets")* дают возможность более адекватно описать задачу потребления в теории микроекономики. Были построены нечеткие модели потребления (с нечеткими функциями полезности и нечеткими отношениями предпочтения), предложены алгоритмы получения нечеткого решения с использованием различных способов дефазификации решения. Рассмотрен иллюстративный пример с трапецеидальной функцией принадлежности.

Благодарности

Автор благодарен проф. Волошину А.Ф. за постановку задачи и консультирование при написании статьи.

Статья частично финансирована из проекта ITHEA XXI Института Информационных теорий и Приложений FOI ITHEA и Консорциума FOI Bulgaria (www.itea.org, www.foibg.com).

Литература

[Волошин, 2006] Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Теорія прийняття рішень.– К.: ВПЦ «Київський ун-т», 2006.– 304 с.

[Пономаренко, 2004] Пономаренко О.І. та ін. Мікроекономіка. – Київ: Вища школа, 2004. – 262с.

[Зайченко, 2008] Зайченко Ю.П. Нечёткие модели и методы в интеллектуальных системах. – Киев: Киевский политехнический институт, 2008. –344с.

[Орловский, 1981] Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – Москва: Наука, 1981. – 206с.

Информация об авторе

Пошелюжный Олег *– Аспирант, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина, 01017 Киев, ул. Владимирская, 64; e-mail: oleg_posh@mail.ru*

Сфера научных интересов: *принятие решений, системы поддержки принятия решений, математическая экономика, нечеткие модели и методы*