ЛИНЕЙНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ ФИНАНСОВЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Зайченко Ю.П., Мурга Н.А.

Аннотация: *предлагается метод линейного оценивания параметров моделей финансовых временных рядов противоположный по своей структуре МНК. Проводится сравнительный анализ МНК и предлагаемого метода.*

Ключевые слова: *линейное оценивание, оптимизация, финансовые временные ряды.*

Ключевые слова классификации ACM: *G. Mathematics of Computing - G.1 NUMERICAL ANALYSIS - G.1.2 Approximation - Linear approximation.*

Вступление

В работе рассматривается метод оценивания параметров линейной модели финансовых временных рядов противоположный по критерию оптимизации МНК. Если МНК восстанавливает параметры модели, минимизируя сумму квадратов отклонений реальных значений от выдаваемых моделью, то рассматриваемый метод минимизирует максимальное отклонение. Актуальность данной тематики обусловлена тем, что трейдер принимает решение не «в среднем», а в конкретные моменты времени и для него важно именно то решение и тот прогноз, которые он принимает в данный конкретный момент времени, а не прогноз «в среднем». Опора на среднеквадратическую оценку параметров модели не позволяет оценить возможность ситуации маржин-колл, что является неприемлемым при реальной торговле. Кроме вышесказанного, предлагаемый метод не имеет ограничений МНК: некоррелируемость входов модели, входов модели и шумов и нулевое математическое ожидание шумов. Всё это обусловило необходимость разработки предлагаемого метода.

Описание метода

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ - наблюдаемые значения переменных; y - наблюдаемое значение, которое, предполагается, линейно зависит от $x_1, x_2, ..., x_n$. Пусть $x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ni}$ и y_i, где $i = 1...L$ - конкретные значения этих переменных. Линейная зависимость описывается формулой (1):

$$y = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \quad (1)$$

Если ввести обозначение $d_i = y_i - \sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij}$, то задача восстановления функциональной зависимости сводится к нахождению таких $a_j, j = 1...n$, чтобы $d_i = 0, i = 1...L$. Очевидно, что при применении к реальным задачам, в частности – к задаче анализа данных финансовых рынков, данное равенство не будет иметь место, так как имеются шумы, искажающие данные, выборка может быть сформирована неверно (неправильно выбрано n) и т.д.

Классический МНК предполагает решение задачи безусловной оптимизации (2):

$$\sum_{i=1}^{L} d_i^2 \to \min \quad (2)$$

Однако решение этой задачи оптимизации имеет один существенный (по крайней мере, для торговли на финансовых рынках недостаток): в результате решения задачи все d_i, кроме маленькой группы могут оказаться малыми, а в этой группе – большими, то есть метод пожертвовал точностью для малой группы отклонений в пользу суммарной ошибки на всей выборке. На практике, например биржевой торговли, это говорит о том, что есть некоторая вероятность открыть убыточную позицию. С целью устранения этого недостатка предлагается рассматриваемый ниже метод.

Прежде всего, необходимо ввести понятие нечёткого нуля.

Пусть нечётким нулём будет называться нечёткое множество O, на котором определена функция принадлежности данному множеству (3):

$$\mu_O(z) = \exp\left\{-\frac{z^2}{\sigma^2}\right\} \tag{3}$$

График данной функции изображён на Рисунке 1.

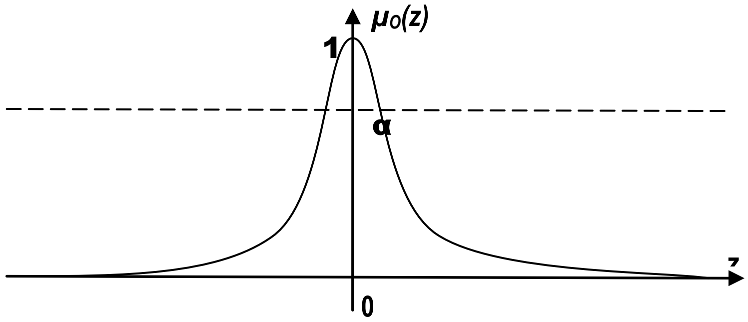

Рисунок 1. График функции принадлежности множеству «нечёткий нуль»

Суть предлагаемого метода состоит в нахождении таких $d_i, i = 1...L$, чтобы $\mu_O(d_i) \to \max \ \forall i = 1...L$. Если зафиксировать некоторый уровень значимости α, на котором будет происходить оптимизация, то задача оптимизации может быть сведена к следующей:

$$\begin{aligned} & \min \sigma, \\ & d_i \le \sigma\sqrt{\ln\frac{1}{\alpha}}, i = 1...L, \\ & d_i \ge -\sigma\sqrt{\ln\frac{1}{\alpha}}, i = 1...L, \\ & \sigma \ge 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Если, согласно введённым ранее обозначениям, расписать d_i, то задача (4) преобразуется к виду (5):

$$\begin{aligned} & \min \sigma, \\ & y_i - \sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} \le \sigma\sqrt{\ln\frac{1}{\alpha}}, i = 1...L, \\ & y_i - \sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} \ge -\sigma\sqrt{\ln\frac{1}{\alpha}}, i = 1...L, \\ & \sigma \ge 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Если каждый a_j переписать в виде $a_j = a_{j1} - a_{j2}$, $a_{j1}, a_{j2} \ge 0$ и y_i перенести в правую часть неравенств, а $\pm\sigma\sqrt{\ln\frac{1}{\alpha}}$ в левую, то можно получить следующую задачу линейного программирования:

$$
\begin{aligned}
&\min \sigma, \\
&y_i \le \sigma\sqrt{\ln\frac{1}{\alpha}} + \sum_{j=1}^{n} a_{j1}x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} a_{j2}x_{ij}, \quad i=1...L, \\
&-y_i \le \sigma\sqrt{\ln\frac{1}{\alpha}} - \sum_{j=1}^{n} a_{j1}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} a_{j2}x_{ij}, \quad i=1...L, \\
&\sigma \ge 0, a_{j1}, a_{j2} \ge 0 \quad j=1...n.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Так как на практике L достаточно велико, то имеет смысл (с целью минимизации расходов вычислительных ресурсов) перейти от (6) к двойственной задаче (7) и решать именно её. Пусть $z_k, k=1...2L$ - двойственные переменные, тогда двойственная задача к задаче (6) имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&\max \sum\nolimits_{i=1}^{L}\left(z_i y_i - z_{L+i} y_i\right), \\
&\sum\nolimits_{i=1}^{2L} z_i = 1 \Big/ \sqrt{\ln\frac{1}{\alpha}}, \\
&\sum\nolimits_{i=1}^{L}\left(x_{ij} z_i - x_{ij} z_{i+L}\right) \le 0, j=1...n, \\
&\sum\nolimits_{i=1}^{L}\left(-x_{ij} z_i + x_{ij} z_{i+L}\right) \le 0, j=1...n, \\
&z_i \ge 0, i=1...2L.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Наиболее экономично решать эту задачу методом обратной матрицы, и получив решение, восстановить значения $\sigma \ge 0, a_{j1}, a_{j2} \ge 0 \quad j=1...n$ по оценкам метода. Данный метод не допускает возможности пренебречь качеством отдельных значений выборки в пользу минимизации общего критерия и, также, позволяет получить сразу диапазон точности оценки коэффициентов.

Классификация методов линейного оценивания

Сразу следует оговориться, что о задаче фильтрации в данной части речи идти не будет. Если читатель захочет ознакомиться с методами фильтрации, то его можно отправить к замечательным работам [1;2;3].

Первый признак, по которому будет идти классификация,– это задача оптимизации, которая будет решаться. Так в МНК оценивании, как было сказано раньше, решается задача безусловной минимизации суммы квадратов отклонений, которые даёт модель от желаемых значений. Метод же, предложенный в предыдущей части, производит минимизацию максимального отклонения. Однако это же выполняет ещё один метод, описанный в [4].

Особенность данного метода состоит в том, что a_j в (1) – это нечёткие числа, которые выбраны в работе [4] треугольного, гауссовского и колоколообразного вида. Для случая гауссовского вида каждое a_j задано центром функции принадлежности и «рассевом» - (c_j, σ_j), и, таким образом, в формуле (3) параметр σ определяется соотношением (8):

$$
\sigma = \sum\nolimits_{j=1}^{n} \sigma_j x_j \tag{8}
$$

Таким образом, задача (6) в данном случае может быть переписана в виде (9):

$$
\begin{aligned}
&\min \sum\nolimits_{i=1}^{L} \sigma_i ,\\
&y_i \le \sigma_i \sqrt{\ln \frac{1}{\alpha}} + \sum_{j=1}^{n} a_{j1} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} a_{j2} x_{ij} ,\ \ i = 1...L,\\
&- y_i \le \sigma_i \sqrt{\ln \frac{1}{\alpha}} - \sum_{j=1}^{n} a_{j1} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} a_{j2} x_{ij} ,\ \ i = 1...L,\\
&\sigma_i \ge 0, a_{j1}, a_{j2} \ge 0 \quad j = 1...n,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где $\sigma_i = \sum\nolimits_{j=1}^{n} \sigma_j x_{ij}$.

Таким образом, данные два метода ((6) и (9)) могут быть классифицированы по виду модели оценивания: чёткой либо нечёткой, и, соответственно, параметр σ в формуле (3) будет либо константой – метод (6) – либо линейной комбинацией входов модели – метод (9).

Интересным представляется вопрос о связи метода (6) и метода (9).

Если выбрать число σ согласно с формулой (10):

$$
\sigma = \max_i \sigma_i \tag{10}
$$

то очевидным является тот факт, что

$$
y_i \le \sigma_i \sqrt{\ln \frac{1}{\alpha}} + \sum_{j=1}^{n} a_{j1} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} a_{j2} x_{ij} \ \ \le \sigma \sqrt{\ln \frac{1}{\alpha}} + \sum_{j=1}^{n} a_{j1} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} a_{j2} x_{ij} \tag{11}
$$

и

$$
- y_i \le \sigma_i \sqrt{\ln \frac{1}{\alpha}} - \sum_{j=1}^{n} a_{j1} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} a_{j2} x_{ij} \le \sigma \sqrt{\ln \frac{1}{\alpha}} - \sum_{j=1}^{n} a_{j1} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} a_{j2} x_{ij} \tag{12}
$$

И задача линейного оценивания коэффициентов модели может быть переписана в виде (6).

Таким образом, исходя из приведённых выше выкладок, можно заключить, что решение задачи (9) даёт не худшие оценки коэффициентов модели, чем задачи (6). Кроме того, следует заметить, что аналогичный задаче (6) коэффициент отклонения результата для задачи (9) может быть оценён формулой (10).

В применении всех описанных выше методов к анализу финансовых рынков есть свои преимущества и недостатки.

МНК следует применять, если идёт торговля на выигрыш «в среднем». Однако, следует отметить, что при такой торговле весьма вероятна ситуация маржин-колл, в следствие указанного ранее очень сильного отклонения прогноза модели от реального значения котировки. Кроме того, при МНК оценке необходимо быть уверенным в том, что математическое ожидание шумов близко к нулю, нет корреляции между шумами и входами модели, между входами модели (а она есть, так как рассматривается временной ряд)… Возникают проблемы с обращением матриц.

Предложенный в работе метод избавлен от этих недостатков: инвестор получает предел отклонения прогноза от реальных значений (то есть реально оценивает вероятность ситуации маржин-колл), всевозможные нелинейности относительно шумов уже заложены в модель, оценивание происходит путём решения задачи линейного программирования, которая для данной задачи обязательно имеет хотя бы единственное решение.

Метод (9) решает аналогичную методу (6) задачу, но в среднем даёт более утончённую оценку параметров модели. Однако, исходя из вида критерия оптимизации, данный метод, как и МНК ищет модель «в среднем». Но данный метод, как и метод (6) избавлен от тех же недостатков МНК, как и (6).

Практическое исследование метода

Для проверки теоретических выкладок, предложенных в данной работе, проводились исследования линейного оценивания функциональных зависимостей временных рядов котировок валютных пар EUR/USD, EUR/GBP, USD/JPY, USD/CHF, взятых из [5], котировок мировых финансовых индексов CAC40, DAX, DJIA, HANG SENG, NASDAQ, ММВБ, RTS2 и финансовых инструментов COMEX GOLD, ММВБ GSZP, ICE.BRN, которые были взяты из [6]. Для проведения опытов выборки данных финансовых инструментов разбивались на обучающие и проверочные в соотношениях соответственно 50%:50%. В сравнительном анализе участвовали: МНК, с градиентным методом восстановления значений параметров и метод (6).

Если x_i - значение котировки в момент времени i, то преобразованное значение котировки определяется формулой (13):

$$y_i = \frac{x_i - \min_i x_i}{\max_i x_i - \min_i x_i} \tag{13}$$

область определения преобразованной котировки – интервал $[0;1]$.

Показатели эффективности работы методов на собственно котировках x_i - это критерии $MAPE$ (14) и $\max APE$ (15):

$$MAPE = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\frac{\left|x_i - \overline{x_i}\right|}{x_i} \tag{14}$$

$$\max APE = \max_i \frac{\left|x_i - \overline{x_i}\right|}{x_i} \tag{15}$$

где x_i - реальное значение котировки, а $\overline{x_i}$ - значение котировки, спрогнозированное моделью.

Показатели эффективности работы методов на модифицированных котировках y_i - это критерии $RMSE$ (16) и $\max Error$ (17):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\left(y_i - \overline{y_i}\right)^2} \tag{16}$$

$$\max Error = \max_i \left|y_i - \overline{y_i}\right| \tag{17}$$

При проведении экспериментов для всех котировок было установлено, что на качество оценивания выбор уровня значимости α не влияет как при анализе временного ряда x_i, так и при анализе y_i. Однако для более стабильной работы метода (6) лучше всего выбирать α в диапазоне $[0,5;0,7]$. Этот результат обоснован теоретически, исходя из задачи оптимизации (6) – происходит оптимизация с целью получения наименьшего σ, не зависимо от желаний проектировщика. Выбор α, как можно увидеть из первого ограничения задачи (7), влияет на величину значений оптимизируемых переменных. На Рисунке 2. Приведён график функции $1\Big/\sqrt{\ln\frac{1}{\alpha}}$, при α изменяющемся в пределах $[0,001;0,999]$, из которого видно, что участок $[0,5;0,7]$ даёт приблизительно одинаковое значение функции - значение в пределах $[1;2]$ - что и обуславливает вычислительную эффективность участка $[0,5;0,7]$.

Рисунок 2. График функции $f(\alpha)= {1}\Big/{\sqrt{\ln {1}/{\alpha}}}$

Предварительные исследования показали, что значения котировок приведённых выше финансовых инструментов и значения мировых финансовых индексов определяются более всего предыдущим и пред-предыдущим значением соответствующего временного ряда.

Как и следовало ожидать, для зависимости котировок и индексов от двух и трёх предыдущих значений по критериям (14) и (16) эффективнее оказался МНК, а по критериям (15) и (17) – метод (6). Для прочих зависимостей временных рядов МНК и (6) отличались слабо и определялись результаты экспериментов удачностью рандомизации. Метод (9) в экспериментах участия не принимал, так как он коссвенно был сравнён при сравнительных анализах МГУА и НМГУА в более ранних работах [7, 8].

В силу ограничености объёма работы привести результаты всех экспериментальных исследований не представляется возможным. Однако для наглядности результаты сравнительного анализа МНК И (6) на значениях индекса CAC40 приведены в Таблице 1.

Таблица 1. Результаты сравнительного анализа МНК и метода (6) на значениях индекса CAC40

Количество периодов временного ряда, от которых зависело значение инструмента	МНК				Метод (6)			
	MAPE обуч. выборка	MAPE пров. выборка	maxAPE обуч. выборка	maxAPE пров. выборка	MAPE обуч. выборка	MAPE пров. выборка	maxAPE обуч. выборка	maxAPE пров. выборка
2	0,009683	0,011236	0,052	0,091	0,014826	0,015242	0,055	0,0695
3	0,009891	0,011139	0,042	0,086	0,020213	0,018516	0,057	0,081
4	0,010397	0,011028	0,047	0,095	0,016749	0,018113	0,052	0,074
5	0,009546	0,011431	0,044	0,083	0,012061	0,013114	0,038	0,077
6	0,010226	0,011221	0,044	0,102	0,015644	0,016394	0,049	0,062
7	0,009677	0,011295	0,045	0,091	0,017751	0,018038	0,04	0,0696
8	0,010729	0,010224	0,043	0,093	0,019501	0,021409	0,047	0,062
9	0,010203	0,010533	0,046	0,093	0,017546	0,022202	0,044	0,073

Заключение

В работе был предложен метод линейного оценивания противоположный по своей структуре МНК. Исходя из теоретических выкладок и практических исследований, было установлено, что в среднем по выборке данных эффективнее является МНК, однако относительно каждого отдельного значения временного ряда в значимых для моделирования случаях эффективнее был метод, предложенный в работе. Кроме того, на метод не налагаются такие ограничения как на МНК: некоррелируемость значений входов модели, некоррелируемость входов модели и шумов, нулевое математическое ожидание шумов, что делает данный метод полезным средством анализа финансовых временных рядов.

Благодарности

Статья частично финансирована из проекта ITHEA XXI Института Информационных теорий и Приложений FOI ITHEA и консорциума FOI Bulgaria (www.ithea.org, www.foibg.com).

Литература

Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана: пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 168 с.

Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси: пер. с нем. – М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 200 с.

Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. – М.: Университетская книга, Логос, 2006. – 640 с.

Зайченко Ю.П. Нечёткие модели и методы в интеллектуальных системах. – К.: «Издательский Дом «Слово», 2008. – 344 с.

Дневные котировки валютных пар EUR/GBP, EUR/USD, USD/JPY, USD/CHF за период с 25.03.2009 по 24.03.2010. http://www.finam.ru/analysis/export/default.asp

Дневные значения мировых финансовых индексов CAC40, DAX, DJIA, HANG SENG, NASDAQ, RTS2, индекс ММВБ и дневные котировки финансовых инструментов COMEX GOLD, ICE.BRN, ММВБ «Газпром нефть» - GAZP за период с 1.02.2010 по 1.02.2011. http://www.finam.ru/analysis/export/default.asp

Зайченко Ю.П. Основи проектування інтелектуальних систем. – К.: Видавничий Дім «Слово», 2004. – 352 с.

Зайченко Ю.П., Заєць І.О. Синтез і адаптація нечітких прогнозуючих моделей на основі методу самоорганізації // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2001. - №3. – С. 34-41.

Информация про авторов

Зайченко Юрий Петрович *– доктор технических наук, профессор, НТУУ «КПИ» УНК «ИПСА», адрес электронной почты: baskervil@voliacable.com*

Мурга Николай Алексеевич *– аспирант НТУУ «КПИ», адрес электронной почты: murga.nicholas@gmail.com*