ОБОБЩЕНИЯ ПРИНЦИПОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАТРАТ ДЛЯ НЕЧЕТКИХ МОДЕЛЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Алексей Волошин, Василий Лавер

Abstract: *Рассматривается задача распределения затрат как задача коллективного принятия решений. Предлагаются «четкие» и «нечеткие» обобщения принципов распределения и построенные на их основе алгоритмы распределения, которые иллюстрируются численными примерами.*

Keywords: *задача распределения затрат, нечеткие модели и методы, принятие решений.*

ACM Classification Keywords*: I. Computing Methodologies – I.6. Simulation and modelling – I.6.5. Model Development –Modeling Methodologies.*

Введение

Проблема распределения ресурсов (природных, финансовых, трудовых и т.п.) как задача коллективного принятия решений [Волошин, Мащенко, 2010] в современном глобализованном мире на различных уровнях иерархии (индивидуальном, межличностном, общественном, региональном, государственном, межгосударственном) в настоящее время выходит на одно из первых мест в системе приоритетов человечества. В определенном смысле все остальные задачи являются «подзадачами», обеспечивающими «исходными данными» задачи распределения в различных постановках.

«Справедливое» распределение общественных затрат (или совместной прибыли) среди агентов является центральной темой теории кооперативных игр, которая многими исследователями считается одним из наиболее важных достижений в теории принятия решений («decision making») во второй половине прошлого столетия. В серии работ [Волошин, Лавер, 2009 - 2011] рассматривается одна из «классических» постановок [Волошин, Мащенко, 2010] и ее обобщения, в частности, на случай нечетких условий [Волошин, Лавер, 2010], а также применения предложенных моделей и методов для решения прикладных задач [Лавер, 2010, 2011]. В отличие от «аксиоматического» подхода, используемого в теории кооперативных игр, в этих работах применяется «алгоритмический» подход [Мулен, 1991], в соответствии с которым задаются принципы нахождения распределения и анализ полученных результатов предоставляется лицу, принимающему решение (ЛПР). В данной работе предлагаются некоторые обобщения процедур (алгоритмов) распределения, предложенных в [Волошин, Лавер, 2010], в частности, для моделей распределения в «кооперативной» постановке [Мулен, 1991].

Проблема распределения

Проблемой распределения называется тройка (*N*,*c*,*b*), где N – конечное множество агентов, |N| = n ≥ 2, ***c*** $(c \ge 0)$ – объем ресурса, который необходимо распределить, вектор $b = (b_i)_{i \in N}$ приписывает каждому агенту i его заявку b_i, причем

$$0 \le b_i,\ \forall i \in N\colon 0 \le c \le \sum_{i \in N} b_i. \qquad (1)$$

Решением проблемы распределения является вектор $x = (x_i)_{i \in N}$, который ставит в соответствие каждому агенту i его долю x_i, причем:

$$0 \le x_i \le b_i,\ \forall i \in N: \sum_{i \in N} x_i = c. \qquad (2)$$

Возможны несколько интерпретаций проблемы распределения [Мулен, 2001]. В данной статье, без уменьшения общности, рассматривается задача распределения затрат на производство неделимого общественного продукта стоимостью c, величины b_i для каждого агента i интерпретируются как запас денег (или, альтернативно, как ожидаемая выгода от пользования общественным продуктом).

Подушный и уровневый налоги

Рассмотрим два основных принципа распределения затрат [Волошин,Мащенко, 2010]:

- выравнивание затрат ($x_i = \frac{c}{n},\ \forall i \in N$);

- выравнивание прибылей ($x_i = b_i - \left(\sum_{i \in N} b_i - c \right) / n,\ \forall i \in N$).

Если нарушается условие (2), то при выравнивании затрат может возникнуть ситуация, когда некоторый агент должен будет заплатить больше своего запаса денег. Тогда он может отказаться от кооперации. При выравнивании затрат возможна ситуация, при которой некоторый агент будет субсидироваться другими. В этом случае все другие агенты могут отказаться выплачивать субсидии и коалиция распадется. В случае выполнения условий (2) принцип выравнивания затрат обобщается на подушный налог, а принцип выравнивания затрат – на уровневый [Волошин,Мащенко, 2010].

Четкие обобщения подушного и уровневого налогов

Предположим, что необходимо распределить затраты величиной ***c*** среди множества агентов $N = \overline{1,n}$, начальные запасы денег которых определяются вектором $b = (b_i)_{i \in N}$.

Рассмотрим подушный налог. Допустим, что существуют агенты, доля затрат которых равна их запасу денег. Обозначим это множество агентов через N_1. Также предположим, что существуют агенты, которые могут покрыть некоторую величину затрат так, чтоб «бедные» агенты не были вынуждены отдавать все свои деньги.

Установим два пороговых значения: α_i – сколько процентов от своей доли затрат согласен заплатить агент *i* ($i \in N_1$), у которого подушный налог (далее будем обозначать ПН) забирает всю сумму; β_j – на сколько процентов больше своей доли затрат согласен заплатить агент *j*, у которого после распределения по ПН еще остаются деньги (т.е. $j \in N_2 = N \setminus N_1$). В общем случае эти величины определяются с учетом денежных запасов агентов («прогрессивное налогообложение»).

Обозначим через $\hat{x}_i = b_i$ величину ПН для агента *i*, где $i \in N_1$, а через $\underline{x_i}$ - максимальное количество денег, которые агент *i* согласен отдать «без возражений», $\underline{x_i} = b_i(1 - \alpha_i)$. Конечная доля затрат агента *i* будет принадлежать отрезку $[\hat{x}_i, \underline{x_i}]$. Обозначим $\Delta_i = \hat{x}_i - \underline{x_i}$ «дефицит», который возникает при уступках агенту *i*. Суммарный дефицит обозначим $\Delta = \sum_{i \in N_1} \Delta_i$. Этот дефицит покрывается за счет агентов, ПН для которых меньше их запаса денег.

Рассмотрим множество N_2. Обозначим через $\hat{x}_j$ величину ПН для агента *j*, где $j \in N_2$, а через $\overline{x_j}$ - максимальное количество денег, которые агент *j* согласен отдать, $\overline{x_j} = \hat{x}_j(1 + \beta_j)$. Необходимо, чтобы выполнялось условие $\sum_{j\in N_2}\left(\overline{x_j}-\hat{x}_j\right)\geq\Delta$. В случае невыполнения этого условия необходимо изменить коэффициенты α_i, β_j так, чтобы данное неравенство удовлетворялось.

Аналогично для уровневого налога – обозначим через N_1 множество агентов, для которых доля затрат за уровневым налогом (УН) равна нулю. Возможно, для других агентов по некоторым соображениям является допустимым субсидирование этих агентов (например, в целях сохранения максимальной коалиции). Тогда α_i обозначает на сколько процентов от своего запаса денег агент i субсидируется ($i\in N_1$), β_j – на сколько процентов больше своей доли затрат согласен выделить агент j, у которого после распределения по УН остаются деньги ($j\in N_2=N\setminus N_1$), на субсидирование «бедных» агентов.

Обозначим через $\hat{x}_i$ величину субсидии для агента i, где $i\in N_1$, $\hat{x}_i=\alpha_i b_i$. Тогда $\Delta=\sum_{i\in N_1}\hat{x}_i$ - суммарная величина субсидий, которая должна покрываться агентами из множества $N_2=N\setminus N_1$.

Обозначим через $\hat{x}_j=b_j$ величину УН для агента j, где $j\in N_2$, а через $\overline{x_j}$ - максимальное количество денег, которые агент j согласен отдать, $\overline{x_j}=b_j\left(1+\beta_j\right)$. Необходимо, чтобы выполнялось условие $\sum_{j\in N_2}\overline{x_j}\geq\Delta+c$. В случае невыполнения этого условия необходимо изменить коэффициенты α_i, β_j так, чтобы данное неравенство выполнялось.

Для подушного налога предлагается распределять затраты в таком порядке:

1. Для агентов i $\left(i\in N_1\right)$ устанавливаем их доли затрат как $x_i=\underline{x_i}$.
2. Для агентов j $\left(j\in N_2\right)$ устанавливаем их доли затрат как $x_j=\hat{x}_j+x_j^\Delta$, где x_j^Δ определяется как доля затрат при распределении дефицита Δ, причем она может вычисляться как за подушным, так и за уровневым налогом.
3. Если в результате получаем допустимое распределение – процесс останавливается. Если нет – корректируем величины уступок.

Аналогичным образом поступаем и для уровневого налога:

1. Для агентов i $\left(i\in N_1\right)$ устанавливаем их доли затрат как $x_i=-\hat{x}_i$.
2. Для агентов j $\left(j\in N_2\right)$ устанавливаем их доли затрат как $x_j=\hat{x}_j+x_j^\Delta$, где x_j^Δ определяется как доля затрат при распределении дефицита Δ, причем она может вычисляться как за подушным, так и за уровневым налогом.
3. Если в результате получаем допустимое распределение – процесс останавливается. Если нет – корректируем величины уступок

То есть, возможны четыре варианта распределения: ПН+ПН (и первый и второй этапы вычисляются за подушным налогом), ПН+УН (на первом этапе находим подушный налог, на втором дефициты делим уровневым налогом), УН+ПН, УН+УН. Выбор конкретного механизма распределения остается за лицом, принимающим решения (ЛПР).

Нечеткие обобщения подушного и уровневого налогов

Рассмотрим проблему распределения с использованием аппарата нечетких множеств [Згуровский, Зайченко , 2011].

Предположим, что рассматривается распределение затрат в соответствии с подушным налогом. Предположим, что доля затрат агента $i\ (i \in N_1)$ является нечетким числом, функция принадлежности которого, используя предыдущие обозначения, имеет вид

$$\mu_i(x_i) = \begin{cases} 1, 0 \le x_i \le \underline{x}_i; \\ \dfrac{x_i - \hat{x}_i}{\underline{x}_i - \hat{x}_i}, \underline{x}_i \le x_i \le \hat{x}_i; \\ 0, \textit{в остальных случаях}. \end{cases}$$

То есть, $\mu_i(x_i)$ являются правосторонними нечеткими числами трапецеидального вида .

Аналогично, для агентов $j\ (j \in N_j)$ имеем:

$$\mu_j(x_j) = \begin{cases} 1, 0 \le x_j \le \hat{x}_j; \\ \dfrac{x_j - \overline{x}_j}{\hat{x}_j - \overline{x}_j}, \hat{x}_j \le x_j \le \overline{x}_j; \\ 0, \textit{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Тогда для поиска вектора распределения затрат $(x_1, x_2, ..., x_n)$ необходимо решить такую задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} &\lambda \to \max, \\ &\mu_k(x_k) \ge \lambda, \forall k \in N, \\ &\sum_{i \in N} x_i = c, \\ &0 \le \lambda \le 1, x_k \ge 0, k \in N. \end{aligned}$$

В результате получим вектор затрат $(x_1, x_2, ..., x_n)$ и степень удовлетворенности агентов этим распределением λ. Если данная величина не удовлетворяет ЛПР, то необходимо установить иные значения для величин уступок α_i, β_j.

Для уровневого налога, прежде всего, нужно найти величины субсидий. Далее следует распределить между агентами из множества N_2 величину $\Delta + c$ (при этом необходимо выполнение условия $\sum_{j \in N_2} \overline{x_j} \ge \Delta + c$). В результате получим задачу:

$$\begin{aligned} &\lambda \to \max, \\ &\mu_j(x_j) \ge \lambda,\ \forall j \in N_2, \\ &\sum_{j \in N_2} x_i = c + \Delta, \\ &0 \le \lambda \le 1, x_j \ge 0,\ j \in N_2. \end{aligned}$$

Ее решение - вектор затрат $(x_1, x_2, ..., x_n)$ и степень удовлетворенности агентов этим распределением λ. Если данная величина не удовлетворяет ЛПР, устанавливаются новые значения уступок α_i, β_j.

Случай нечеткой величины затрат

Предположим, что величина затрат $c=\left(\underline{c},\hat{c},\overline{c}\right)$ является нечетким числом треугольного вида. В этом случае необходимо рассмотреть две задачи – «задачу оптимиста» ($c\in\left[\underline{c},\hat{c}\right]$) и задачу «пессимиста» ($c\in\left[\hat{c},\overline{c}\right]$) [Згуровский, Зайченко, 2011]. Предположим, что рассматривается подушный налог (для уровневого налога обобщения выводятся аналогично). Задача оптимиста для ПН имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\lambda\to\max,\\
&\mu_k(x_k)\geq\lambda,\ \forall k\in N,\\
&\mu_c(c)\geq\lambda,\\
&\sum_{i\in N}x_i=c,\\
&0\leq\lambda\leq 1, x_k\geq 0, k\in N, c\in\left[\underline{c},\hat{c}\right].
\end{aligned}$$

Здесь $\mu_c(c)$ - функция принадлежности совместных затрат, функции принадлежности долей затрат агентов формируются с учетом того, что ПН рассчитывается для $\hat{c}$. Для задачи пессимиста необходимо пересчитать ПН для затрат равных $\overline{c}$. Сама же задача будет иметь аналогичный вид:

$$\begin{aligned}
&\lambda\to\max,\\
&\overline{\mu}_k(x_k)\geq\lambda,\ \forall k\in N,\\
&\mu_c(c)\geq\lambda,\\
&\sum_{i\in N}x_i=c,\\
&0\leq\lambda\leq 1, x_k\geq 0, k\in N, c\in\left[\hat{c},\overline{c}\right].
\end{aligned}$$

Здесь $\overline{\mu}_k(x_k)$ - новые функции принадлежности агентов.

Решив обе задачи, за окончательное распределение выбираем то, для которого λ максимально. Если же λ является одинаковым для обоих случаев, выбор распределения определяется ЛПР.

Числовой пример

Рассматривается *n*=5 агентов, *c*=30 - величина затрат, которую необходимо распределить. Запасы денег агентов соответственно равны 4, 12, 20, 24, 30 [Волошин, Мащенко, 2010]. Положим *α*=25%, *β*=20%.

Для случая четких обобщений подушного и уровневого налогов, получим такие данные:

Номер агента	1	2	3	4	5	*c*
Запас денег	4	12	20	24	30	
ПН	4	6,5	6,5	6,5	6,5	30
ПН+ПН	3	6,75	6,75	6,75	6,75	30
ПН+УН	3	6,5	6,5	6,5	7,5	30
УН	0	0	16/3	28/3	46/3	30
УН+ПН	-1	-3	20/3	32/3	50/3	30
УН+УН	-1	-3	16/3	28/3	58/3	30

Для нечетких обобщений (в частности, и для нечеткого *c*=(29,30,31)), будем иметь:

Номер агента	1	2	3	4	5	*c*	*λ*
Запас грошей	4	12	20	24	30		
ПН	4	6,5	6,5	6,5	6,5	30	
Нечеткий ПН	98/31	208/31	208/31	208/31	208/31	30	26/31
НПН+Нечеткая *c*	113/36	481/72	481/72	481/72	481/72	1075/36	31/36
УН	0	0	16/3	28/3	46/3	30	
Нечеткий УН	-1	-3	272/45	476/45	782/45	30	1/3
НУН+Нечеткое *c*	-1	-3	578/93	986/93	1598/93	30	16/31

Как для случая выравнивания затрат, так и для случая выравнивания прибыли, большие значения λ достигаются, если величина, которую необходимо распределить, является нечеткой. Это интуитивно можно объяснить тем, что чем «большая» нечеткость, тем больше у агентов имеется возможность варьировать свои доли затрат, и тем большей есть вероятность найти распределение, которое бы максимально всех устраивало.

Нечеткие обобщения *N*-ядра

При сведении задачи распределения к кооперативной игре и использовании эгалитарного принципа распределения (соответствующего *N*-ядру [Волошин, Мащенко, 2010]) необходимо вычислять или подушный, или уровневый налоги в соответствии со следующей теоремой Аумана-Машлера (1985 год).

Теорема. *N*-ядро соответствует таким долям затрат в зависимости от величины затрат **c**:

1) $$c \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i : \sum_{i=1}^{n} \min\left\{\alpha, \frac{b_i}{2}\right\} = c \Rightarrow x_i = \min\left\{\alpha, \frac{b_i}{2}\right\}, i = \overline{1,n}.$$

2) $$c \ge \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i : \sum_{i=1}^{n} \min\left\{\alpha, \frac{b_i}{2}\right\} = \sum_{i=1}^{n} b_i - c \Rightarrow x_i = b_i - \min\left\{\alpha, \frac{b_i}{2}\right\}, i = \overline{1,n}.$$

То есть, существуют два крайних случая – когда доли затрат (или прибыли) агентов рассчитываются как подушный (при $c \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i$) или же уровневый (при $c \ge \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i$) налог от вектора начальных запасов $\frac{1}{2}b = \left(\frac{1}{2}b_1, \frac{1}{2}b_2, ..., \frac{1}{2}b_n\right)$.

Между этими крайними случаями возможны другие, «компромиссные» распределения.

Рассмотрим нечеткое обобщение *N*-ядра при решении задачи распределения затрат. Множество агентов разбивается на две группы - N_1 и N_2, первой группе принадлежат агенты, которые хотели бы заплатить меньше того, что им приписывает *N*-ядро, во второй – агенты, согласные покрыть этот «дефицит».

Рассмотрим агентов первой группы. Обозначим $\underline{x_i}$ желательную долю затрат, а $\hat{x}_i$ величину доли затрат при *N*-ядре. Доли затрат агентов из этой группы будут правосторонними нечеткими числами $(\underline{x_i}, \hat{x}_i)$.

Для второй группы обозначим $\hat{x}_i$ соответственную величину *N*-ядра, а $\overline{x}_i$ – максимальную величину, которую агент согласен заплатить. Тогда долю затрат отдельного агента можно задать правосторонним нечетким числом $(\hat{x}_i, \overline{x}_i)$.

Таким образом, распределение затрат сводится к такой задаче линейного программирования, аналогичной рассмотренным:

$$\begin{aligned}
&\lambda \to \max,\\
&\mu_k(x_k) \geq \lambda,\ \forall k \in N_1, \mu_j(x_j) \geq \lambda,\ \forall j \in N_2,\\
&\sum_{i \in N} x_i = c,\\
&0 \leq \lambda \leq 1, x_i \geq 0, i \in N.
\end{aligned}$$

Задачу поиска оптимального решения предлагается решать в несколько этапов: на первом решается задача при исходных данных, получая распределение и соответствующий уровень *λ*. Если он не удовлетворяет ЛПР, то сужается область определения нечетких чисел, которые отвечают долям затрат агентов. Продолжаем процесс до тех пор, пока не будет достигнут оптимальный уровень.

Отметим, что при λ=1 доли затрат агентов будут равны долям, которые отводятся им *N*-ядром.

Рассмотрим пример. Имеется три агента, запасы денег которых равны соответственно 100, 200, 300. Необходимо распределить затраты величиной 100 единиц. *N*-ядро приписывает каждому агенту долю затрат, равную $33\frac{1}{3}$. Рассмотрим и крайние случаи (подушный и уровневый налоги при половинном запасе денег агентов):

Запасы денег	100	200	300
ПН($\frac{1}{2}$)	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$
УН($\frac{1}{2}$)	0	25	75
N-ядро	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$

Поскольку $c \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i$, то N-ядро совпадает с ПН($\frac{1}{2}$).

Для первого и второго агента величина УН($\frac{1}{2}$) является меньшей, чем величина *N*-ядра. Поэтому, для них желательней исход, при котором они будут платить УН($\frac{1}{2}$). Отнесем их в группу N_1. В группе N_2 будет только один агент – номер три. Для него УН($\frac{1}{2}$) выше величины *N*-ядра. Предположим, что это и есть максимальная сумма, которую он согласен заплатить.

Доли затрат агентов будут нечеткими правосторонними числами (0, $33\frac{1}{3}$), (25, $33\frac{1}{3}$), ($33\frac{1}{3}$, 75).

Подставив данные в вышеприведенную задачу линейного программирования, получим распределение затрат (14,79; 26,93; 58,28) при уровне λ=0,528. Предположим, что этот уровень не удовлетворяет ЛПР. Сделаем следующую итерацию, при нечетких долях агентов, равных (14,79; $33\frac{1}{3}$), (26,93; $33\frac{1}{3}$), ($33\frac{1}{3}$; 58,28). Получим распределение затрат (24,06; 30,14; 45,8) при уровне λ=0,5. Продолжаем, пока результат не удовлетворит ЛПР.

Выводы

Нечеткие обобщения модели и методы распределения затрат позволяют учесть нечеткость входных данных, свойственную реальным процессам (см., в частности, [Лавер, 2010], [Лавер, Маляр, 2011]).

Приведенные обобщения дают результаты отличные от четких аналогов, хотя и весьма близкие к ним. В конечном итоге выбор метода распределения остается за ЛПР.

Благодарности

Работа опубликована при финансовой поддержке проекта ITHEA XXI Института информационных теорій и приложений FOI ITHEA Болгария www.ithea.org и Ассоциации создателей и пользователей интеллектуальных систем ADUIS Украина www.aduis.com.ua.

Библиография

[Волошин, 2010] Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Моделі та методи прийняття рішень. - К.: ВТЦ "Київський університет", 2010.-336с.

[Voloshin, Laver, 2009] Voloshin O., Laver V. Collective Product Cost Sharing in Conditions of Managed Economy// International Book Series “Information Science and Computing”, 2009. – V. 3/2009, N15. – P. 200-205.

[Волошин, Лавер, 2009] Волошин О.Ф., Лавер В.О. Розподіл витрат при виробництві колективного продукту в умовах регульованої економіки - Науковий вісник Чернівецького університету, в. 493, Економіка.

[Лавер, 2010] Лавер В.О. Нечіткі моделі розподілу витрат на виробництво колективного продукту. - Схід: Аналітично-інформаційний журнал. – 2010. – № 7. – С.60-63.

[Волошин, Лавер, 2010] Волошин А., Лавер В. Нечеткие обобщения модели распределения затрат// Information Models of Knowledge, ITHEA, Kiev-Sofia, 2010.-P.215-219.

[Лавер, Маляр, 2011] Лавер В.О., Маляр М.М. Модель розподілу витрат на виробництво продукту особистого користування - Науковий вісник УжНУ, Серія: економіка, випуск 2 (34), 2011.

[Мулен, 1991] Мулен Э. Кооперативное принятие решений.-М: Мир, 1991.-464с.

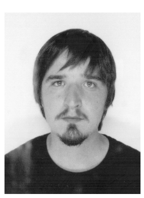
[Moulin, 2001] Moulin, Herve. Axiomatic Cost and Surplus Sharing, - Working Papers 2001-06, Rice University, Department of Economics, 2001.

[Згуровский, Зайченко 2011] Згуровский М.З., Зайченко Ю.П. Модели и методы принятия решений в нечетких условиях. – К.: Наукова думка, 2001. – 275 с.

Сведения об авторах

Волошин Алексей *– доктор технических наук, профессор, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина, 01017 Киев, ул. Владимирская, 64; e-mail: olvoloshyn@ukr.net*

Сфера научных интересов: *принятие решений, системы поддержки принятия решений, математическая экономика, экспертные системы, е-образование*



Лавер Василий *– Ассистент, Ужгородский национальный университет, математический факультет, Украина, 88000, Ужгород, ул. Университетская, 14, e-mail: v.laver@gmail.com*

Сфера научных интересов: *принятие решений, системы поддержки принятия решений, математическая экономика, нечеткие модели и методы*