Krassimir Markov, Vitalii Velychko, Oleksy Voloshin
(editors)

Information Models of Knowledge

I T H E A®
K I E V – S O F I A
2010

Krassimir Markov, Vitalii Velychko, Oleksy Voloshin (ed.)
Information Models of Knowledge
ITHEA®
Kiev, Ukraine – Sofia, Bulgaria, 2010
ISBN 978-954-16-0048-1

First edition

Recommended for publication by The Scientific Concil of the Institute of Information Theories and Applications FOI ITHEA
ITHEA IBS ISC: 19.

This book maintains articles on actual problems of research and application of information technologies, especially the new approaches, models, algorithms and methods fot information modeling of knowledge in: Intelligence metasynthesis and knowledge processing in intelligent systems; Formalisms and methods of knowledge representation; Connectionism and neural nets; System analysis and sintesis; Modelling of the complex artificial systems; Image Processing and Computer Vision; Computer virtual reality; Virtual laboratories for computer-aided design; Decision support systems; Information models of knowledge of and for education; Open social info-educational platforms; Web-based educational information systems; Semantic Web Technologies; Mathematical foundations for information modeling of knowledge; Discrete mathematics; Mathematical methods for research of complex systems.

It is represented that book articles will be interesting for experts in the field of information technologies as well as for practical users.

General Sponsor: Consortium FOI Bulgaria (www.foibg.com).

Printed in Ukraine

ISBN 978-954-16-0048-1

C\o Jusautor, Sofia, 2010

СТРУКТУРА ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННОГО СЕМЕЙСТВА МУЛЬТИМНОЖЕСТВ

Дмитрий Буй, Юлия Богатырёва

Аннотация: *Статья посвящена некоторым вопросам теории мультимножеств. Введены основные определения, касающиеся теории мультимножеств. Построена решетка мультимножеств. Показана роль законов поглощения при построении решетки мультимножеств. Кроме того, частичное упорядоченное множество мультимножеств вложено в две полные решетки, одна из которых построена путем обобщения понятия мультимножества (допускается бесконечная кратность элементов основы).*

Ключевые слова: *мультимножество, решетка мультимножеств, полная решетка мультимножеств.*

ACM Classification Keywords: *F.4.1 Mathematical Logic, G.2.1 Combinatorics, H.2.4 Systems – Relational databases.*

Введение

Мультимножества – это совокупности с повторениями. Мультимножества удобно использовать в качестве модели для представления и исследования объектов, особенностью которых является, во-первых, множественность и, во-вторых, повторяемость данных.

Анализ современной литературы по мультимножествам [Blizard, 1989], [Lamperti, 2001], [Singh, 2007], [Буй, Богатирьова 2010] свидетельствует о достаточно широком применении мультимножеств при решении теоретико-прикладных задач. Это вызывает необходимость расширения и уточнения соответствующих аспектов теории мультимножеств.

В статье рассматривается вопрос построения (полной) решетки мультимножеств.

Основные определения

Введем формальное определение мультимножества. Мультимножество α с основой U – это функция вида $\alpha : U \to N^+$, где U – некоторое множество (в классическом канторовском понимании), а $N^+ = \{1, 2, ...\}$ – множество натуральных чисел без нуля [Петровский, 2002], [Редько, 2001]. Зафиксируем некоторое множество D. Всюду далее будем рассматривать мультимножества, элементы основ которых принадлежат множеству D.

Пусть задано мультимножество α с основой $U_\alpha = dom\,\alpha$. Здесь $dom\,\alpha$ – область определения мультимножества как функции. Характеристической функцией мультимножества α называется функция вида $\chi_\alpha : D \to N$, значение которой задается кусочной схемой

$$\chi_\alpha(d) = \begin{cases} \alpha(d), \text{ если } d \in dom\alpha, \\ 0, \text{ иначе}; \end{cases}$$

для всех $d \in D$, где D – как было определено выше, универсум элементов основ мультимножеств [Петровский, 2002], [Редько, 2001]. Очевидно, что по характеристической функции соответствующее мультимножество восстанавливается однозначно. Таким образом, операции над мультимножествами удобно задавать в терминах характеристических функций.

Введем бинарное отношение включения на мультимножествах: мультимножество β включается в мультимножество α ($\beta \preceq \alpha$), если для их характеристических функций выполняется утверждение $\chi_\beta(d) \le \chi_\alpha(d)$, $\forall d \in D$. Непосредственно проверяется, что отношение включения является частичным порядком.

Пусть M – семейство мультимножеств соответствующего универсума D. Рассмотрим частично упорядоченное множество (ч.у.м.) $\langle \mathrm{M}, \preceq \rangle$ с введенным выше порядком включения и ч.у.м. характеристических функций $\langle \{\chi_\alpha \mid \alpha \in M\}, \lhd \rangle$. Порядок $\lhd$ определяется следующим образом: $\chi_\alpha \lhd \chi_\beta \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall d \left(d \in D \Rightarrow \chi_\alpha(d) \le \chi_\beta(d) \right)$. Второе ч.у.м. $\langle \{\chi_\alpha \mid \alpha \in M\}, \lhd \rangle$ является прямым произведением множества натуральных чисел N со стандартным порядком $\le$, т.е. $\{\chi_\alpha \mid \alpha \in M\} = \prod_{d \in D} N$. Нетрудно показать, что эти ч.у.м. изоморфны. Следовательно, структура ч.у.м. $\langle \{\chi_\alpha \mid \alpha \in M\}, \lhd \rangle$ сохраняется на ч.у.м. $\langle \mathrm{M}, \preceq \rangle$. А свойства ч.у.м. $\langle \{\chi_\alpha \mid \alpha \in M\}, \lhd \rangle$ вытекает из свойств ч.у.м. $\langle N, \le \rangle$.

Введем операции объединения и пересечения мультимножеств [Syropoulos, 2001], [Петровский, 2002], [Редько, 2001]. Операция $\bigcup_{All}$ мультимножествам α и β сопоставляет мультимножество $\alpha \bigcup_{All} \beta$, значение характеристической функции которого на произвольном аргументе d задается выражением $\max(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d))$. Операция $\bigcap_{All}$ мультимножествам α и β сопоставляет мультимножество $\alpha \bigcap_{All} \beta$, значение характеристической функции которого на произвольном аргументе d задается выражением $\min(\chi_\alpha(d), \chi_\beta(d))$.

Построение решетки мультимножеств

Рассмотренные выше операции объединения и пересечения мультимножеств имеют стандартные свойства.

Лемма 1. Операции $\bigcup_{All}$ и $\bigcap_{All}$ идемпотентны (т.е. $\alpha \bigcup_{All} \alpha = \alpha$, $\alpha \bigcap_{All} \alpha = \alpha$), коммутативны и ассоциативны.□

Доказательство вытекает из того, что теоретико-числовые операции $\max$, $\min$ имеют те же самые свойства.□

Таким образом, можно рассматривать две коммутативные идемпотентные полугруппы $\langle \mathrm{M}, \bigcup_{All} \rangle$ и $\langle \mathrm{M}, \bigcap_{All} \rangle$, где M – семейство мультимножеств соответствующего универсума D.

Используя результат теории решеток (см. например, [Скорняков, 1986], § 8, с. 151, теорема 1), можно полугруппу по объединению превратить в верхнюю полурешетку, а полугруппу по пересечению – в нижнюю. Частичные порядки верхней и нижней полурешеток задаются соответственно следующими определениями:

$$\alpha \bar{\le} \beta \overset{def}{\Leftrightarrow} \alpha \bigcup_{All} \beta = \beta, \ \alpha \bar{\unlhd} \beta \overset{def}{\Leftrightarrow} \alpha \bigcap_{All} \beta = \alpha ,$$

причем $\sup_{\bar{\le}}\{\alpha, \beta\} = \alpha \bigcup_{All} \beta$, $\inf_{\bar{\unlhd}}\{\alpha, \beta\} = \alpha \bigcap_{All} \beta$. Непосредственно проверятся, что эти порядки совпадают с введенным ранее порядком включения мультимножеств $\preceq$.

Теорема 1. Частично упорядоченное множество $\langle \mathrm{M}, \preceq \rangle$ является решеткой, причем $\sup_{\preceq}\{\alpha, \beta\} = \alpha \bigcup_{All} \beta$, $\inf_{\preceq}\{\alpha, \beta\} = \alpha \bigcap_{All} \beta$.□

Такой способ построения решетки мультимножеств явно не использовал законы поглощения. Покажем, в общем случае, их роль при построении решетки по двум коммутативным идемпотентным полугруппам, сигнатурные операции которых связаны законами поглощения.

Рассмотрим две коммутативные идемпотентные полугруппы $\langle A, + \rangle$ и $\langle A, \cdot \rangle$, где A – некоторое абстрактное множество.

Используя хорошо известный результат теории решеток о связи коммутативных идемпотентных полугрупп и полурешеток (полуструктур) [Скорняков, 1986, § 8, с. 151, теорема 1], полугруппу $\langle A,+\rangle$ можно превратить в верхнюю полурешетку, а полугруппу $\langle A,\cdot\rangle$ – в нижнюю. Соответствующие частичные порядки верхней и нижней полурешеток задаются выражениями:

$$a \le b \Leftrightarrow a+b=b\ ,\ a \triangleleft b \Leftrightarrow ab=a\ ,$$

причем $\sup_{\le}\{a,b\}=a+b$, $\inf_{\triangleleft}\{a,b\}=ab$. Заметим, что, согласно стандартным соглашениям [Мальцев, 1970], [Скорняков, 1986], знак " $\cdot$ " в выражениях опускается.

Теорема 2 (критерий совпадения порядков верхней и нижней полурешеток). Частичные порядки верхней и нижней полурешеток совпадают тогда и только тогда, когда выполняются законы поглощения.□

Доказательство. Сначала докажем необходимость. Если порядки совпадают, то заданное множество является одновременно и верхней и нижней полурешеткой, а, значит, является решеткой. Для решеток же законы поглощения выполняются [Мальцев, 1970], [Скорняков, 1986].

Докажем достаточность. Для этого нужно показать, что для $\forall\, a,b$ выполняется эквивалентность: $a+b=b \Leftrightarrow ab=a$.

Допустим, что равенство $a+b=b$ выполняется. Тогда $ab=a\,(a+b)$. По закону поглощения $a\,(a+b)=a$, поэтому $ab=a$.

Аналогично сделаем допущение, что $ab=a$. В этом случае $a+b=ab+b$. По закону поглощения $ab+b=b$, значит, $a+b=b$. □

Естественно, этот общий результат применим к построению решетки мультимножеств. Для этого надо убедится в выполнении законов поглощения: $\alpha \cap_{All} (\alpha \cup_{All} \beta)=\alpha$ и $\alpha \cup_{All} (\alpha \cap_{All} \beta)=\alpha$, что делается непосредственно (и, в свою очередь, вытекает из выполнения законов поглощения для теоретико-числовых функций $\max$, $\min$).

Построение полной решетки мультимножеств

Приведем более сильные результаты о структуре введенного частично упорядоченного семейства мультимножеств.

Предложение 1 (структура ч.у.м. мультимножеств). Выполняются следующие утверждения:

1) пустое мультимножество $\varnothing_m$ (его характеристической функцией является константная функция, всюду равная нулю) − наименьший элемент в $\langle \mathrm{M}, \preceq \rangle$;
2) $\inf \mu=\alpha$, для произвольного непустого множества[1] мультимножеств $\mu \subseteq \mathrm{M}$; здесь характеристическая функция мультимножества α задается выражением $\chi_\alpha(d)=\min\limits_{\beta\in\mu}\chi_\beta(d)$;
3) для произвольного множества мультимножеств μ: супремум μ существует $\Leftrightarrow$ μ ограничено сверху;
4) $\sup \mu=\alpha$, где μ − произвольное множество мультимножеств, имеющее точную верхнюю грань, а характеристическая функция мультимножества α задается выражением $\chi_\alpha(d)=\max\limits_{\beta\in\mu}\chi_\beta(d)$.□

Доказательство. Рассмотрим отдельно каждое из сформулированных выше утверждений.

1) Наименьшим элементом ч.у.м. $\langle N,\le \rangle$ является число 0. Соответственно, наименьшим элементом ч.у.м. характеристических функций $\langle \{\chi_\alpha \mid \alpha \in M\}, \triangleleft \rangle$ будет функция, всюду равная

[1] Отметим, что инфимум пустого множества мультимножеств не существует, так как в рассматриваемом частично упорядоченном множестве мультимножеств не существует наибольшего элемента.

нулю. Исходя из того, что ч.у.м. $\langle\{\chi_\alpha \mid \alpha\in M\},\lhd\rangle$ изоморфно ч.у.м. $\langle \mathrm{M},\preceq\rangle$, получим, что наименьшим элементом второго будет пустое мультимножество $\varnothing_m$.

2) Доказательство второго утверждения вытекает из известной формулы нахождения инфимума множества функций (см., например, [Буй, 2002] или [Бурбаки, 1965]) и того факта, что ч.у.м. $\langle N,\le\rangle$ является вполне упорядоченным.
3) Супремум подмножества L ч.у.м. $\langle N,\le\rangle$ существует тогда и только тогда, когда множество L – конечно (ограничено). Перенесем этот результат на ч.у.м. характеристических функций, а, следовательно, и на ч.у.м. мультимножеств (так как они изоморфны). Тогда получим, что супремум произвольного подмножества μ ч.у.м. $\langle \mathrm{M},\preceq\rangle$ существует, тогда и только тогда, когда это множество ограничено сверху.
4) Доказательство этого утверждения также вытекает из известной формулы нахождения супремума множества функций (см., например, [Буй, 2002] или [Бурбаки, 1965]) при условии, что супремум существует.□

Таким образом, согласно предложению 1, ч.у.м. $\langle \mathrm{M},\preceq\rangle$ имеет наименьший элемент (пустое мультимножество – $\varnothing_m$) и любое его подмножество, ограниченное сверху, имеет точную верхнюю грань. Значит, следуя терминологии работ [Davey, 1990], [Биркгоф, 1984], ч.у.м. $\langle \mathrm{M},\preceq\rangle$ является одновременно условно полным множеством и полной полурешеткой (complete semilattice). Таким образом, установлена теорема 3.

Теорема 3. Ч.у.м. $\langle \mathrm{M},\preceq\rangle$ является условно полным множеством и полной полурешеткой, при этом точные грани находятся согласно формул предложения 1.□

Доказательство вытекает из определений условно полного множества и полной полурешетки, а также предложения 1. □

Пополним частично упорядоченное множество $\langle \mathrm{M},\preceq\rangle$ наибольшим элементом T; полученное ч.у.м. обозначим через $\langle \mathrm{M}\cup\{\mathrm{T}\},\preceq\rangle$.

Следствие 1. Ч.у.м. $\langle \mathrm{M}\cup\{\mathrm{T}\},\preceq\rangle$ является полной решеткой с наименьшим элементом $\varnothing_m$ и наибольшим элементом T.□

Доказательство проводится очевидным образом; кроме того, можно использовать общий результат теории решеток [Биркгоф, 1984].□

Ч.у.м. $\langle \mathrm{M},\preceq\rangle$ можно вложить и в другую полную решетку. Для этого расширим понятие мультимножества. С этой целью пополним множество натуральных чисел без нуля N^+ наибольшим элементом ∞ и положим $N^+_\infty = N^+\cup\{\infty\}$. Под мультимножеством будем понимать функцию вида $\alpha: U_\alpha \to N^+_\infty$, семейство всех таких мультимножеств обозначим через M_∞. Порядок на множестве N^+_∞ обозначим через $\le_\infty$, тогда порядок на мультимножествах $\preceq$ расширяется так: $\alpha\preceq_\infty\beta \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall d\ \left(\chi_\alpha(d)\le_\infty \chi_\beta(d)\right)$, $\alpha,\beta\in\mathrm{M}_\infty$.

Теорема 4. Ч.у.м. $\langle \mathrm{M}_\infty,\preceq_\infty\rangle$ является полной решеткой с наименьшим элементом $\varnothing_m$ и наибольшим элементом T_∞, где $\mathrm{T}_\infty: D\to\{\infty\}$, $\mathrm{T}_\infty(d)=\infty$ для всех $d\in D$. Точные нижние грани находятся по формулам предложения 1, для точных верхних граней выполняется формула $\sup\mu=\alpha$, где характеристическая функция мультимножества α такая – $\chi_\alpha(d)=\sup\limits_{\le_\infty,\beta\in\mu}\chi_\beta(d)$.□

Доказательство. Очевидно, что $\langle N^+_\infty,\le_\infty\rangle$ является полной решеткой. Остается применить тот хорошо известный факт, что прямое произведение полных решеток будет полной решеткой, и использовать уже неоднократно упоминавшеюся формулу для нахождения точных граней подмножеств прямого произведения. □

Выводы

В работе приведены базовые определения, касающиеся теории мультимножеств: мультимножества, его характеристической функции, отношения включения, операций объединения и пересечения. Построена решетка мультимножеств. Выяснено устройство ч.у.м. мультимножеств по отношения включения мультимножеств. Осуществлено вложение ч.у.м. мультимножеств в две полные решетки, при этом одна их этих полных решеток строится путем обобщения понятия мультимножества (допускается бесконечная кратность элементов основы). Отметим, что такие обобщенные мультимножества необходимо рассматривать при задании денотационной семантики рекурсивных запросов в SQL-подобных языках [Буй, Поляков, 2010] (таким мультимножествам соответствуют таблицы с бесконечным числом строк); эта проблематика, однако, требует отдельного рассмотрения.

Список литературы

[Blizard, 1989] W. Blizard. The Development of Multiset Theory // Notre Dame Journal of Formal Logic. – 1989. – Vol. 30, No. 1. – P. 36-66.

[Davey, 1990] B.A. Davey, H.A. Priestly. Introduction to Lattice and Order. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. – 248 p.

[Lamperti, 2001] G. Lamperti, M. Melchiori, M. Zanella. On Multisets in Database Systems // Multiset Processing: Mathematical, Computer Science, and Molecular Computing Points of View, number 2235 in Lecture Notes in Computing Since. – Berlin: Springer-Verlag, 2001. – P. 147-215.

[Singh, 2007] D. Singh, A.M. Ibrahim, T. Yohanna, J.N. Singh. An Overview of the Applications of Multisets // Novi Sad Journal of Mathematics. – 2007. – Vol. 37, No. 2. – P. 73-92.

[Syropoulos, 2001] A. Syropoulos. Mathematics of Multisets // Multiset Processing: Mathematical, Computer Science, and Molecular Computing Points of View, number 2235 in Lecture Notes in Computing Since. – Berlin: Springer-Verlag, 2001. – P. 347-358.

[Биркгоф, 1984] Г. Биркгоф. Теория решеток. – Москва: Наука, 1984. – 564 с.

[Буй, 2002] Д.Б. Буй. Теорія програмних алгебр композиційного типу та її застосування: дисертація доктора фізико-математичних наук: 01.05.03 – математичне та програмне забезпечення обчислювальних машин та систем. – Київ, 2002. – 365 с.

[Буй, Богатирьова 2010] Д.Б. Буй, Ю.О. Богатирьова. Сучасний стан теорії мультимножин // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки. – 2010. Вип. 1. – С. 51-58.

[Буй, Поляков, 2010] Д.Б. Буй, С.А. Поляков. Композиційна семантика рекурсивних запитів в SQL-подібних мовах // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки. – 2010. Вип. 1. – С. 45−50.

[Бурбаки, 1965] Н. Бурбаки. Теория множеств. – Москва: Мир, 1965. – 455 с.

[Мальцев, 1970] А.И. Мальцев. Алгебраические системы. – Москва: Наука, 1970. – 392 с.

[Петровский, 2002] А.Б. Петровский. Основные понятия теории мультимножеств. – Москва: Едиториал УРСС, 2002. – 80 с.

[Редько, 2001] В.Н. Редько, Ю.Й. Брона, Д.Б. Буй, С.А. Поляков. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. – Київ: Видавничий дім “Академперіодика”, 2001. – 198 с.

[Скорняков, 1986] Л.А. Скорняков. Элементы алгебры. – Москва: Наука, 1986. – 240 с.

Информация об авторах

Буй Дмитрий Борисович *– заведующий сектором проблем программирования, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики: 01601, ул. Владимирская, 64, Киев, Украина; e-mail: buy@unicyb.kiev.ua*

Богатырёва Юлия Александровна *– аспирантка, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики: 01601, ул. Владимирская, 64, Киев, Украина; e-mail: j_bogatyreva@ukr.net*