

ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ В НЕЧЕТКИХ УСЛОВИЯХ

Малихех Есфандиярфард , Юрий Зайченко, Ови Нафас Агаи Аг Гамиш

Abstract: *The problem of multicriteria fuzzy portfolio optimization is considered and investigated. This problem include two main criteria – portfolio profitability and risk . A mathematical model of this problem was constructed , explored and the sufficient conditions for its convexity were obtained. . The results of experimental investigations of solutions are presented and discussed*

Keywords: *fuzzy portfolio optimization, multicriteria optimization problem, portfolio profitability , portfolio risk*

ACM Classification Keywords: *G.1.0 Mathematics of Computing– General – Error analysis; G.1.6 Mathematics of Computing – NUMERICAL ANALYSIS – Optimization - Gradient methods, Least squares methods; I.2.3 Computing Methodologies - ARTIFICIAL INTELLIGENCE - Uncertainty, “fuzzy”, and probabilistic reasoning; I.2.6 Computing Methodologies - ARTIFICIAL INTELLIGENCE – Learning - Connectionism and neural nets;*

Introduction

В последние годы в Украине сформировалась и довольно динамично развивается новая составляющая экономики - финансовый рынок, важной частью которого является рынок ценных бумаг. С развитием этого сектора рынка возрастает актуальность финансовых вложений в ценные бумаги. Данная проблема обусловлена ее сложностью, разнообразием субъектов и объектов фондового рынка. Особенностью данной проблемы является существенная неопределенность исходной информации относительно доходности ценных бумаг (ЦБ) в будущий момент времени. Новый подход к задаче оптимизации портфеля, который позволяет учесть неопределенность исходных данных и является альтернативой классической модели Марковица, базируется на применении аппарата нечетких множеств. Проблема нечеткой портфельной оптимизации была рассмотрена и исследована в работах [[Зайченко, 2007; Зайченко, 2008]. В этих работах рассматривалась следующая постановка задачи: необходимо оптимизировать ожидаемую доходность портфеля при ограничениях на возможный риск. Алгоритм для решения этой задачи был предложен и исследован в [Зайченко, 2008] . В работе [Зайченко, Малихех, 2007] было предложено использовать прогнозирование доходностей акций, что позволило повысить эффективность получаемых решений. В работе [Зайченко, 2010] была рассмотрена двойственная задача нечеткой портфельной оптимизации -минимизация риска при ограничении на ожидаемую доходность оптимального портфеля и получены достаточные условия ее выпуклости

Целью настоящей работы является рассмотрение многокритериальной задачи нечеткой портфельной оптимизации, построение математической модели этой задачи и ее экспериментальные исследования.

Многокритериальная задача нечеткой портфельной оптимизации

Исходная задача оптимизации нечеткого портфеля, которую естественно называть прямой, имеет следующий вид: [Зайченко, 2007]

Найти ожидаемую доходность нечеткого портфеля

$$\tilde{r} = \sum_{i=1}^N \tilde{r}_i x_i \quad (1)$$

при ограничениях на риск

$$\beta(x) \leq \beta_{\text{задан}} \quad 0 < \beta < 1 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad (3)$$

$$x_i \geq 0 \quad (4)$$

Рассмотрим случай, когда критериальное значение доходности r^* удовлетворяет условиям (5)

$$\sum_{i=1}^N x_i r_{i1} \leq r^* \leq \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i = \tilde{r} \quad (5)$$

Тогда величина риска равна

$$\beta(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i r_{i2} - \sum_{i=1}^N x_i r_{i1}} \left[\left(r^* - \sum_{i=1}^N x_i r_{i1} \right) + \left(\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^* \right) \right] \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^*}{\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - \sum_{i=1}^N x_i r_{i1}} \right) \quad (6)$$

Рассмотрим двойственную задачу оптимизации нечеткого портфеля относительно задачи (1)-(4) [4]:
минимизировать

$$\beta(x) \quad (7)$$

при условиях

$$\tilde{r} = \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i \geq r_{\text{зад}} = r^* \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1, x_i \geq 0 \quad (9)$$

Рассмотрим теперь многокритериальную задачу, в которой будем минимизировать риск и максимизировать доходность портфеля.

Для того, чтобы определить структуру соответствующего портфеля нужно решить следующую задачу:

$$\{x_{\text{opt}}\} = \{x\} \mid r \rightarrow \max, \beta \rightarrow \min \quad (10)$$

где r и β определяются из формул (8) - (9),

а x удовлетворяет условию $\sum_{i=1}^N x_i = 1, x_i \geq 0$.

Доходность портфеля:

$$r = (r_{\min} = \sum_{i=1}^N x_i r_{1i}; \tilde{r} = \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i; r_{\max} = \sum_{i=1}^N x_i r_{2i}),$$

где $(r_{1i}, \tilde{r}_i, r_{2i})$ - доходность i -ой ценной бумаги- нечеткое число с известной функцией принадлежности.

Для решения данной используем способ приведения ее к однокритериальной. Для этого пронормируем значение доходности следующим образом:

$$\tilde{r}_n = \frac{r_{\max} - \tilde{r}}{r_{\max} - r_{\min}}, \quad \tilde{r}_n \in [0; 1]$$

Таким образом, получим оптимизационную задачу в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \{w_1 \tilde{r}_n + w_2 \beta(x)\} \rightarrow \min \\ & w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0, \quad w_1 \neq w_2, \quad w_1 + w_2 = 1 \\ & \sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad x_i \geq 0 \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned} \tag{11}$$

Рассматриваем. $0 < \beta < 1$. Это возможно в двух случаях:

когда $\sum_{i=1}^N x_i r_{i1} \leq r^* < \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i$, либо когда $\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i \leq r^* < \sum_{i=1}^N x_i r_{i2}$.

а) Пусть $\sum_{i=1}^N x_i r_{i1} \leq r^* < \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i$. Используя (8 - (9) задача сводится к следующей:

при условиях $\{w_1 \tilde{r}_n + w_2 \beta(x)\} \rightarrow \min$
 $w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0, \quad w_1 \neq w_2, \quad w_1 + w_2 = 1$

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i r_{i2} - \sum_{i=1}^N x_i r_{i1}} \left(\left(r^* - \sum_{i=1}^N x_i r_{i1} \right) + \left(\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^* \right) \cdot \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - r^*}{\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i - \sum_{i=1}^N x_i r_{i1}} \right) \right) = \beta(x),$$

$$\sum_{i=1}^N x_i r_{i1} \leq r^*, \quad \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i > r^*,$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad x_i \geq 0 \quad i = \overline{1, N}.$$

б) Пусть $\sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i \leq r^* < \sum_{i=1}^N x_i r_{i2}$, тогда задача сводится к следующей:

при условиях $\{w_1 \tilde{r}_n + w_2 \beta(x)\} \rightarrow \min$
 $w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0, \quad w_1 \neq w_2, \quad w_1 + w_2 = 1$

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i r_{i2} - \sum_{i=1}^N x_i r_{i1}} \left(\left(r^* - \sum_{i=1}^N x_i r_{i1} \right) - \left(r^* - \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i \right) \cdot \ln \left(\frac{r^* - \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i}{\sum_{i=1}^N x_i r_{i2} - \sum_{i=1}^N x_i r_{i1}} \right) \right) = \beta,$$

$$\sum_{i=1}^N x_i r_{i2} > r^*, \quad \sum_{i=1}^N x_i \tilde{r}_i \leq r^*,$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad x_i \geq 0 \quad i = \overline{1, N}.$$

Экспериментальные исследования

Для проведения анализа исследуемого метода оптимизации инвестиционного портфеля был проанализирован фондовый рынок в периоды экономической стабильности и кризиса. Данные использованы из архива Московской фондовой биржи (МФБ) по торговле ценными бумагами компаний ОАО «Полет » (POLT), ОАО «Новые горизонты » (NGOR), ОАО «КОМСТАР-ОТС» (CMST), ОАО «Ситроникс» (SITR)].

Рассмотрим портфель из 4 активов. Используем данные по доходности акций за период с 02.04.07 по 03.08.07. Исходя из состояния фондового рынка делаем выводы о прибыльности акций:

- доходность акций POLT лежит в расчетном коридоре [0; 4,4], наиболее ожидаемое значение доходности 1,2%;
- доходность акций NGOR лежит в расчетном коридоре [-4,6; 1,13], наиболее ожидаемое значение доходности 0%;
- доходность акций CMST лежит в расчетном коридоре [-1,04; 1,02], наиболее ожидаемое значение доходности 0%;
- доходность акций SITR лежит в расчетном коридоре [-0,74; 1,96], наиболее ожидаемое значение доходности 0%;

Задав уровень критической прибыльности, и изменяя значения весовых коэффициентов, были получены следующие результаты, представленные в таблицах 1-4.

Таблица 1. Оптимальный портфель с критическим уровнем доходности 0,5%

POLT	NGOR	CMST	SITR	Ожидаемое значение доходности	Нижняя граница	Верхняя граница	Риск	w_2
0,91992	0,02501	0,02739	0,02768	1,1039	-0,16403	4,15809	0,04902	0,1
0,91948	0,02535	0,02746	0,02771	1,10338	-0,16565	4,15669	0,0492	0,2
0,91905	0,02567	0,02753	0,02775	1,10286	-0,16727	4,15529	0,04938	0,3
0,9186	0,02601	0,0276	0,02779	1,10233	-0,1689	4,15389	0,04956	0,4

Таблица 2. Оптимальный портфель с критическим уровнем доходности 1,5%

POLT	NGOR	CMST	SITR	Ожидаемое значение доходности	Нижняя граница	Верхняя граница	Риск	w_2
0,92352	0,02365	0,02599	0,02684	1,10822	-0,15569	4,16931	0,59292	0,1
0,92335	0,02391	0,02599	0,02675	1,10801	-0,15683	4,16868	0,59361	0,2
0,92317	0,02418	0,026	0,02665	1,10781	-0,15797	4,16804	0,5943	0,3
0,923	0,02444	0,026	0,02656	1,10761	-0,15911	4,16741	0,59499	0,4

Проведем теперь эксперименты для двухкомпонентного портфеля, задав критериальное значение прибыльности и изменяя значение весового коэффициента для второго критерия w_2 . Соответствующие результаты приведены в таблицах 3,4.

Таблица 3. Оптимальный портфель с критическим уровнем доходности 0,5%

POLT	NGOR	Ожидаемое значение доходности	Нижняя граница	Верхняя граница	Риск	W_2
0,94688	0,05312	1,13626	-0,24435	4,22630	0,05524	0,1
0,94667	0,05333	1,13601	-0,24531	4,22562	0,05534	0,2
0,94646	0,05354	1,13576	-0,24627	4,22494	0,05545	0,3
0,94625	0,05375	1,13551	-0,24723	4,22425	0,05555	0,4
0,94605	0,05395	1,13525	-0,24819	4,22357	0,05566	0,5

Таблица 4. Оптимальный портфель с критическим уровнем доходности 2%

POLT	NGOR	Ожидаемое значение доходности	Нижняя граница	Верхняя граница	Риск	W_2
0,94791	0,05209	1,13749	-0,23963	4,22966	0,81203	0,1
0,94781	0,05219	1,13737	-0,24009	4,22932	0,81234	0,2
0,94669	0,05331	1,13603	-0,24523	4,22567	0,81239	0,3
0,94659	0,05341	1,13591	-0,24569	4,22535	0,81244	0,4
0,94649	0,05351	1,13579	-0,24614	4,22503	0,81274	0,5

Таким образом, был построен оптимальный портфель с минимальным уровнем риска и максимальной доходностью (при $W_2 = 0,1$). Аналогичные результаты наблюдаем при построении портфеля из двух компонент.

При этом с увеличением уровня критической доходности соответственно увеличивается значение риска портфеля, так для портфеля из четырех компонент при $r^* = 0,5$, $\beta = 4,9\%$ а при $r^* = 1,5$ $\beta = 59\%$, для портфеля из двух компонент при $r^* = 0,5$ $\beta = 5,5\%$, а при $r^* = 2$ $\beta = 81\%$. Как и в предыдущих работах, посвященных данной тематике, зависимость доходность-риск приобретает ниспадающий характер, чем больше риск - тем меньше доходность, в отличие от вероятностных методов. Это объясняется тем, что в нечетко-множественном методе под риском понимается ситуация, когда ожидаемая доходность портфеля окажется ниже заданного критического уровня, со снижением ожидаемой доходности увеличивается риск того, что прибыль от портфельных инвестиций окажется ниже критического значения.

Теперь рассмотрим данные в период экономического кризиса с 27.10.08 по 27.02.09. Исходя из состояния фондового рынка делаем выводы о прибыльности акций:

- доходность акций POLT лежит в расчетном коридоре $[-0,18873; 0,4823]$, наиболее ожидаемое значение доходности 0,02%; - доходность акций NGOR лежит в расчетном коридоре $[-0,1686; 0,42053]$, наиболее ожидаемое значение доходности 0,07%; - доходность акций CMST лежит в расчетном коридоре $[-14,5059; 0,00054]$, наиболее ожидаемое значение доходности 0%; - доходность акций SITR лежит в расчетном коридоре $[-20,9484; 0]$, наиболее ожидаемое значение доходности -1%.

Задавая уровень критической прибыльности и регулируя весовые коэффициенты, получим результаты, представленные в таблице 5 и таблице 6 (для четырех компонент).

Таблица 5. Оптимальный портфель с критическим уровнем доходности -0,5%

POLT	NGOR	CMST	SITR	Ожидаемое значение доходности	Нижняя граница	Верхняя граница	Риск	w_2
0,0352	0,92893	0,02162	0,01425	0,05148	-0,77536	0,40763	0,0441	0,1
0,03419	0,92857	0,02195	0,01529	0,05039	-0,80174	0,40699	0,05071	0,2
0,03417	0,92444	0,02359	0,0178	0,04759	-0,87742	0,40525	0,07057	0,3
0,03314	0,92394	0,02397	0,01895	0,04639	-0,90662	0,40454	0,07842	0,4
0,03213	0,92333	0,02439	0,02015	0,04512	-0,93775	0,40379	0,08687	0,5
0,0311	0,92263	0,02485	0,02142	0,04379	-0,97066	0,40301	0,09586	0,6
0,03008	0,92183	0,02535	0,02274	0,04239	-1,00522	0,40218	0,10532	0,7

Таблица 6. Оптимальный портфель с критическим уровнем доходности 0%

POLT	NGOR	CMST	SITR	Ожидаемое значение доходности	Нижняя граница	Верхняя граница	Риск	w_2
0,03397	0,9274	0,02549	0,01314	0,05245	-0,80784	0,4064	0,54281	0,1
0,03288	0,92774	0,02526	0,01412	0,05148	-0,82492	0,40601	0,55029	0,2
0,03277	0,92417	0,02636	0,0167	0,04865	-0,89424	0,40446	0,57534	0,3
0,03167	0,92447	0,02614	0,01772	0,04762	-0,91221	0,40406	0,58252	0,4
0,03057	0,9247	0,02592	0,01881	0,04653	-0,93169	0,40362	0,59009	0,5
0,03045	0,92146	0,02687	0,02122	0,04389	-0,99539	0,4022	0,61053	0,6
0,02935	0,92167	0,02664	0,02234	0,04276	-1,01539	0,40176	0,61771	0,7

Для двух компонент

Таблица 7. Оптимальный портфель с критическим уровнем доходности -0,5%

POLT	NGOR	Ожидаемое значение доходности	Нижняя граница	Верхняя граница	Риск	w_2
0,95129	0,04871	0,01903	-0,88609	0,45883	0,07267	0,1
0,95121	0,04879	0,01902	-0,88728	0,45879	0,07297	0,2
0,95105	0,04895	0,01902	-0,8895	0,45872	0,07354	0,3
0,9496	0,0504	0,01899	-0,91034	0,45802	0,07911	0,4
0,94934	0,05066	0,01899	-0,91405	0,45789	0,08008	0,5
0,94901	0,05099	0,01898	-0,91877	0,45773	0,08133	0,6
0,94749	0,05251	0,01895	-0,94045	0,45701	0,08716	0,7

Таблица 8. Оптимальный портфель с критическим уровнем доходности 0%

POLT	NGOR	Ожидаемое значение доходности	Нижняя граница	Верхняя граница	Риск	w_2
0,95061	0,04939	0,02301	-0,89583	0,45851	0,6052	0,1
0,95078	0,04922	0,02302	-0,89348	0,45859	0,60476	0,2
0,9496	0,0504	0,02249	-0,91028	0,45802	0,60942	0,3
0,94968	0,05032	0,02239	-0,9091	0,45806	0,60931	0,4
0,94852	0,05148	0,02227	-0,92584	0,4575	0,61385	0,5
0,94737	0,05263	0,02215	-0,94225	0,45694	0,6182	0,6
0,94736	0,05264	0,02212	-0,94243	0,45694	0,61846	0,7

Анализируя результаты в табл. 5-8, мы видим, что ожидаемое значение доходности портфеля, заметно снизилось по сравнению с предыдущим случаем-периодом экономической стабильности. Кроме того, как и прежде зависимость «оптимальная доходность-риск» является монотонно убывающей. С ростом критериального значения доходности риск возрастает, что хорошо согласуется с теоретическими положениями.

Заключение

В работе рассмотрена и исследована многокритериальная задача нечеткой портфельной оптимизации.

Предложен метод сведения ее к однокритериальной задаче портфельной оптимизации. Проведены экспериментальные исследования полученной модели на примере рынка российских компаний и выполнен анализ полученных решений.

Определены зависимости ожидаемой доходности нечеткого портфеля от величины риска, а также зависимости риска от критериального значения доходности. Предлагаемый подход позволяет найти наилучший компромисс между ожидаемой доходностью портфеля и его риском в условиях неопределенности.

Литература

[Зайченко, 2007] Зайченко Юрий, Малихех Есфандиярфард. Анализ и сравнение результатов оптимизации инвестиционного портфеля при применении модели Марковитца и нечетко-множественного метода. //Proceedings of X111-th International Conference KDS-2007 "Knowledge, Dialogue Solution", Vol.1, pp.278-2.

[Зайченко, 2008] Зайченко Ю.П., Малихех Есфандиярфард. Оптимизация инвестиционного портфеля в условиях неопределенности// Системні дослідження та інформаційні технології.-№2-2008.-с. 59-76.

[Зайченко, Малихех, 2007] Зайченко Ю.П., д.т.н., проф.,Малихех Есфандиярфард,Заика А.И. Анализ инвестиционного портфеля на основе прогнозирования курсов акций // Вісник національного технічного університету України «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка.» Київ ТОО «ВЕК+», №47 – 2007, - С. 168-179.

[Зайченко, 2010] Зайченко Юрий, Ови Нафас Агаи Аг Гамиш. Исследование двойственной задачи оптимизации инвестиционного портфеля в нечетких условиях. Natural and Artificial Intelligence. ITHEA. Sofia, Bulgaria.-2010.-pp. 115-128.

Информация об авторах

Юрий Зайченко– доктор технических наук, профессор. Институт прикладного системного анализа НТУУ «КПИ», 03056, Киев-56, Украина phone: 38044 -4068393, e-mail: baskervil@voliacable.com, ZaychenkoYuri@ukr.net

Esfandiyarfard Maliheh - IRAN -Semnan Electricity Company phone 09191744969, e-mail: far_d_sem@yahoo.com

Ови Нафас Агаи Аг Гамиш (Иран) - аспирант НТУУ «КПИ»; 03056, Киев-56, Украина e-mail: ovinafas@yahoo.com

Благодарности

Статья частично финансирована из проекта ITHEA XXI Института Информационных теорий и Приложений FOI ITHEA и консорциума FOI Bulgaria (www.ithea.org, www.foibg.com)