АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ВЫПУКЛОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ПОЛИНОМОВ НА ПОЛИПЕРЕСТАНОВКАХ И СФЕРА ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Пичугина Оксана

Аннотация: *Предлагается алгоритм сведения полиномиальной задачи на полиперестановках к оптимизации выпуклого полинома, позволяющий вместо исходной дискретной задачи рассматривать серию непрерывных выпуклых задач на многограннике полиперестановок.*

Ключевые слова: *евклидово комбинаторное множество, множество полиперестановок, полиномиальная оптимизация, выпуклое продолжение*

ACM Classification Keywords: *G.1.6 [Numerical Analysis] Optimization, I.2.8 [Artificial Intelligence]: Problem Solving, General Terms: Algorithms*

Введение

Рассмотрим задачу дискретной оптимизации на множестве объектов комбинаторной природы, порождаемым конечным числовым множеством. В силу конечности комбинаторного множества можно считать, что целевая функция представляет собой полином, поскольку всегда существует интерполяционный полином, соответствующий функции [Стоян, 1988]. Следует отметить, что особенностью комбинаторных задач является структурированность ее элементов, позволяющая строить такие полиномы, не вычисляя значение функции во всех точках [Яковлев, 1994].

Особый интерес в оптимизации вообще и комбинаторной в частности привлечено к тем классам задач, которые можно свести к оптимизации выпуклых функций. Оказывается, что существует довольно широкий класс задач на вершинно расположенных множествах, для которых это возможно [Стоян, 1988]. Это, в частности, множества перестановок и полиперестановок, некоторые классы размещений и полиразмещений, сочетаний и полисочетаний [Стоян, 1993].

Аппарат, применяемый при этом, - погружение комбинаторного множества в арифметическое евклидово пространство с дальнейшим рассмотрением множества точек пространства E и их выпуклой оболочки M и построением выпуклого продолжения $F(x)$ исходного полинома $f(x)$, т.е. функции, совпадающей с ним в точках E и выпуклой на комбинаторном многограннике M, в R_+^n или в R^n [Яковлев, 1994].

Таким образом исходная задача сводится к оптимизации выпуклой функции $F(x)$ на E, а эта задача, в свою очередь, может быть решена по-разному, в частности и двумя путями, учитывающими геометрические свойства E и M:

- первый подход применяется для комбинаторных множеств, расположенных на гиперсфере, и к которым относится абсолютное большинство из вышеперечисленных множеств, основан на релаксации условия комбинаторности и решении серии непрерывных задач на гиперсфере и комбинаторном многограннике [Стоян, 1989];
- второй подход основывается на отсутствии у вершинно расположенных множеств внутренних точек, носит название «метод комбинаторного отсечения» и состоит в решении серии условных непрерывных задач на многограннике [Емец, 1992].

В данной работе представлен алгоритм построения выпуклых продолжений полиномов, заданных на множестве полиперестановок, который использует изученные его свойства.

Основная часть

Рассмотрим n – элементное мультимножество $G = \{g_j\}_{j \in J_n}$ ($J_n = \{1,\ldots,n\}$) [Стоян, 1993]. Выделим в нем $L \geq 1$ подмультимножеств $G^{(l)}$, $l \in J_L$:

$$G = G^{(1)} \cup \ldots \cup G^{(L)},\ G^{(i)} \cap G^{(j)} = \varnothing,\ i \neq j \tag{1}$$

и будем представлять следующим образом:

$$G = \{G^{(l)}\}_{l \in J_L}. \tag{2}$$

Введем обозначение для мощности $G^{(l)}$:

$$n_l = \left|G^{(l)}\right|, l \in J_L,\ n = \sum_{l=1}^{L} n_l. \tag{3}$$

Введем в рассмотрение множества перестановок из мультимножеств $G^{(l)}$ $(l \in J_L)$ и полиперестановок из G как декартового их произведения, а также векторы мощностей мультимножеств $G^{(l)}$ и их основ $S\left(G^{(l)}\right)$, $l \in J_L$ [Стоян, 1993]:

$$\overline{n} = (n_1,\ldots,n_L),\ \overline{k} = (k_1,\ldots,k_L),\ k_l = \left|S(G^{(l)})\right|\ (l \in J_L), \tag{4}$$

т.о. $E_{n_l k_l}\left(G^{(l)}\right)$ – евклидовы комбинаторные множества (ЕКМ) n_l-перестановок с $G^{(l)}$ $(l \in J_L)$; (5)

$$E^L_{\overline{n}\overline{k}}(G) = E_{n_1 k_1}\left(G^{(1)}\right) \times \ldots \times E_{n_L k_L}\left(G^{(L)}\right) - \tag{6}$$

ЕКМ полиперестановок из мультимножеств G. Представим элемент полиперестановок (6)

$$x \in E^L_{\overline{n}\overline{k}}(G) \subset R^n \tag{7}$$

через элементы перестановок (5) - векторы

$$x^{(l)} \in E_{n_1 k_1}\left(G^{(1)}\right) \in R^{n_l},\ l \in J_L. \tag{8}$$

В соответствии с разбивкой (1) мультимножества G на подмультимножества выделим в векторе x вида (7) подвектора (8):

$$x = \{x^{(l)}\}_{l \in J_L}, \tag{9}$$

которые также будем называть группами переменных Γ_l $(l \in J_L)$.

Пусть I_l – множество номеров переменных группы Γ_l, т.е.

$$I_1 = \{1,\ldots,n_1\},\ I_2 = \{n_1+1,\ldots,n_1+n_2\},\ \ldots,\ I_L = \{n-n_L+1,\ldots,n\}. \tag{10}$$

Если ввести в рассмотрение величину, отображающую номера последней переменной группы $\Gamma_l: n_l^0 = \sum_{l'=1}^{l} n_{l'}$, $(l \in J_L)$, будем иметь:

$$I_l = J_{n_l^0} \setminus J_{n_{l-1}^0},\ l \in J_L,\ n_0^0 = 0,\ J_0 = \varnothing. \tag{11}$$

Теперь подвектора $x^{(l)}$ вектора x в записи (9) и $G^{(l)}$ в (2) будут представляться также в виде:

$$x^{(l)} = \{x_j\}_{j \in I_l},\ G^{(l)} = \{g_j\}_{j \in I_l},\ l \in J_L. \tag{12}$$

Будем считать, что элементы $G^{(l)}$ неоорицательные и упорядоченные по неубыванию, т.е.:

$$0 \le g_j \le g_{j+1}, \quad j \in I_l - 1, \; l \in J_L. \tag{13}$$

Рассмотрим произвольную функцию, определенную на ЕКМ E:

$$f(x), \; x \in M, \tag{14}$$

Поставим задачу поиска выпуклого продолжения (ВП) функции $f(x)$ с E в R_+^n, т.е. такой функции $F(x)$, которая бы была выпуклой в R_+^n и совпадала с $f(x)$ на E [Стоян, 1988], т.е.

$$F(x): \; \forall x \in R_+^n \; F(x) - \text{выпуклая}, \; f(x) \underset{E}{=} F(x). \tag{15}$$

Оказывается, что для вершинно расположенных ЕКМ, т.е. таких, что $E = vert(conv(E))$, это возможно [Яковлев, 1994].

В качестве функции (14) будем рассматривать полиномы, в качестве ЕКМ - множество полиперестановок

$$E = \mathrm{E}_{\overline{nk}}^{\mathrm{L}}(\mathrm{G}) \tag{16}$$

которое, как известно, вершинно расположено [Стоян, 1988], поскольку, с одной стороны, является подмножеством множества перестановок с G [Яковлев, 1994], а с другой - представляет собой декартово произведение множеств перестановок (см. (7)). Пусть m - степень полинома, т.е.

$$f(x) = P_m(x) = \sum_{i=1}^{h} a_i b_i f_i(x), \tag{17}$$

где h - количество слагаемых,

$$f_i(x) = \prod_{j=1}^{n} x_j^{r_{ij}}, \; a_i \in R, \; b_i = \{\pm 1\}, \; i \in J_h, \tag{18}$$

$$r_{ij} \ge 0, \; r_{ij} \in Z, \; i \in J_h, \; j \in J_n, \tag{19}$$

итак, r_{ij} – степень при переменной x_j в i-ом слагаемом функции (17).

Если обозначить через m_i – степень одночлена (18), будем иметь:

$$m_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}, \; i \in J_h, \tag{20}$$

$$m = \max_i m_i. \tag{21}$$

Во введенных обозначениях (11) одночлены $f_i(x)$ вида (18) также переписываются:

$$f_i(x) = f_i = \prod_{l=1}^{L} \prod_{j \in I_l} x_j^{r_{ij}}, \; i \in J_h. \tag{22}$$

Обозначим через $f_{il}\left(x^{(l)}\right)$ часть $f_i(x)$, которая является функцией от переменных группы Γ_l:

$$f_{il} = f_{il}\left(x^{(l)}\right) = \prod_{j \in I_l} x_j^{r_{ij}}, \; i \in J_h, \; \mathrm{l} \in \mathrm{J_L}. \tag{23}$$

Тогда, с учетом (23), выражения (20), (22) можно переписать в виде

$$f_i(x) = \prod_{l=1}^{L} f_{il}\left(x^{(l)}\right) \text{ или } f_i = \prod_{l=1}^{L} f_{il} \quad (i \in J_h), \tag{24}$$

$$m_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} = \sum_{l=1}^{L} \sum_{j \in I_l} r_{ij}\,,\ i \in J_h\,. \tag{25}$$

При построении ВП $F(x)$ функции (14) вида (17) существенно будем использовать:

А) свойства полиперестановок (16), в частности то, что симметричный полином постоянен не только на полиперестановках вообще, но и на каждой из групп Γ_l [Стоян, 1988], в том числе справедливо:

$$\forall r\ \prod_{j \in I_l} x_j^r \underset{E}{=} \prod_{j \in I_l} g_j^r\,,\ \ \sum_{j \in I_l} x_j^r = \sum_{j \in I_l} g_j^r,\ l \in J_L\,. \tag{26}$$

Если ввести обозначение

$$\prod_{j \in I_l} g_j^r = A_l^r,\ \sum_{j \in I_l} x_j^r = B_l^r\,, \tag{27}$$

(26) перепишется:

$$\prod_{j \in I_l} x_j^r \underset{E}{=} A_l^r\,, \sum_{j \in I_l} x_j^r \underset{E}{=} B_l^r\ ,\ l \in J_L\ , \tag{28}$$

откуда, в частности, имеем:

$$\forall\, l \in J_L, j^{(l)} \in I_l\ \ -x_{j^{(l)}}^r \underset{E}{=} \sum_{j' \in I_l, j' \neq j^{(l)}} x_{j'}^r - B_l^r,\ A_l\ = A_l^1 \underset{E}{=} \prod_{j \in I_l} x_j\,; \tag{29}$$

Б) представление произведения функций в следующем виде:

$$\pm f'(x) \cdot f''(x) = \frac{1}{2}\Big[\big(f'(x) \pm f''(x)\big)^2 - f'^2(x) - f''^2(x)\Big]. \tag{30}$$

Алгоритм нахождения выпуклого продолжения полинома

<u>Шаг 1</u>. **Выделение в полиноме $f(x) = P_m(x)$ отдельных слагаемых.**

Представляем полином (17) суммой одночленов $f_i(x)\ (i \in J_h)$ вида (18). Далее все шаги будем выполнять для каждого слагаемого по-отдельности.

<u>Шаг 2</u>. **Выделение в каждом слагаемом частей, отвечающих отдельным группам полиперестановок $\Gamma_l,\ l \in J_L$.**

Каждое слагаемое $f_i(x)$ вида (18) представляем произведением функций от переменных разных групп, т.е. формируем представление (24).

<u>Шаг 3</u>. **Снижение степеней слагаемых полинома.**

<u>Замечание 1</u>. Данный этап осуществляется, если по меньшей мере в одном одночлене (18) присутствуют все переменные хотя одной группы Γ_l, т.е.:

$$\exists i \in J_h, l \in J_L : \forall j \in I_l\ \ r_{ij} > 0\,. \tag{31}$$

Пусть

$$s_{il} = \min_{j \in I_l} r_{ij}\,,\ i \in J_h,\ \ l \in J_L\,, \tag{32}$$

тогда (31) переписывается

$$\exists i' \in J_h, l' \in J_L:\ \forall j \in I_{l'}\ s_{i'j} > 0\,. \tag{33}$$

Сформируем множества

$$I'L' = \{(i', l') : \forall j \in I_{l'}\ s_{i'j} > 0\}\ ,\ IL = J_h \times J_L, \overline{I'L'} = IL \setminus I'L'\ . \tag{34}$$

Осуществим переход:

$$r_{ij} \to r'_{ij} = r_{ij} - s_{il},\quad i \in J_h,\quad j \in I_l,\quad l \in J_L\ , \tag{35}$$

Учитывая (28) и (35), выражение (23) перепишем:

$$f_{il} = f_{il}\left(x^{(l)}\right) = \prod_{j \in I_l} x_j^{s_{il}} \prod_{j \in I_l} x_j^{r'_{il}} \underset{E}{=} A_l^{s_{il}} \cdot \prod_{j \in I_l} x_j^{r'_{il}} = A_l^{s_{il}} \cdot \prod_{j \in M_{il}} x_j^{r'_{il}} = A_l^{s_{il}} \cdot \overline{\overline{f}}_{il}\left(x^{(l)}\right) = A_l^{s_{il}} \cdot \overline{\overline{f}}_{il}\ , \tag{36}$$

где

$$M_{il} = \left\{ j \in I_l : r'_{ij} > 0 \right\} - \quad \text{множество номеров переменных,} \tag{37}$$

$$t_{il} = \left| M_{il} \right| < n_l - \tag{38}$$

количество переменных, оставшихся в части слагаемого f_{il} после шага 3 ($i \in J_h,\ \ l \in J_L$);

$$\overline{\overline{f}}_{il}\left(x^{(l)}\right) = \prod_{j \in M_{il}} x_j^{r'_{ij}} - \tag{39}$$

функция, сосредоточивающая произведение переменных группы Γ_l, присутствующих в каждом i-ом слагаемом ($i \in J_h,\ \ l \in J_L$).

Таким образом осуществлен переход

$$f_{il} = f_{il}\left(x^{(l)}\right) \underset{E}{\to} \overline{\overline{f}}_{il}\left(x^{(l)}\right) = \overline{\overline{f}}_{il}\ ,\ i \in J_h,\quad l \in J_L\ . \tag{40}$$

Обозначим через $\overline{\overline{A}}_i$ – уточненный коэффициент при переменных в i-ом слагаемом

$$\overline{\overline{A}}_i = a_i \prod_{l=1}^{L} A_l^{s_{il}}\ , \tag{41}$$

который, учитывая (13), будет неотрицательным ($i \in J_h$).

Таким образом от i-го слагаемого выражения (17) на E мы, в силу (40), перешли к новому:

$$a_i b_i f_i\,(x) \underset{E}{\to} \overline{\overline{A}}_i b_i \overline{\overline{f}}_i\,(x)\,, \tag{42}$$

где

$$\overline{\overline{f}}_i\,(x) = \prod_{l=1}^{L} \overline{\overline{f}}_{il}\left(x^{(l)}\right),\ i \in J_h\,, \tag{43}$$

соответственно от исходного полинома (17) осуществили переход.

$$f(x) \underset{E}{\to} \overline{f}\,(x) = \sum_{i=1}^{h} \overline{\overline{A}}_i b_i \overline{\overline{f}}_i\,(x). \tag{44}$$

<u>Замечание 2</u>. Для заданного $i \in J_h$ шаг 3 не производим, если выполнено: $\sum_{l=1}^{L} \min_{j \in I_l} \mathrm{r}_{\mathrm{ij}} = 0$.

<u>Замечание 3</u>. На данном этапе некоторые группы переменных могут исчезнуть, если $f_{il}\left(x^{(l)}\right)$ на E имеет постоянное значение, т.е.,

$$\exists i \in J_h, \mathrm{l} \in \mathrm{J_L} :\ f_{il}\left(x^{(l)}\right) \underset{E}{\to} \overline{\overline{f}}_{il}\left(x^{(l)}\right) = 1\ . \tag{45}$$

<u>Шаг 4</u>. **Определение количества групп полиперестановок в слагаемых**.

Очевидно, что в i-ом слагаемом $\bar{f}(x)$ вида (44) присутствуют элементы группы Γ_l ($i \in J_h$, $l \in J_L$), если степень одночлена $\bar{\bar{f}}_{il}$ вида (36) положительна, что происходит в случае непустоты множества M_{il} вида (37):

$$M_{il} \neq \varnothing. \tag{46}$$

Введем обозначение для множества групп переменных в каждом из слагаемых $\bar{f}(x)$ вида (44) с учетом (38):

$$N_i = \{l \in J_L : M_{il} \neq \varnothing\} = \{l \in J_L : t_{il} > 0\} \ (i \in J_h) \tag{47}$$

и их мощностей

$$T_i = |N_i|, \ \ i \in J_h. \tag{48}$$

Как видно, именно величины (48) определяют количество групп переменных, присутствующих в i-ом слагаемом (44).

<u>Замечание 4</u>. Если для заданного $i \in J_h$:

А) $T_i = 0$, i-ое слагаемое (44) представляет собой константу и не нуждается в дальнейших преобразованиях;

Б) выполнено

$$T_i = 1, \tag{49}$$

т.е. в слагаемом присутствует лишь одна группа переменных, переходим на шаг 6;

В) выполнено:

$$T_i > 1, \tag{50}$$

т.о., в слагаемом присутствуют несколько групп переменных, выполняем шаг 5 отделения групп переменных.

<u>Шаг 5</u>. **Отделение групп переменных.** На данном этапе каждое слагаемое представляется в виде произведения двух функций от разных групп переменных и производится преобразование этого произведения с целью получения алгебраического выражения, содержащего составляющие, зависящие лишь от одной группы полиперестановок.

Итак, представим множество (47) в форме:

$$N_i = \left\{l_{i_1}, \ldots, l_{i_{|N_i|}}\right\} = \left\{l_{i_t}\right\}_{t \in J_{T_i}}. \tag{51}$$

Как указано в замечании 4, данный шаг выполняется при условии (50), т.е. возможно разбиение множества (51) на два непустые множества:

$$N_i = N_i' \cup N_i'', \ \ i \in J_h, \tag{52}$$

$$N_i' = \left\{l_{i_1}, \ldots, l_{i_{\left[\frac{T_i+1}{2}\right]}}\right\} \neq \varnothing, \ N_i'' = \left\{l_{i_{\left[\frac{T_i+1}{2}\right]+1}}, \ldots, l_{i_{T_i}}\right\} \neq \varnothing, \ \ i \in J_h. \tag{53}$$

Каждую из функций $\bar{\bar{f}}_i(x)$ вида (43), для которых (50) выполнено, представляем в виде произведения двух функций $\bar{\bar{f}}_i'$ и $\bar{\bar{f}}_i''$:

$$b_i \bar{\bar{f}}_i = b_i \bar{\bar{f}}'_i \cdot \bar{\bar{f}}''_i = \pm \bar{\bar{f}}'_i \cdot \bar{\bar{f}}''_i \tag{54}$$

где

$$\bar{\bar{f}}'_i = \prod_{l \in N'_i} \bar{\bar{f}}_{il}\,,\; i \in J_h\,, \tag{55}$$

$$\bar{\bar{f}}''_i = \prod_{l \in N''_i} \bar{\bar{f}}_{il}\,,\; i \in J_h\,. \tag{56}$$

Для выражения (55) используем (30):

$$b_i \bar{\bar{f}}_i = \pm \bar{\bar{f}}'_i \cdot \bar{\bar{f}}''_i = \frac{1}{2}\left[\left(\bar{\bar{f}}'_i \pm \bar{\bar{f}}''_i\right)^2 - \bar{\bar{f}}'^2_i - \bar{\bar{f}}''^2_i\right],\; i \in J_h\,. \tag{57}$$

Теперь повторяем данный шаг для $\bar{\bar{f}}'_i, \pm\bar{\bar{f}}''_i, -\bar{\bar{f}}'^2_i, -\bar{\bar{f}}''^2_i$ и так далее, пока в выражении (52) остаются произведения нескольких функций, определенных на разных группах $\Gamma_l,\ \Gamma_{l'},\ l \neq l',\ l, l' \in J_L$, т.е. до выполнению условия типа (44) для N'_i, N''_i:

$$T'_i = T''_i = 1\,, \tag{58}$$

где $T'_i = \left|N'_i\right|, T''_i = \left|N''_i\right|$ - число групп переменных, присутствующих в функциях $\bar{\bar{f}}'_i,\ \bar{\bar{f}}''_i$ соответственно.

Шаг 6. **Отделение переменных одной группы.** На данном этапе по аналогии с шагом 5 осуществляются преобразование по получению алгебраического выражения с составляющими типа $a \cdot x_j^r,\ j \in I_n,\ r \in N$.

Таким образом шаги 4, 5 повторяем с целью отделения всех переменных в окончательном представлении. Шаг 6 выполняется по слагаемым и группам с несколькими переменными одной группы, т.е. для таких

$$i \in J_h,\;\; l \in J_L : \left|M_{il}\right| = t_{il} > 1\,. \tag{59}$$

Множества M_{il}, для которых выполнено (59), разбиваем подобно (52), (53) на два непустых множества:

$$M_{il} = M'_{il} \cup M''_{il}\,, \tag{60}$$

$$M'_{il} = \left\{ l^{(i)}_{j_1}, \ldots, l^{(i)}_{j_{\left[\frac{t_{il}+1}{2}\right]}} \right\} \neq \varnothing\,,\; M''_{il} = \left\{ l^{(i)}_{j_{\left[\frac{t_{il}+1}{2}\right]+1}}, \ldots, l^{(i)}_{j_{t_{il}}} \right\} \neq \varnothing\,. \tag{61}$$

По аналогии с (54) представляем каждую функцию f_{il} вида (36) в виде произведения двух функций от разных переменных Γ_l и заменяем это произведение по формуле (30):

$$b_i f_{il} = b_i f_{il}\left(x^{(l)}\right) = \pm f'_{il}\left(x^{(l)}\right) \cdot f''_{il}\left(x^{(l)}\right) = \pm f'_{il} \cdot f''_{il} = \frac{1}{2}\left[\left(f'_{il} \pm f''_{il}\right)^2 - f'^2_{il} - f''^2_{il}\right]. \tag{62}$$

Шаг 6 повторяем до тех пор, пока в полученном выражении остаются произведения нескольких переменных $x_j,\ x_{j'},\ j \neq j',\ j, j' \in I_l$.

Замечание 5. Если ввести обозначение:

$$t'_{il} = \left|M'_{il}\right|,\; t''_{il} = \left|M''_{il}\right|, \tag{63}$$

условие окончания итерационного процесса отделения переменных будет подобным до (58):

$$t'_{il} = t''_{il} = 1\,, \tag{64}$$

Шаг 7. **Замена нелинейных составляющих с отрицательным знаком.**

В полученном на предыдущих этапах выражении будет существенное количество составных с отрицательным знаком вида $-x^r_{j^{(l)}}$, $j^{(l)} \in I_l$, $r \in N \setminus \{1\}$, которые, очевидно, невыпуклы. Для них проводим эквивалентную на E замену выпуклой функцией по формуле (29).

Итак, поскольку сумма выпуклых функций, выпуклая функция в четной степени и степенная функция x^r ($x \in R^n_+, r \in N$) являются выпуклыми, полученная в результате выполнения данного алгоритма функция, будет выпуклой при $x \in R^n_+$, что и требовалось при построении искомого ВП с E, поскольку по условию (см. (13)) мы рассматриваем неотрицательную часть пространства R.

Выводы

Данная работа является продолжением исследований по построению выпуклых продолжений из множества полиперестановок в множество R^n_+ и предлагает алгоритм, совершенствующий приведенный в [Валуйськая, 2002], исходя из исследованных свойств полиперестановок, и который, в отличие от [Романова, 2002], содержит существенно меньшее количество составляющих, а их число не зависит от знаков слагаемых исходного полинома.

Задачи оптимизации на полиперестановках, в частности на перестановках, довольно часто встречаются в оптимальном планировании и геометрическом проектировании [Стоян, 1989], таким образом предложенный алгоритм должен помочь в решении этих задач, которые традиционно считаются достаточно сложными.

Следует также отметить, что чрезвычайно широкий класс булевых задач также относится к оптимизационных на вершинно расположенном множестве размещений с повторениями из 0 и 1. При построении ВП в этом случае предлагается комбинировать свойства данного ЕКМ приведенный выше алгоритм.

Библиография

[Стоян, 1988] Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев. Построение выпуклых и вогнутых функций на перестановочном многограннике // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 5. – С. 68–70.

[Яковлев, 1994] С. В. Яковлев. Теория выпуклых продолжений функций на вершинах выпуклых многогранников // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1994. – Т. 34. – № 7. – С. 1112–1119.

[Стоян, 1993] Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – К. : Ін-т системн. дослідж. освіти, 1993. – 188 с.

[Стоян, 1989] Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев, О. В. Паршин. Оптимизация квадратичных функций на множестве перестановок, отображенном в R^n // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 5. – С. 73–78.

[Емец, 1992] О. А. Емец. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании : учебн. пособ. – К. : УМК ВО, 1992. – 92 с.

[Валуйськая, 2002] О.О. Валуйськая, О. С. Пичугина, С.В. Яковлев. Выпуклые продолжения полиномов на комбинаторных множествах и их приложения // Радиоэлектроника и информатика. – 2002. – №2. – С.121-129.

[Романова, 2002] О. А. Валуйская, О. А. Емец, Н. Г. Романова. Выпуклое продолжение многочленов, заданных на полиперестановках, модифицированным методом Стояна-Яковлева // Журн. вычисл. математики и мат. физики. - 2002. – Т. 42. – № 4. – С. 591–596.

Информация об авторах

***Пичугина Оксана Сергеевна** – доцент кафедры прикладной математики, информатики и математического моделирования Полтавского национального технического университета имени Юрия Кондратюка, pichugina_os@mail.ru*