

## ФОРМАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ЭВОЛЮЦИИ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЕЙ

Галина Гайворонская

**Аннотация:** Предложено для описания телекоммуникационной сети во времени и пространстве использовать пять групп параметров: исследуемый период времени, топологическую структуру исследуемой сети, требования на обслуживание и увеличение емкости сети, технические и экономические параметры существующего и вводимого оборудования; экономические параметры эволюции сети. Для каждой группы параметров построены математические абстракции, формирующие общую пространственно-временную систему в которой может быть выполнено исследование эволюции ТС.

**Ключевые слова:** телекоммуникационная сеть, процесс введения принципиально нового оборудования математическая модель.

**Ключевые слова классификации ACM:** C.2. Computer-communication networks, H. Information Systems - H.1 Models and Principles, K. Computing Milieux - K.6 Management of computing and information system

---

### Введение

---

В последние годы процесс развития телекоммуникационных сетей идет всевозрастающими темпами, при этом существенно изменилась общая ситуация в сфере инфокоммуникаций в связи с происходящим переходом от индустриального общества к информационному. Одновременно с этим изменились и общие подходы к созданию и развитию телекоммуникационных сетей (ТС). Это вызвано рядом причин, основными из которых являются увеличивающаяся конкуренция на рынке инфокоммуникационных услуг (ИКУ) и возрастающие темпы появления новых технологий в телекоммуникациях.

Бурный рост ТС происходит не только в связи с возрастающими потребностями в предоставлении постоянно увеличивающегося количества разнообразных ИКУ, но и благодаря невиданным ранее темпам смены сетевых технологий. Если раньше новые поколения систем коммутации и передачи появлялись на ТС раз в несколько десятилетий, то в настоящее время смена технологий происходит гораздо быстрее. Причем зачастую вводимые технологии оказывают значительное воздействие на структуру модернизируемой сети. При этом происходит не только количественный рост емкости и пропускной способности ТС, но и существенные качественные изменения, в большинстве случаев требующие пересмотра основных принципов построения сетей. Наглядные примеры: переход от аналоговой техники к цифровой, введение беспроводного доступа на стационарных сетях, переход от электрических сигналов к оптическим и введение на ТС оптических систем передачи и коммутации. В связи этим общие подходы к планированию ТС требуют в некоторых аспектах кардинальных изменений. Тщательная проработка принимаемых решений при средне- и долгосрочном планировании выходит на первый план потому, что ошибки планирования ТС ведут не только к существенным финансовым потерям, чем еще десятилетие назад, но и, что не менее важно, их последствия гораздо труднее устранить. Все это доказывает важность исследования процессов эволюции ТС, связанных не только с удовлетворением спроса населения и предприятий на ИКУ, но и с внедрением принципиально новых технологий, существенно влияющих как на структуру модернизируемых сетей, так и на необходимые для такой модернизации инвестиции. И особенно важной становится проблема наиболее целесообразного использования выделенных для этой цели инвестиций с учетом изменения реальной стоимости вложенных средств с течением времени. Указанная проблема требует разработки модели, имитирующей процесс эволюции ТС.

Для того, что бы точнее определиться с объектом исследования следует обратиться к классификации основоположников теории связи Г.Б. Давыдову, В.Н. Рогинскому и А.Д. Харкевичу, по учебникам которых, посвященным теории сетей связи, до сих пор учатся студенты связных специальностей. По этой классификации выделяется три вида ТС: сигнальные сети, сети без коммутации (с долговременными кроссовыми соединениями) и сети с коммутацией (оперативными соединениями, устанавливаемыми на время одного интерактивного обмена, например, телефонного разговора или на время передачи одного сообщения). В настоящей работе исследуется коммутируемая ТС при ее модернизации от некоторого исходного состояния в процессе динамического развития требующего изменения основных принципов построения этой сети, без ухудшения текущей работы сети по предоставлению ИКУ.

Вопросы выбора коммутационного оборудования и алгоритмов управления процессами установления соединений на коммутируемой сети выходят на первый план, поскольку в последние годы существенно изменилось соотношение затрат на отдельные элементы создаваемой или модернизируемой ТС. Если несколько десятилетий назад определяющими были затраты на линейные сооружения и каналобразующее оборудование, то впоследствии эта ситуация существенно изменилась в сторону увеличения доли затрат на коммутационное оборудование, и сетевое программное обеспечение [1]. Поэтому и формулировка задач сетевой оптимизации тоже претерпела кардинальные изменения. В настоящее время можно позволить себе создать первичную сеть с заранее заданной и значительной избыточностью, поскольку это несущественно увеличивает общую стоимость модернизируемой сети. Однако следует очень тщательно подходить к вопросам выбора типов и объемов коммутационного оборудования, поскольку доля затрат на эти системы является определяющей для создания и модернизации ТС [2].

---

### Постановка задачи

---

Работа посвящена исследованию процесса эволюции ТС, при этом акцент в ней делается на переходный период, то есть переходный процесс. Известно, что именно переходные процессы представляют наибольший научный и практический интерес вне зависимости от того, где именно они происходят, в такой большой системе как ТС или просто в электрической цепи. И в этой связи важно правильно планировать переходный период, что бы не ухудшить качество работы сети и наиболее рационально истратить выделенные для этого средства. Следовательно, необходимо оптимизировать процесс эволюции таким образом, чтобы учесть всю совокупность качественных, экономических и временных показателей.

При этом исследуется эволюция сети от некоторого исходного состояния, что значительно усложняет задачу (создать что-либо заново гораздо легче, чем внести исправления в существующую структуру не прерывая и не ухудшая ее работы). Учет одновременно пространственного и временного аспектов эволюции и оптимизация динамики эволюции сети от заданного исходного состояния являются двумя важными аспектами задачи исследования. Третьим не менее важным аспектом является то, что исследуется процесс эволюции сети при введении оборудования, характеристики которого требуют пересмотра основных принципов построения сети. То есть понятие «принципиально новое оборудование» предполагает использование технологий, применение которых требует нового подхода к планированию ТС. При этом для реализации постепенного перехода от существующих технологий к новым, на сети должно быть обеспечено сосуществование, как старого, так и нового оборудования, что может быть реализовано методом наложения, либо замены на отдельных узлах исследуемой сети [3]. Поэтому необходимо проанализировать модель эволюции сети, использующую два вида оборудования, которые можно обозначить как существующее и «перспективное» или новое. Такой анализ может использоваться при введении любых новых технологий на действующей ТС [4].

Четвертой особенностью рассматриваемой постановки задачи являются предположения о типах нового оборудования. При этом в работе рассматривается два вида нового оборудования: основное или опорное и выносное или дистанционно управляемое. То есть вторым типом устанавливаемого оборудования

являются системы, подключаемые к оборудованию первого типа и функционирующие с ним взаимосвязано, в то время как первый тип оборудования может работать как автономно, так и вместе с оборудованием второго типа. Примеров оборудования, взаимодействующего таким образом множество. Это и цифровые системы коммутации с подключаемыми к ним выносными модулями (ВМ) – цифровыми концентраторами; и центры коммутации сотовых сетей мобильной связи с контроллерами базовых станций, предназначенные для концентрации нагрузки от группы БС и распределенные в пространстве модули гибких программируемых коммутаторов *Softswitch*.

Для ТС процесс введения принципиально нового оборудования не может быть одномоментным в силу как технических, так и экономических причин. Некоторые из этих причин проанализированы автором в работах [4-13]. Это сложная проблема, включающая в себя большой комплекс системных вопросов, обеспечивающий взаимодействие существующего и вновь вводимого оборудования. Учитывая консервативность ТС и необходимость ее непрерывной работы, очевидно, что процесс перехода от существующего оборудования к принципиально новому, будет скорее эволюционным, чем революционным и может растянуться на несколько лет. Длительность переходного периода зависит от многих факторов. В частности от [7]: состояния существующей сети, объемов инвестиций, сроков окупаемости существующего и вводимого оборудования, степени амортизации существующего оборудования, необходимой скорости роста существующей сети, определяемой, в первую очередь, требованиями пользователей на обслуживание сетью, а также доступности вновь вводимого оборудования, коэффициента инфляции и многого другого.

Одним из используемых подходов для решения задач оптимизации ТС является независимое рассмотрение отдельных узлов сети с учетом фактора времени [10]. Применение такого подхода не позволяет в общем случае исследовать процесс развития сети, поскольку не учитываются пространственные связи. Другим подходом является рассмотрение сети в определенный момент времени, учитывая лишь пространственные связи и не принимая в расчет временных.

В связи с разработкой многоуровневой модели сети можно утверждать, что средства анализа стационарных сетей в целом созданы. Исследования же динамики сетей находятся на начальной стадии, так как традиционно используемый для исследования математический аппарат (теория массового обслуживания, теория надежности), да и не традиционный аппарат (теория конечных полумарковских процессов, теория конечных цепей Маркова и др.) по своей природе является средством описания стационарных систем. Между тем реальные сети являются нестационарными объектами. Их нестационарность определяется, в частности, сезонными и суточными изменениями нагрузки, перемещениями пользователей сети, выходом из строя и восстановлением сетевых элементов, реконфигурацией сети и др. Отсутствие адекватного, по возможности несложного аппарата исследования нестационарных сетей приводит к тому, что сети рассчитываются на максимальные, пиковые нагрузки, что существенно увеличивает затраты на создание и модернизацию ТС.

Исходя из изложенного, задачу, исследуемую в работе можно сформулировать следующим образом: разработка модели, позволяющей оптимизировать процесс динамического изменения ТС от существующего состояния при введении двух видов взаимосвязанного оборудования, параметры которого требуют принципиального изменения характеристик исследуемой сети с учетом пространственных и временных факторов. Исследуемая задача не нова, однако в такой постановке она предлагается впервые.

Очевидно, что в своей общей постановке проблема оптимального синтеза ТС многокритериальна и требует правила, позволяющего сравнивать возможные альтернативы. В простейшем случае такое правило может быть задано скалярной функцией на множестве возможных вариантов, а наилучшее решение определяется из условий экстремума этой функции. Однако в практических задачах построение такой функции вызывает серьезные затруднения. К тому же формирование целевых функций на начальных этапах выбора приводит к максимальному субъективизму и заранее запрограммированному результату, исключая широкий поиск возможных кандидатов на оптимальность по менее сильным

критериям. Процедуры выбора дают возможность выявить рациональные решения и позволяют разрешить компромиссы с учетом нескольких показателей. С другой стороны, всякое проектирование многовариантно по своему существу, а это требует многоаспектной, многокритериальной оценки возможных вариантов проектов с целью выбора наиболее целесообразного решения. Если рассматривать наиболее часто встречающуюся триаду критериев: качество, время, стоимость, то в нашем случае, совокупность показателей качества предоставления услуг, надежности и эффективности ТС введены в виде ограничений, а оптимизируются время, то есть момент введения оборудования, и стоимость модернизации сети, как на каждом отдельном этапе проектирования, так и суммарная за весь период исследования. Выбор экономических критериев, а именно действительной стоимости результирующей сети и действительных годовых затрат существенно усложняет задачу, так как требует введения дисконтного коэффициента, который вносит экспоненциальную составляющую в функцию стоимости развития сети. В результате этого задача становится нелинейной.

### Общая структура решения задачи

Общеизвестным подходом для решения комплексных проблем является декомпозиция общей проблемы на ряд отдельных задач последовательно решаемых в процессе исследований. Первая задача, которой посвящена данная статья, предполагает введение ряда математических абстракций, позволяющих формализовать проблему. Для этого, прежде всего, выделим используемые исходные параметры и представим задачу в обобщенном виде как показано на рис. 1

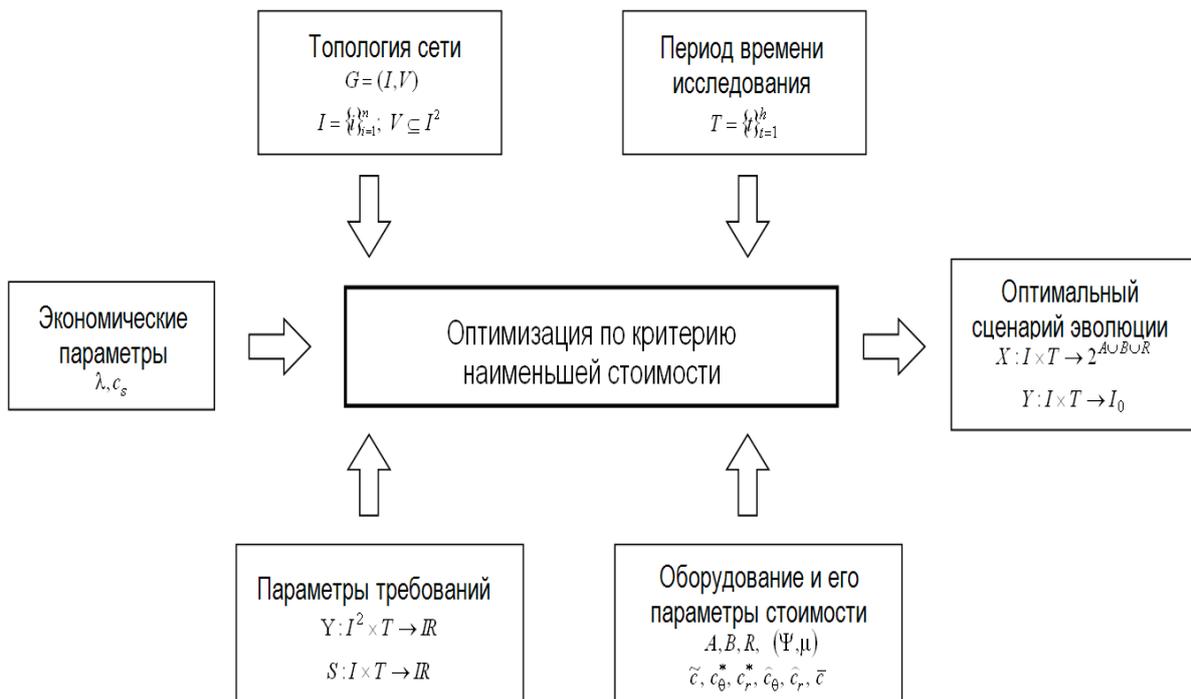


Рис.1. Модель оптимизации телекоммуникационной сети

Для каждого входного параметра, используемого в модели пространственно-временной структуры ТС предложено формализованное описание, при этом входные параметры модели сгруппированы. Выделены следующие группы параметров, описывающих сеть в пространстве и времени [14]:

- топологическая структура сети, то есть рассматриваемое пространство;
- исследуемый период времени;
- требования на обслуживание пользователей и на развитие сети;

- параметры доступного оборудования;
- экономические параметры.

Для каждой группы параметров построен математический аппарат точно, обще, полно и удобно описывающий реальные объекты, в контексте поставленной задачи, то есть формализовано представление исходных данных, используемых при планировании сетей.

**Топологическая структура сети.** Обозначим через  $I$  множество всех узлов коммутации (УК), как существующих на момент начала исследования, так и потенциальных, которые могут быть введены в течение исследуемого периода, а через  $n$  – количество таких объектов, которые в дальнейшем будем называть узлами сети. Другими словами, мощность множества узлов есть  $n \ ||I| = n$ . Рассмотрение в качестве узлов сети объектов, соответствующих узлам, которые, могут быть введены в течение периода исследования (потенциальных точек размещения узлов), позволяет сделать рассматриваемое пространство инвариантным во времени. При этом построен аппарат, обеспечивающий возможность исключить влияние тех узлов сети, которые в рассматриваемый момент времени еще не были введены. Природа объектов из множества  $I$  для нас не существенна, поэтому их можно считать последовательными натуральными числами, что определяет  $I$  следующим образом  $I = \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n\} = \{1, 2, \dots, n\}$ . Тогда, любые интересующие нас характеристики узлов можно рассматривать как функции, определенные на множестве узлов.

Пусть теперь  $V$  – множество пучков каналов между узлами сети. Предположим, что каждую пару узлов соединяет не более одного пучка каналов. В связи с чем, пучок каналов можно рассматривать как упорядоченную пару узлов, первый элемент которой определяет узел, из которого выходит пучок, а второй – узел в который он входит. То есть  $V \subseteq I^2$ , где  $I^2$  – декартов квадрат множества  $I$  или множество пар данного множества. Аналогично, дополнительные характеристики пучков будем рассматривать в виде функций, определенных на множестве  $V$ . Кроме того, можно считать, что пары вида  $\langle i, i \rangle \ i \in I$  не имеют смысла как пучки каналов. Иначе говоря  $\forall i \in I \ \langle i, i \rangle \notin V$ .

В соответствии с указанными свойствами, система полученных множеств  $I$  и  $V$  образует конечный ориентированный граф  $G$  без петель и кратных ребер  $G=(I, V)$ . В этом графе  $I$  составляет множество вершин графа, а  $V$  – множество ребер. Функция  $\Delta$  должна удовлетворять ряду условий:

1. быть неотрицательной в своей области определения  $\forall i, j \in I \ \Delta(i, j) \geq 0$ ;
2. для пары узлов, в которой первый элемент совпадает со вторым значение функции должно быть нулевым  $\forall i \in I \ \Delta(i, i) = 0$ ;
3. симметричность  $\Delta$  относительно своих параметров, то есть рассматриваемая характеристика должна быть одинаковой как для пары  $\langle i, j \rangle \ i \in I^2$ , так и для пары  $\langle j, i \rangle \ \forall i, j \in I \ \Delta(i, j) = \Delta(j, i)$ ;
4. для функции должно выполняться неравенство треугольника, а именно прямое расстояние между любой парой узлов не может превышать расстояния через некоторый промежуточный узел, то есть  $\forall i, j, k \in I \ \Delta(i, j) \leq \Delta(i, k) + \Delta(k, j)$ ;

Сформулированные условия гарантируют, что функция  $\Delta$  является метрикой на множестве узлов сети.

Пусть  $D$  – квадратная действительная матрица порядка  $n$  над действительным полем  $D = \|\|d_{ij}\|\| \in M_n(\mathbb{R})$ . Определим элементы этой матрицы как  $d_{ij} = \Delta(i, j)$ . То есть  $D$  – матрица расстояний между узлами, имеющая вид

$$D = \begin{pmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & \dots & d_{1n} \\ d_{12} & 0 & d_{23} & \dots & d_{2n} \\ d_{13} & d_{23} & 0 & \dots & d_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{1n} & d_{2n} & d_{3n} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Из свойств  $\Delta$  следует, что  $D$  является симметричной матрицей и содержит только нули на главной диагонали.

**Исследуемый период времени.** Планирование эволюции сети осуществляется для ограниченного промежутка времени. То есть, если  $t$  – некоторый момент исследуемого периода, то  $t$  удовлетворяет соотношению  $\underline{t} \leq t \leq \bar{t}$ , где  $\underline{t}$  – момент начала исследования;  $\bar{t}$  – момент конца исследования,  $\underline{t} \neq \bar{t}$ . При этом следует учитывать, что предоставление оборудования, расчет нагрузки и принятие решений может осуществляться лишь в некоторые моменты исследуемого периода. То есть, множество таких моментов времени образует некоторое разбиение действительного сегмента  $[\underline{t}, \bar{t}]$   $t \in \tau_{[\underline{t}, \bar{t}]}$ ,

$$\tau_{[\underline{t}, \bar{t}]} = \{t_k\}_{k=0}^h : \underline{t} = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_h = \bar{t} \quad (1)$$

где  $\tau_{[\underline{t}, \bar{t}]}$  – разбиение сегмента  $[\underline{t}, \bar{t}]$ ;

$h$  – количество точек разбиения;

$t_k, k = \overline{0, h}$  – точки разбиения, соответствующие рассматриваемым моментам времени.

Промежутки между такими моментами могут быть, вообще говоря, различными, однако для упрощения дальнейших выкладок, будем считать их равно удаленными

$$\forall k, l = \overline{1, h} \quad t_k - t_{k-1} = t_l - t_{l-1} = \frac{\bar{t} - \underline{t}}{h} = \text{const} \quad (2)$$

То есть последовательность  $\{t_k\}_{k=0}^h$  является арифметической прогрессией

$$\forall k = \overline{1, h} \quad t_k = \underline{t} + (k-1)\Delta t$$

где  $\Delta t = \frac{\bar{t} - \underline{t}}{h}$  – разность прогрессии.

Это предположение не ограничивает общности, как видно из доказательства следующей леммы.

**Лемма 1.** Для любого сегмента  $[\underline{t}, \bar{t}]$  и его разбиения  $\tau_{[\underline{t}, \bar{t}]}$  можно построить эквивалентное с точки зрения решаемой задачи разбиение  $\tau_{[\underline{t}^*, \bar{t}^*]}$  некоторого другого сегмента  $[\underline{t}^*, \bar{t}^*]$ , удовлетворяющее (2).

**Доказательство.** Предположим, что все точки  $t_k$  являются рациональными числами. Если это не так, то есть существует некоторая точка  $t_k$ , являющаяся иррациональной, то можно выбрать целое число, сколь угодно близкое к  $t_k$   $\forall \varepsilon > 0 \exists t'_k \in \mathbb{Q} : |t'_k - t_k| < \varepsilon$ .

Так как, в любом случае исходные измерения обладают определенной погрешностью, и результат

требуется лишь с некоторой точностью, всегда можно заменить иррациональное  $t_k$  соответствующе подобранным рациональным  $t'_k$ , так, чтобы это не повлияло на точность моделирования. Итак, все рассматриваемые точки  $t_k$  являются рациональными, то есть, представимы в виде дробей

$$t_k = \frac{m_k}{n_k}, m_k \in \mathbb{Z}, n_k \in \mathbb{N}.$$

Определим  $\hat{n}$  как наименьшее общее кратное всех знаменателей  $n_k$  и построим новое разбиение, точки  $\hat{t}_k$  которого определяются так  $\hat{t}_k = \hat{n}t_k$ . Учитывая то, что множество точек  $t_k$  ограничено и образует разбиение, и не отрицательность  $\hat{n}$  имеем  $\hat{t} \equiv \hat{t}_1 < \hat{t}_2 < \dots < \hat{t}_h \equiv \hat{t}$ . Так как  $\hat{n}$  делится на любое  $n_k$   $\forall k = \overline{1, h}$   $\hat{n} : n_k$ , все полученные новые точки  $\hat{t}_k$  будут целыми числами, то есть  $\forall k = \overline{1, h}$   $\hat{t}_k \in \mathbb{Z}$ . Дополним точки  $\hat{t}_k$  оставшимися целыми числами из сегмента  $[\hat{t}, \hat{t}]$ , множество которых обозначим  $\tilde{\tau}$ . Условимся, что сеть не меняется в точках  $\tilde{\tau}$ . Обозначим полученное разбиение  $\tau_{[\hat{t}^*, \hat{t}^*]}^*$

$$\tau_{[\hat{t}^*, \hat{t}^*]}^* : \hat{t}^* = t_1^* < t_2^* < \dots < t_{h^*}^* = \hat{t}^* \tag{3}$$

Тогда для каждой точки  $t_k$  исходного разбиения  $\tau_{[\underline{t}, \bar{t}]}$  в полученном разбиении существует единственная соответствующая ей точка  $t_{k^*}^*$ . Учитывая нумерацию в (3),  $k^*$  может не совпадать с  $k$ , поэтому определим дополнительную функцию, отображающую множество натуральных чисел в себя же  $\eta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такую, что  $\eta(k) = k^*$ .

Теперь сформулируем важное свойство полученного разбиения  $\tau_{[\hat{t}^*, \hat{t}^*]}^*$ : расстояние между любыми двумя точками  $\tau_{[\underline{t}, \bar{t}]}$  совпадает с расстоянием между соответствующими точками  $\tau_{[\hat{t}^*, \hat{t}^*]}^*$  с точностью до фиксированного коэффициента масштабирования. Это означает что,

$$\forall t_k, t_l \in \tau_{[\underline{t}, \bar{t}]} \quad \exists! t_{\eta(k)}^*, t_{\eta(l)}^* \in \tau_{[\hat{t}^*, \hat{t}^*]}^* : |t_k - t_l| = |t_{\eta(k)}^* - t_{\eta(l)}^*| \hat{n} \tag{4}$$

Этот факт, в сочетании с соглашением о неизменности сети в дополнительных точках  $\tilde{\tau}$ , обеспечивает неизменность получаемых результатов при замене  $\tau_{[\underline{t}, \bar{t}]}$  на  $\tau_{[\hat{t}^*, \hat{t}^*]}^*$ , с точностью до масштабирования шкалы времени. Что и завершает доказательство леммы. ■

Не смотря на конструктивность приведенного доказательства, использованная процедура, в силу своей значительной избыточности, не вполне подходит для применения на практике. Тем не менее, доказательство показывает возможность упрощения сложных математических структур, используемых при описании сети, без уменьшения общности и потери точности. Следует отметить, что не вполне формальный характер некоторых рассуждений связан лишь с упрощением выкладок, не несущих значительной нагрузки в масштабе решаемой задачи. Продолжим упрощение арифметической прогрессии (1), положив  $\underline{t} = 0$ . Это вполне обоснованно, ввиду того, что для модели не важны реальные даты. Тогда

$\bar{t} = h$  и последовательность  $\{t_k\}_{k=0}^h$  примет вид  $\{0, 1, 2, \dots, h\}$ .

Обозначим полученное через  $T$ ,

$$T = \{k\}_{k=0}^h = \{0, 1, 2, \dots, h\}.$$

Таким образом,  $T$  будет являться моделью исследуемого периода времени. Обозначим через  $\theta, r \in T$  – соответственно моменты наложения и замены оборудования существующих узлов коммутации (УК). Процесс развития сети по отношению к переменным  $\theta, r$  изображен на рис. 2 [12]. Поскольку замена осуществляется после наложения, применяется ограничение

$$0 \leq \theta < r \leq h. \tag{5}$$

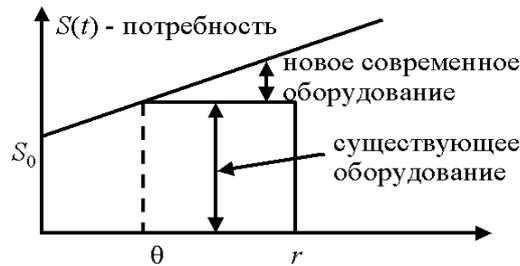


Рис. 2. Процесс эволюции сети

**Требования на обслуживание.** Определив рассматриваемое пространство в виде графа  $G$ , а время в виде последовательности  $T$ , перейдем к рассмотрению характеристик сети, существующих в этой системе. Обозначим через  $Y$  нагрузку между узлами сети и рассмотрим требования на ее обслуживание. Очевидно, эта величина зависит от рассматриваемой пары узлов и времени. Тогда, нагрузка представляет функцию  $Y : I^2 \times T \rightarrow IR$ . Значения этой функции, иллюстрируемой рис. 3 могут соответствовать как величинам реальных измерений между узлами в заданное время, так и прогнозируемым параметрам.

Рассмотрим пространственное сечение междуузловой нагрузки. Зафиксируем пару узлов  $\langle i, j \rangle$  и

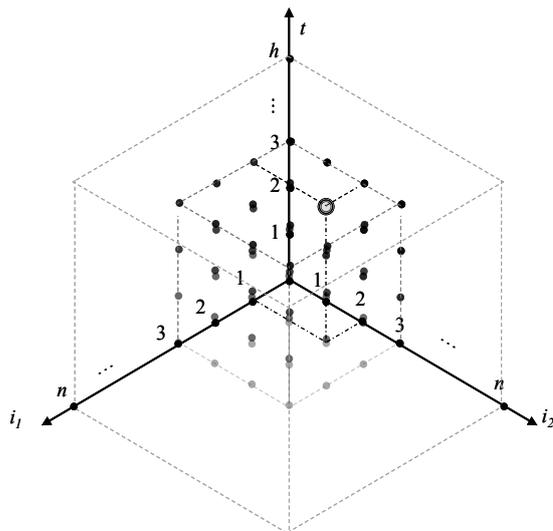


Рис. 3. Пространственно-временное представление междуузловой нагрузки

определим ее пространственное сечение  $\mathfrak{Y}_{ij}$  как

$$\mathfrak{Y}_{ij} : T \rightarrow IR, \quad \mathfrak{Y}_{ij}(t) = Y(i, j, t).$$

Таким образом, для каждой пары узлов определена функция одного аргумента, определяющая нагрузку между этой парой узлов в каждый момент времени. Из этой системы несложно получить временной срез нагрузки. Для этого зафиксируем некоторый момент времени  $t$  и построим квадратную матрицу  $n$ -ого порядка  $Y(t)$  так, чтобы  $Y(t) = \|\mathfrak{Y}_{ij}(t)\| \in M_n(IR)$ .

Учитывая дискретность и ограниченность  $T$ , можно говорить о  $Y$  как о конечной системе матриц нагрузки.

Кроме требований на соединения между пользователями, сеть также может получать требования на подключение новых пользователей. Количество таких требований

будем рассматривать не для всей сети целиком, а для каждого узла в отдельности, то есть уже после

того, как запросы будут обработаны сетевым оператором и распределены по узлам. Поступление требований пользователей на подключение к сети, является стохастическим процессом, однако, в соответствии с анализом, проведенным автором в [18], будем рассматривать его как детерминированную функцию, однозначно распределенную в пространстве и времени.

Определим функцию  $S : I \times T \rightarrow IR$ , задающую требования  $S(i, t)$  на подключение к узлу  $i$  в момент  $t$ . Зафиксировав произвольный узел, получим систему функций одного аргумента  $s_i : T \rightarrow IR$ , каждая функция, которой определяет требования на подключение для отдельного узла. Функции  $Y$  и  $S$ , а также их срезы определяют параметры требований на подключение к сети новых пользователей.

**Оборудование и его стоимостные параметры.** В соответствии с поставленной задачей, выделим три класса типов оборудования (рис. 4), используемого на сети: оборудование существующей технологии; опорное оборудование новой технологии; выносное оборудование новой технологии.

Обозначим эти классы оборудования в виде множеств  $A$ ,  $B$  и  $R$ . Естественно считать эти множества конечными, каждый элемент которых  $a_i$ ,  $b_i$  или  $r_i$  представляет тип оборудования соответствующего класса. Теперь определим стоимостные параметры, для оборудования каждого типа в виде следующих функций [8]:



Рис. 4. Классификация типов оборудования

$\tilde{c} : A \cup B \cup R \rightarrow IR$  – годовые расходы на обслуживание единицы оборудования некоторого типа;

$c_{\theta}^* : B \cup R \rightarrow IR$  – расходы на запуск нового оборудования при наложении;

$c_r^* : B \cup R \rightarrow IR$  – расходы на запуск нового оборудования при замене;

$\hat{c} : A \rightarrow IR$  – расходы на единичное приращение емкости существующего оборудования;

$\hat{c}_{\theta} : B \cup R \rightarrow IR$  – расходы на единичное приращение емкости нового оборудования при наложении;

$\hat{c}_r : B \cup R \rightarrow IR$  – расходы на единичное приращение емкости нового оборудования при замене;

$\bar{c} : A \cup B \rightarrow IR$  – стоимость единицы длины кабеля.

Можно для упрощения обозначений вместо функций  $\hat{c}_{\theta}$  и  $\hat{c}_r$  рассматривать их расширения, определенные на  $A \cup B$  и на  $A$ , и действующие аналогично  $\hat{c}$ .

**Экономические характеристики.** При решении задачи рассчитываются все денежные потоки, включающие затраты на установку нового опорного и выносного оборудования, его обслуживание, амортизацию, налоги, затраты на аренду земли, здания, коммунальные платежи и т. п. В соответствии с выбранным критерием оптимизации для любых затрат, которые будут иметь место на протяжении исследуемого периода, необходимо рассчитать их действительную величину. Для этого потребуется использовать дисконтную ставку  $i$ , то есть учесть процент инфляции [15]. В расчетах для приведения

будущих затрат к текущему периоду, применяем дисконтный коэффициент, определяемый как  $\frac{1}{(1+i)^t}$ ,

где  $i$  – дисконтная ставка,  $t$  – момент времени, соответствующий будущим величинам затрат. Для

удобства дальнейших рассуждений преобразуем традиционное представление дисконтного

$$\text{коэффициента, следующим образом } C^* = \frac{C_t}{(1+i)^t} = \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{(1+i)^t} = e^{-\rho t} \\ \rho = \ln(1+i) \end{array} \right] = C_t e^{-\rho t},$$

где  $C^*$  – действительная стоимость будущих затрат;

$C_t$  – величина будущих затрат;

$i$  – дисконтная ставка;

$\rho$  – модифицированное представление дисконтного коэффициента;

$t$  – момент времени, соответствующий периоду, в который рассматриваются будущие затраты.

Для учета возможности повторного использования оборудования, выводимого из эксплуатации, введем чистую остаточную стоимость единицы существующего оборудования [16]  $c_s : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

### Функционирование модели стратегии эволюции сети

Ряд исходных параметров модели вводится в виде ограничений, в частности, параметры существующего и вновь вводимого оборудования. Эти параметры также необходимо формализовать, что выполнено автором в работе [17]. В первую очередь, определим тип оборудования, устанавливаемого на узлах сети в каждый момент времени, в виде отображения  $X : I \times T \rightarrow 2^{A \cup B \cup R}$ , где  $2^{A \cup B \cup R}$  – булеан множества  $A \cup B \cup R$ , то есть множество всех подмножеств множества типов оборудования. Такое задание  $X$  означает, что в каждый момент времени  $t$ , на некотором узле  $i$  может быть одновременно установлено несколько типов оборудования  $X(i, t) \subseteq A \cup B \cup R$ . Введем дополнительные обозначения этой характеристики, для этого зафиксируем некоторый узел  $i$  и определим

$$x_i : T \rightarrow 2^{A \cup B \cup R} \quad (6)$$

В силу технических особенностей, функции (5) не могут вести себя произвольно, то есть существуют некоторые ограничения на изменение типов установленного на узле оборудования.

Назовем множество типов оборудования, используемых в данный момент на узле, и соответственно, функции, выполняемые узлом – состоянием узла. Тогда  $\Psi = 2^{A \cup B \cup R}$  – множество состояний узла. Зададим на множестве  $\Psi$  бинарное отношение  $\mu$ , определяющее возможность перехода между двумя состояниями узла. Здесь под бинарным отношением понимается некоторая взаимосвязь между двумя элементами множества, которая либо имеет место, либо не имеет. Строго говоря,  $(\langle \psi_1, \psi_2 \rangle \in \mu) \equiv (\psi_1 \mu \psi_2) \Leftrightarrow$  переход из  $\psi_1$  в  $\psi_2$  возможен. Следует отметить, что не во всякий момент времени, узел совершает переход в новое состояние – он может оставаться в прежнем. Таким образом, можно сказать, что допустим переход из состояния  $\psi_1$  в это же состояние  $\psi_1$ ,

$$\psi_1 \mu \psi_1 \quad \forall \psi_1 \in \Psi \quad (7)$$

Так как речь идет о модернизации узла, с переходом от старых технологий к новым, принимается предположение о необратимости эволюции. Это предположение заключается в том, что если на некотором узле установлено оборудование  $k$ -поколения, оно не может быть заменено оборудованием более ранних поколений. Таким образом переход из состояния  $\psi_1$  в состояние  $\psi_2$  допустим, а обратный переход из состояния  $\psi_2$  в  $\psi_1$  невозможен, за исключением случая, когда  $\psi_1 = \psi_2$ . То есть

$$\left. \begin{array}{l} \psi_1 \mu \psi_2 \\ \psi_1 \neq \psi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \psi_2 \bar{\mu} \psi_1 \quad \forall \psi_1, \psi_2 \in \Psi .$$

Иначе говоря

$$\left. \begin{array}{l} \psi_1 \mu \psi_2 \\ \psi_2 \mu \psi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \psi_1 = \psi_2 \quad \forall \psi_1, \psi_2 \in \Psi \quad (8)$$

То есть отношение  $\mu$  является антисимметричным.

Кроме того, переход между состояниями может осуществляться не непосредственно, а через некоторое промежуточное состояние. Такой переход возможен тогда и только тогда, когда возможны переходы из исходного состояния в промежуточное и из промежуточного в конечное. Последнее означает, что отношение  $\mu$  обладает свойством транзитивности:

$$\psi_1 \mu \psi_2 \wedge \psi_2 \mu \psi_3 \Rightarrow \psi_1 \mu \psi_3 \quad \forall \psi_1, \psi_2, \psi_3 \in \Psi \quad (9)$$

Из показанных свойств (7), (8) и (9) можно сделать вывод о том, что отношение  $\mu$  является отношением частичного порядка. Следовательно, система  $(\Psi, \mu)$  образует частично упорядоченное множество (ЧУМ).

Для узлов, на которых установлено выносное оборудование, необходимо определить опорный узел, к которому подключен конкретный ВМ в данный момент времени. Для этого зададим отображение

$$Y : E_R \rightarrow I_B, \quad (10)$$

где  $E_R = \{ \langle i, t \rangle \mid i \in I, t \in T : X(i, t) \cap R \neq \emptyset \}$  – множество точек пространственно-временной системы, требующих опорного оборудования, то есть упорядоченных пар из момента времени и узла, на котором расположен ВМ.

$I_B = \{ i \mid i \in I : \exists t \in T X(i, t) \cap B \neq \emptyset \}$  – множество потенциально опорных точек пространства, то есть узлов, на которых в течение исследуемого периода при замене введено опорное оборудование.

Это отображение в своей области определения задает опорный узел  $Y(i, t) \in I$ , к которому подключен узел  $i$  в момент  $t$ . Построение множеств  $E_R$  и  $I_B$  является довольно сложным и не вполне удобным в использовании, поэтому будем рассматривать также расширение функции (9)  $Y : I \times T \rightarrow I_0$ , где  $I_0 = I \cup \{0\}$  – множество узлов сети, заполненное нулем. При этом предполагается, что на все  $x$  точках  $(I \times T) \setminus E_R$  это расширение принимает значение нуль.

Введем также пространственные срезы для заданной пространственно-временной функции  $y_i(t) = Y(i, t) \quad \forall i \in I$ .

### Исследование задачи в пространственно-временной системе

Учитывая приведенные выше построения, решение поставленной задачи можно рассмотреть в виде пары  $(X, Y)$ , где  $X : I \times T \rightarrow 2^{A \cup B \cup R}$  определяет используемые типы оборудования на узлах, а  $Y : I \rightarrow I_0$  – структуру подключения выносов. Сформулируем это утверждение в виде леммы.

**Лемма 2.** На основании пары  $(X, Y)$  всегда можно определить соответствующую стратегию эволюции сети и при том только одну.

**Доказательство.** В соответствии с соглашением о допустимых стратегиях эволюции сети, введение нового типа оборудования на узле может сопровождаться либо полной заменой оборудования предыдущего типа оборудованием нового типа, либо сохранением оборудования предыдущего типа и использованием оборудования нового типа исключительно для расширения емкости узла. Кроме того, в один момент времени допускается введение только одного типа оборудования на одном узле.

Из вышеизложенного следует, что если в момент времени  $t$  на узле  $i$  происходит изменение набора

используемых типов оборудования  $X(i, t) \neq X(i, t-1)$ , то возможны только два варианта  $X(i, t) = X(i, t-1) \cup \{\chi_2\}$  или  $X(i, t) = (X(i, t-1) \setminus \{\chi_1\}) \cup \{\chi_2\}$  где  $\chi_2 \in B \cup R$  – тип оборудования, вводимый в момент  $t$ ;  $\chi_1 \in B \cup R$  – тип оборудования, введенный непосредственно перед  $\chi_2$ .

Первый вариант соответствует наложению оборудования типа  $\chi_2$  на существующее оборудование, а второй – полной замене оборудования типа  $\chi_1$  на оборудование типа  $\chi_2$ . Эти варианты для каждого узла  $i$  и момента времени  $t$  определяются однозначно и в свою очередь однозначно определяют стратегию развития, что и требовалось доказать. ■

При использовании линейной функции, требования на изменение емкости сети имеют вид  $S(t) = s_0 + gt$ , где  $s_0$  – требования на подключение к узлу в начальный момент времени;  $g$  – скорость увеличения емкости узла.

Пусть  $w \geq s_0$  – монтируемая емкость сети в момент  $t = 0$  и  $e = \frac{w - s_0}{g}$  – первое время исчерпания

ресурсов, определяемое как:  $e = \left[ \frac{w - s_0}{g} \right]$ . В соответствии с введенными обозначениями,  $\theta, r \in T$  –

соответственно моменты наложения и замены оборудования, при этом  $0 \leq \theta < r \leq h$ .

Принятые определения иллюстрирует рис. 5. Из рисунка видно, что при линейном росте требований, емкость узла наращивается ступенчато, в соответствии с допущением о дискретности промежутков принятия решений. При этом первая ступень может быть шире последующих, что обуславливается возможной избыточной емкостью сети на момент начала исследования.

Случай, показанный на рис. 5 соответствует наличию на узле оборудования в начальный момент времени. В течение периода  $[0, \theta]$  происходит увеличение емкости узла оборудованием того же типа. Момент  $\theta$  соответствует наложению нового оборудования. Далее увеличение емкости узла происходит добавлением оборудования именно этого типа, вплоть до момента  $r$ . В момент  $r$  происходит замена всего установленного существовавшего оборудования на оборудование новой технологии.

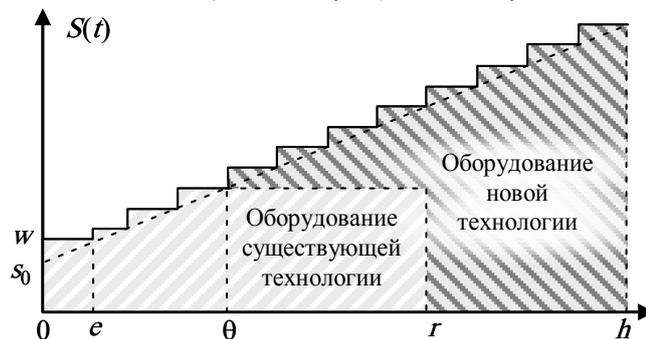


Рис. 5 Изменение емкости узла во времени

## Заключение

Таким образом в работе предложено для описания сети во времени и пространстве использовать пять групп параметров: исследуемый период времени, топологическую структуру исследуемой сети, требования на обслуживание и увеличение емкости сети, технические и экономические параметры существующего и вводимого оборудования; экономические параметры эволюции сети. Для каждой группы параметров построены математические абстракции, формирующие общую пространственно-временную систему в которой выполнено исследование эволюции ТС. Показано, что пучок каналов можно рассматривать как упорядоченную пару узлов, первый элемент которой определяет узел, из которого выходит пучок, а второй – узел в который он входит, а расстояние между этими узлами как функцию  $\Delta: I^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , неотрицательную в своей области определения, симметричную относительно ее параметров и отображающую пары узлов во множество вещественных чисел. Сформулированы условия, которым должна отвечать предложенная функция для того, чтобы являться метрикой на множестве узлов

сети и описывать не только физическое расстояние между соответствующими узлами, но и иные характеристики, например, длину прокладки кабеля между этими узлами. Доказано, что исследуемый период времени можно представить в виде множества рациональных равноудаленных точек действительного сегмента. Выполненное доказательство показывает возможность упрощения сложных математических структур, используемых при описании сети, без уменьшения общности и потери точности и позволяет построить модель исследуемого периода времени для аналитической модели исследования пространственно-временной структуры эволюции ТС. Межузловая нагрузка в каждый момент времени представлена в виде числовой функции  $Y: I^2 \times T \rightarrow \mathbb{R}$ , заданной на декартовом произведении множества пар узлов и рассматриваемых моментов времени. Значения этой функции могут соответствовать как величинам реальных измерений между узлами в заданное время, так и полученным в результате прогноза. Учитывая дискретность и ограниченность рассматриваемого временного промежутка, получена конечная система матриц нагрузки, позволяющая реализовать пространственно-временное представление межузловой нагрузки необходимое для аналитического исследования эволюции ТС во времени и пространстве.

Впервые введены формализованные описания типов коммутационного оборудования устанавливаемого на узлах сети в каждый момент времени в виде отображения  $X: I \times T \rightarrow 2^{A \cup B \cup R}$  и стоимостных параметров оборудования, необходимые для создания аналитической модели исследования пространственно-временной структуры эволюции ТС. Предложено модифицированное представление дисконтного коэффициента для приведения значений будущих денежных потоков к текущему периоду. Предложено рассматривать состояния узла и допустимые переходы между ними в виде частично упорядоченного множества, что позволило формализовать описание любого из возможных состояний узла и любое количество переходов. А для задания опорного узла, к которому подключен конкретный выносной модуль в конкретный момент времени, предложено использовать отображение вида  $Y: E_R \rightarrow I_B$ , в котором  $E_R$  представляет собой множество точек пространственно-временной системы требующих опорного оборудования, а  $I_B$  – множество точек пространства, на которых в течение исследуемого периода введено опорное оборудование. Построенное отображение дает возможность формализовать структуру подключения выносных модулей к опорным узлам в модели исследования пространственно-временной структуры эволюции ТС. Доказано, что абстрактная модель процесса эволюции сети может быть представлена в виде пары функций  $(X, Y)$ , описывающих типы оборудования, установленного на каждом узле в каждый момент времени и структуру подключения выносных модулей.

Основная сложность задачи обусловлена ее пространственно-временной структурой. Именно необходимость одновременного учета изменений сети, как в пространстве, так и во времени, определяет комплексность решаемой задачи, следовательно, для ее решения необходим комплексный подход, сочетающий аналитические и алгоритмические методы. Однако, при введении некоторых ограничений на время или пространство, задача упрощается и допускает полностью аналитическое решение. В частности при рассмотрении только пространственной задачи в фиксированный момент времени или только временной задачи в одной точке пространства, решение становится как минимум на порядок проще. Ограничения на рассматриваемое пространство – в данном случае топологическую структуру сети, за исключением наиболее естественных, существенно сужают применение результатов исследования и не могут использоваться при исследовании проблемы в целом. Тем не менее, решение частных задач может оказаться весьма полезным при решении общей проблемы. Введение ограничений на время, может в ряде случаев привести к корректному и при этом более простому решению общей проблемы. Дальнейшие исследования позволили предложить обобщенное решение задачи аналитическими методами и построить имитационную модель процесса эволюции ТС, позволившую автоматизировать процесс получения оптимального сценария развития сети во времени и пространстве по критерию стоимостных параметров.

---

## Благодарности

---

The paper is partially financed by the project ITHEA XXI of the Institute of Information Theories and Applications FOI ITHEA and the Consortium FOI Bulgaria. [www.ithea.org](http://www.ithea.org) , [www.foibg.com](http://www.foibg.com)

---

## Литература

---

- Соколов Н. А. Эволюция местных телефонных сетей ТОО. – Пермь: Книга, 1994. – 375 с.
- Гайворонская Г. С. Введение цифрового коммутационного оборудования на местной телефонной сети // Зв'язок. – 2000. – Ч. 1, №4. – С. 31-33.
- Гайворонская Г. С. Некоторые аспекты перехода от аналоговых к цифровым сетям связи // Модели информационных сетей. – М.: Наука, 1984. – С. 145-155.
- Гайворонская Г. С. Проблема синтеза развивающихся информационных сетей // Вісник ДУИКТ. – 2005. – №3. – С. 14-21.
- Гайворонская Г. С. Проблемы выбора ЦСК для создания плоской двухуровневой сети связи Украины // Телеком (телекоммуникации и сети). – 2000. – №7-8. – С. 25-26.
- Гайворонская Г. С. Особенности сетевого планирования с учетом взаимодействия сетей // Вісник УБЕНТЗ. – 2005. – №1. – С. 38-50.
- Гайворонская Г. С. Пути перехода от аналоговых к цифровым сетям связи // Электросвязь. – 1984. – №10. – С. 49-51.
- Гайворонская Г. С. Экономические аспекты оптимизации эволюционной политики развития местных сетей связи:// Сб. междунар. акад. информатизации при ООН Acta Academia 2001. – Chisinau: Evrica, 2001. – С. 93-98.
- Панфилов И. П., Гайворонская Г. С. Оптимизация размещения цифровых систем коммутации на местной телефонной сети // Тр. УГАС "Информатика и связь". – Одесса, 2001. – С. 35-39.
- Гайворонская Г. С. Оптимизация выбора сценария эволюции местной телефонной сети // Зв'язок. – 2002. – №1. – С. 51-53.
- Гайворонская Г. С. Оценка влияния некоторых факторов на процесс развития телекоммуникационных сетей // Холодильна техніка і технологія. – 2006. – №2 (100). – С. 95-100.
- Гайворонская Г. С. Один из подходов к синтезу топологической структуры телекоммуникационной сети // Вісник ДУИКТ. – 2006. – Т. 4, №2. – С. 119-122.
- Гайворонская Г. С. Модель синтеза оптимальной структуры телекоммуникационной сети // Захист інформації. – 2006. – №4. – С. 78-84.
- Гайворонская Г. С., Сомсиков А. С. Исследование некоторых аспектов модернизации телекоммуникационной сети // Сб. междунар. акад. информатизации при ООН Acta Academia 2002. – Chisinau: Evrica, 2002. – С. 155-164.
- Эддоус М., Стенсфилд Р. Методы принятия решений / Пер. с англ. Под ред. И. И. Елисеевой. – М.: ЮНИТИ, Аудит, 1997. – 590 с.
- Пратт Ш. Оценка бизнеса. – М.: Квинто-Консалтинг, 2005. – 392 с.
- Гайворонская Г. С. Метод представления пространственно-временной структуры модернизируемой телекоммуникационной сети // Зв'язок. – 2006. – №8 (68). – С. 57-60.
- Гайворонская Г. С., Сомсиков Д. А. Исследование модели требований на развитие информационной сети // Холодильна техніка і технологія. – 2006. – №3 (101). – С. 99-104.
- 

## Информация об авторах

---



**Галина Гайворонская** – Институт информационных технологий Одесской государственной Академии холода, д.т.н., профессор, заведует кафедрой информационно-коммуникационных технологий; ул. Дворянская, 1/3, Одесса-26, 65026, Украина; тел. (048)-720-91-48, e-mail: [gayvoronska@osar.odessa.ua](mailto:gayvoronska@osar.odessa.ua)  
 Главные области научных исследований: оптимизация переходных периодов при эволюции телекоммуникационных сетей. Потоки вызовов, нагрузка и межузловое тяготение в сетях. Проблемы создания перспективных сетей доступа Проблема построения полностью оптических систем коммутации