

РЕКУРРЕНТНЫЙ АНАЛИЗ САМОПОДОБНЫХ И МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Людмила Кириченко, Алексей Барановский, Юлия Кобицкая

Аннотация: В работе проведен сравнительный рекуррентный анализ самоподобных и мультифрактальных стохастических временных рядов. Предложена методика построения рекуррентных диаграмм для фрактальных рядов, имеющих высокую степень неоднородности данных. Получены зависимости количественных мер рекуррентных диаграмм от фрактальных характеристик временного ряда. На основе предложенной методики проведен анализ некоторых медицинских, биологических и финансовых рядов.

Ключевые слова: самоподобные и мультифрактальные временные ряды, показатель Херста, рекуррентная диаграмма, рекуррентный анализ, мера сложности временного ряда.

ACM Classification Keywords: G.3 Probability and statistics - Time series analysis, Stochastic processes, G.1 Numerical analysis, G.1.2 Approximation - Wavelets and fractals.

Введение

Большинство динамических систем являются «сложными системами», что подразумевает многозвенную структуру с нелинейной обратной связью. К ним относятся процессы, присущие человеческому организму и природе, информационные, физические, технические и социальные процессы. На практике они представлены временными рядами (ВР), которые являются некоторой проекцией внутренних и внешних связей динамической системы. Одним из отражений сложности динамики системы является ее фрактальная структура.

В настоящее время стало общепризнанным, что многие ВР имеют долгосрочную зависимость и фрактальные свойства. Примером таких временных рядов являются медицинские и биологические сигналы, финансовые ряды, геофизические и геохимические сигналы, а также информационные трафики. Фрактальный анализ находит все большее практическое применение для исследования и прогнозирования ВР, однако фрактальные характеристики далеко не полностью отражают все сложность динамики систем.

Сравнительно новым методом исследования сложности динамики систем является построение рекуррентных диаграмм (РД). Рекуррентный анализ базируется на фундаментальном свойстве диссипативных динамических систем – рекуррентности (повторяемости состояний). Данный

метод анализа, основанный на представлении свойств процессов в виде геометрических структур, является инструментом для обнаружения скрытых зависимостей в наблюдаемых ВР. Первоначально предложенные в [Eckmann, 1987] методы рекуррентного анализа позволяют работать с рядами разных типов. Кроме того, преимущество используемого графического инструмента состоит в том, что он позволяет исследовать n -мерную траекторию фазового пространства посредством двумерного представления его рекуррентности и, следовательно, наглядно представлять динамическую картину в целом.

За прошедшие годы метод РД нашел широкое распространение для анализа стохастических временных рядов различной природы [Marwan N., 2008, Дербенцев В.Д., 2010, Владимирский, 2011, Кириченко, 2014, Baranovskyi, 2015]. Были разработаны количественные меры сложности структур РД [Marwan 2002, 2007, Zbilut, 2002, March, 2005]. Особое внимание уделялось хаотическим ВР, сложным колебательным процессам, зашумленным ВР и др. [Marwan 2007, Владимирский, 2011, Соловйов, 2003, Saprykin, 2015]. Однако до сих пор недостаточно внимания уделялось характерным особенностям рекуррентного анализа фрактальных ВР. Целью представленной работы является проведение сравнительного рекуррентного анализа самоподобных и мультифрактальных стохастических реализаций и разработка методики построения рекуррентных диаграмм для временных рядов, обладающих фрактальными свойствами.

Рекуррентный анализ

Главная идея применения методов нелинейной динамики к анализу траектории динамической системы состоит в том, что основная структура, содержащая в себе всю информацию о системе, а именно, аттрактор системы, может быть восстановлена через измерение только одной компоненты этой системы [Takens, 1981, Iwanski, 1998]. Широко используемая процедура Паккарда-Такенса позволяет восстановить фазовую траекторию динамической системы по одной реализации:

$$F(t) = [x(t), x(t + \tau), \dots, x(t + m\tau)], \quad (1)$$

где: $F(t)$ – m -мерное псевдофазовое пространство, $x(t)$ – временная реализация системы, τ – период запаздывания.

Рекуррентная диаграмма является проекцией m - мерного псевдофазового пространства на плоскость. Пусть точка x_i соответствует точке фазовой траектории $x(t)$, описывающей динамическую систему в m -мерном пространстве в момент времени $t = i$, для $i = 1, \dots, N$, тогда

рекуррентная диаграмма RP есть массив точек, где ненулевой элемент с координатами (i, j) соответствует случаю, когда расстояние между x_j и x_i меньше ε :

$$RP_{i,j} = \Theta(\varepsilon - \|x_i - x_j\|), \quad x_i, x_j \in R^m, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (2)$$

где ε – размер окрестности точки x_i , $\|x_i - x_j\|$ – расстояние между точками, $\Theta(\cdot)$ – функция Хэвисайда.

Анализ топологии диаграммы позволяет классифицировать наблюдаемые процессы: определять однородные процессы с независимыми случайными значениями; процессы с медленно меняющимися параметрами; периодические или осциллирующие процессы, соответствующие нелинейным системам и т.д. Численный анализ рекуррентных диаграмм позволяет вычислять меры сложности структур рекуррентных диаграмм, такие как мера рекуррентности, мера детерминизма, мера энтропии и др.

Мера рекуррентности (recurrence rate, RR)

$$RR = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N RP_{i,j}^\varepsilon, \quad (3)$$

показывает плотность рекуррентных точек, просто подсчитывая их. Данная мера показывает вероятность нахождения рекуррентной точки в РД (вероятность повторения состояния).

Следующая мера рассматривает диагональные линии. Частотное распределение длин l диагональных линий в RP $P^\varepsilon(l) = \{l_i; i = 1 \dots N_l\}$, где l_i – длина i -й диагональной линии, N_l – количество диагональных линий (каждая линия считается только один раз). Стохастические ВР могут порождать очень короткие диагонали либо вообще не порождать их, в то время как детерминистские процессы дают длинные диагонали и малое количество отдельных рекуррентных точек. Таким образом, отношение рекуррентных точек

$$DET = \frac{\sum_{l=l_{min}}^N l P^\varepsilon(l)}{\sum_{i,j}^N R_{i,j}^\varepsilon(l)}, \quad (4)$$

называется мерой детерминизма (determinism, DET) или предсказуемости системы. Следует отметить, что эта мера не имеет значения реального детерминизма процесса. При $l_{min} = 1$ выполняется отношение $DET = RR$.

Диагональные структуры показывают время, в течение которого участок траектории подходит достаточно близко к другому участку траектории. Таким образом, эти линии позволяют судить о расхождении элементов траектории. Средняя длина диагональных линий

$$L = \frac{\sum_{l=l_{\min}}^N l P^e(l)}{\sum_{l=l_{\min}}^N P^e(l)} \quad (5)$$

- это среднее время, в течение которого два участка траектории проходят близко один к другому, и может рассматриваться как среднее время предсказуемости.

Мера энтропии (entropy. ENTR) соотносится с энтропией Шеннона (Shannon) частотного распределения длин диагональных линий

$$ENTR = -\sum_{l=l_{\min}}^N p(l) \ln p(l), \text{ где } p(l) = \frac{P^e(l)}{\sum_{l=l_{\min}}^N P^e(l)} \quad (6)$$

и отражает сложность детерминистской составляющей в системе.

Рассмотрим точку траектории x_i и множество связанных с ней рекуррентных точек, формирующих вертикальные структуры на RP . Обозначим $P_i(v) = \{v_k; k=1, 2, \dots, K\}$ множество длин вертикальных структур и определим распределение длин вертикальных линий $P^e(v)$ для всего RP в целом.

Мера замирания (laminarity, LAM)

$$LAM = \frac{\sum_{v=v_{\min}}^{\tilde{N}} v P^e(v)}{\sum_{i,j}^N RP_{i,j}^e} \quad (7)$$

определяется отношением количества рекуррентных точек, образующих вертикальные линии, к общему количеству рекуррентных точек. Величина LAM характеризует наличие состояний замирания системы (т.е. когда движение системы по фазовой траектории останавливается или продвигается очень медленно). Средняя длина вертикальных структур

$$TT = \frac{\sum_v^{\tilde{N}} v P^e(v)}{\sum_{i,j}^N P^e(v)} \quad (8)$$

называется мерой времени остановки (trapping time, TT) и характеризует среднее время, которое система может провести в окрестности определенного состояния.

Самоподобные и мультифрактальные временные ряды

Задачи современной нелинейной физики, радиоэлектроники, теории управления, обработки изображений, требуют разработки и применения новых математических моделей, методов и алгоритмического обеспечения анализа данных. Как показали многочисленные исследования, многие стохастические процессы в природе и технике обладают долгосрочной зависимостью и

фрактальной структурой. Одними из первых реальных стохастических процессов, у которых были обнаружены самоподобные свойства, были информационные потоки данных в телекоммуникационных сетях. Существует большое количество публикаций, посвященных анализу самоподобных и мультифрактальных свойств трафика и их влияния на функционирование и качество обслуживания телекоммуникационной сети (см., например, [Шелухин, 2011]). Другим примером фрактальных стохастических структур являются современные финансовые рынки. Анализируя динамику возникновения участков с различной фрактальной структурой, можно диагностировать и прогнозировать нестабильные состояния (кризисы) рынка [Peters, 1996, Соловьев, 2015]. В последние годы многочисленные исследования показали, что многие биоэлектрические сигналы обладают фрактальной структурой [Stanley, 1999]. Отчетливые изменения фрактальных характеристик кардио- и энцефалограмм проявляются при различных заболеваниях, при изменении умственной и физической нагрузки на организм. Фрактальный анализ биоэлектрических сигналов может являться основой для проведения статистических исследований, что позволит сформулировать методики, которые будут значимы и для клинической практики.

Самоподобие случайных процессов заключается в сохранении вероятностных характеристик при изменении масштаба времени. Стохастический процесс $X(t)$ является самоподобным с параметром H , если процесс $a^{-H}X(at)$ описывается теми же законами конечномерных распределений, что и $X(t)$:

$$\text{Law}\{a^{-H}X(at)\} = \text{Law}\{X(t)\}, \quad \forall a > 0. \quad (9)$$

Параметр H , $0 < H < 1$, называемый показателем Херста, представляет собой степень самоподобия процесса. Наряду с этим свойством, показатель $H > 0.5$ характеризует меру долгосрочной зависимости стохастического процесса. Это означает, что если ВР в течении какого-то времени возростал (убывал), то с вероятностью, близкой к показателю Херста, ряд сохранит эту тенденцию в течение аналогичного промежутка времени [Feder, 1988]. Начальные моменты самоподобного случайного процесса можно выразить как $M\left[|X(t)|^q\right] = C(q) \cdot t^{qH}$, где величина $C(q) = M\left[|X(1)|^q\right]$.

В сравнении с самоподобными процессами (9) мультифрактальные процессы проявляют более сложное скейлинговое поведение:

$$\text{Law}\{X(at)\} = \text{Law}\{\mathcal{M}(a) \cdot X(t)\}, \quad a > 0, \quad (10)$$

где $\mathcal{M}(a)$ – случайная функция, независимая от $X(t)$. В случае самоподобия процесса $\mathcal{M}(a) = a^H$.

Для моментов мультифрактальных процессов выполняется отношение $M\left[|X(t)|^q\right] = c(q) \cdot t^{qh(q)}$, где $c(q)$ – некоторая детерминированная функция; $h(q)$ – обобщенный показатель Херста, являющийся в общем случае нелинейной функцией. Значение $h(q)$ при $q=2$ совпадает со значением степени самоподобия H . Для монофрактальных процессов обобщенный показатель Херста не зависит от параметра q : $h(q) = H$. [Reidi, 2002].

Мультифрактальные объекты являются статистически неоднородными самоподобными объектами. Для мультифрактальных ВР статистическая неоднородность объекта выражается в неоднородности распределения данных ряда, т.е. наличии тяжелых хвостов функции плотности распределения вероятностей ВР. Для моделирования неоднородных ВР удобно использовать математические модели, основанные на использовании устойчивых случайных величин.

Модели монофрактальных и мультифрактальных процессов

Фрактальное броуновское движение [Feder, 1988]. Одной из наиболее известных и простых моделей стохастической динамики, обладающих монофрактальными свойствами, является фрактальное броуновское движение (ФБД), которое нашло широкое применение в физике, химии, биологии, экономике и теории информационного трафика.

Гауссовский процесс $X(t)$ называется фрактальным броуновским движением с параметром H , $0 < H < 1$, если приращения случайного процесса $\Delta X(\tau) = X(t + \tau) - X(t)$ имеют распределение вида:

$$P(\Delta X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0\tau^H} \cdot \int_{-\infty}^x \text{Exp}\left[-\frac{z^2}{2\sigma_0^2\tau^{2H}}\right] dz, \quad (10)$$

где σ_0 – коэффициент диффузии. ФБД с параметром $H=0,5$ совпадает с классическим броуновским движением. Приращения ФБД называются фрактальным гауссовским шумом (ФГШ). На рис.1 представлены реализации ФБД и ФГШ, построенные при значениях показателя Херста $H = 0.3, 0.5, 0.8$.

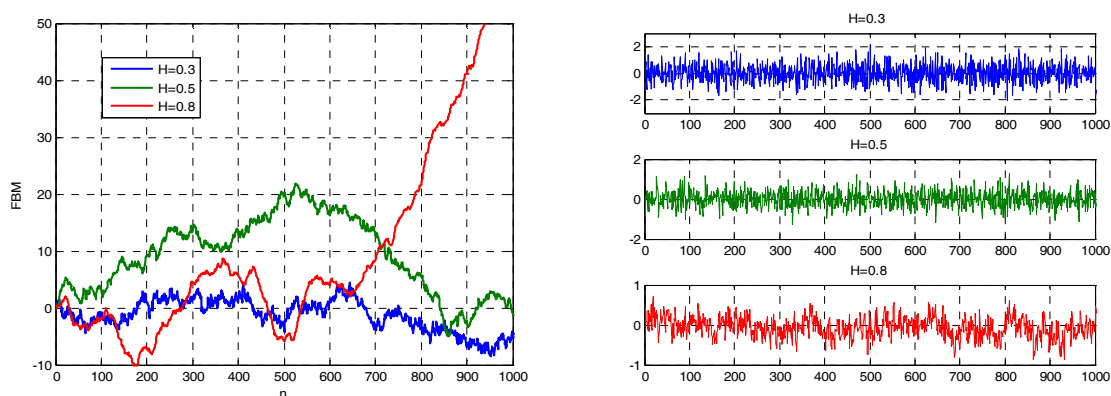


Рисунок 1. Реализации ФБД (слева) и ФГШ (справа) для разных значений H

Фрактальное движение Леви [Cont R., 2004, Stoev S., 2004]. Случайная величина X называется α – устойчивой, если для любых двух положительных чисел a и b найдется число $c > 0$ такое, что $\text{Law}(aX_1 + bX_2) = \text{Law}(cX)$, где $\text{Law}(\cdot)$ обозначает закон распределения, X_1 и X_2 – независимые случайные величины. В этом случае существует такое $\alpha \in (0, 2]$, не зависящее от a и b , что выполняется равенство $c^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$.

Параметр α называется индексом устойчивости и определяет, насколько выражен тяжелый хвост распределения. При $0 < \alpha < 2$ случайные величины имеют бесконечную дисперсию, а при $0 < \alpha \leq 1$ обладают бесконечным математическим ожиданием. Функции плотности распределений устойчивых случайных величин обладают хвостами, спадающими по степенному закону (тяжелыми хвостами).

Стохастический процесс $X(t)$ является α – устойчивым ординарным движением Леви, если он обладает стационарными независимыми α – устойчивыми приращениями. Такой процесс является самоподобным с параметром $H = 1/\alpha$.

Фрактальное движение Леви (ФДЛ) является самоподобным и устойчивым процессом со стационарными приращениями и бесконечным интервалом корреляции. Такой процесс определяется двумя основными параметрами: показателем Херста H и индексом устойчивости α . Фрактальное движение Леви является обобщением фрактального броуновского движения, где приращениями являются случайные величины с «тяжелыми хвостами». На рис. 2 приведены типичные реализации ФДЛ и его приращений с показателем Херста $H = 0.6$ (слева) и $H = 0.9$ (справа). Индекс устойчивости в обоих случаях $\alpha = 1.5$.

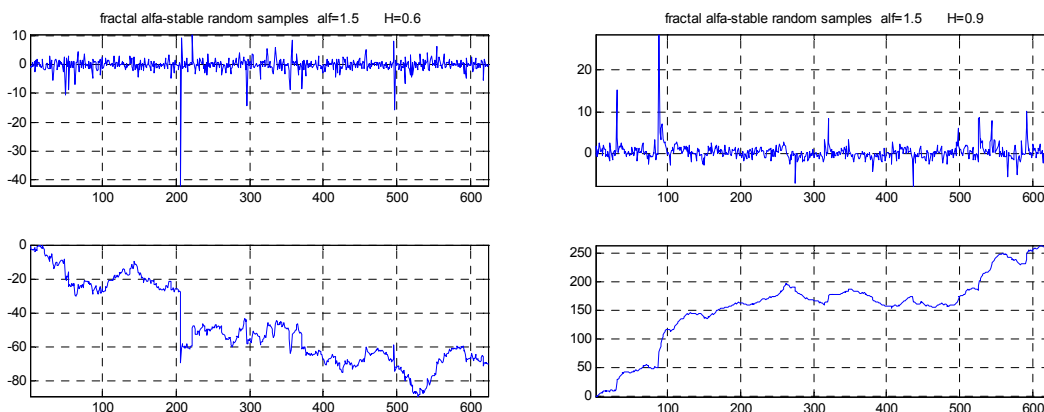


Рисунок 2. Реализации ФДЛ для $H = 0.6$ (слева) и $H = 0.9$ (внизу), $\alpha = 1.5$

Методика проведения численного эксперимента

Большое значение при изучении динамики временных рядов и, в частности для проведения рекуррентного анализа, имеет свойство формирования ВР: построен ли ВР по кумулятивному принципу, либо он является рядом приращений. Типичным примером кумулятивных ВР являются финансовые ряды, которые показывают, как изменяется цена в каждый момент времени. Моделями таких рядов являются реализации ФБД или ФДЛ. Рядами приращений в данном примере являются ряды изменения цен – доходности. Моделями таких рядов являются реализации ФГШ или ряды устойчивых случайных величин. Кумулятивные ряды в большинстве случаев являются нестационарными и обладают различными трендами.

Для того, чтобы проводить сравнительный рекуррентный анализ разных ВР, необходимо провести определенную нормировку этих рядов, для того чтобы выбрать одинаковые параметры для построения рекуррентных диаграмм. Наиболее популярными являются нормировки следующих видов:

$$X_{norm} = \frac{X - \bar{X}}{X_{max} - X_{min}} \text{ или } X_{norm} = \frac{X - \bar{X}}{S_X}, \quad (11)$$

где $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – исследуемый ряд.

Следующим шагом в построении диаграммы является выбор метрики, по которой считается расстояние между точками. Наиболее популярной являются евклидова (форма окрестности – круг радиуса ε) и максимальная норма (форма окрестности – квадрат со стороной 2ε). Во многих случаях выбор нормы не является принципиальным, но для каждой конкретной задачи имеет смысл поэкспериментировать. При анализе ВР очевидным является факт, что для однородных рядов, где фазовое пространство является достаточно плотно заполненным, подходящей будет евклидова норма, а в случае неоднородных, резко изменяющихся рядов, для

выявления скрытых корреляций и тенденций более уместен выбор максимальной нормы, для которой окрестность имеет большую площадь.

Одной из первостепенных задач при построении рекуррентной диаграммы является выбор величины окрестности ε . На практике величина ε выбирается в диапазоне 10% от значения S_x для стационарных данных, которыми считаются ряды приращений. В случае использования нестационарных данных, в частности, кумулятивных ВР, величина ε может уменьшаться до 1% [Zbilut 1992].

Выбор ε в зависимости от среднеквадратического отклонения ВР вполне оправдан для однородных рядов. Однако в случае ВР, имеющего большие выбросы, что характерно для мультифрактальных ВР (см. рис. 2), средние величины будут завышенными, что приведет к завышенному значению ε . Соответственно изменяется не только внешний вид, но и количественные рекуррентные параметры, что приводит к некорректному сравнительному анализу ВР. Поэтому в данной работе при вычислении среднего квадратического значения предложено использовать вместо среднего медиану, которая является более устойчивой величиной, чем среднее арифметическое.

В табл. 1 представлены средние квадратические и медианные значения отклонений, посчитанные по выборочным данным нормированного ФДЛ для разных значений индекса устойчивости α . Длина ВР составляла 1000 значений, показатель Херста $H = 0.7$. Очевидно, что во всех случаях, особенно для рядов приращений, медианное отклонение меньше, чем среднее квадратическое, и разрыв возрастает с увеличением величины α .

Таблица 1. Средние квадратические и медианные значения отклонений для ФДЛ

| α | ФДЛ (кумулятивный ряд) | | ФДЛ (ряд приращений) | |
|----------|------------------------|-----------|----------------------|-----------|
| | S | S_{med} | S | S_{med} |
| 1,8 | 0,26 | 0,17 | 0,06 | 0,03 |
| 1,6 | 0,27 | 0,16 | 0,04 | 0,01 |
| 1,4 | 0,26 | 0,18 | 0,025 | 0,003 |
| 1,2 | 0,19 | 0,11 | 0,03 | 0,001 |

На рис.3 показаны рекуррентные диаграммы, построенные для ФДЛ ($H = 0.7, \alpha = 1.6$) для случая, когда окрестность ε выбиралась стандартным методом (а) и с помощью медианного

расчета (б). В первом случае окрестность больше, потому что сильно зависит от величины выбросов.

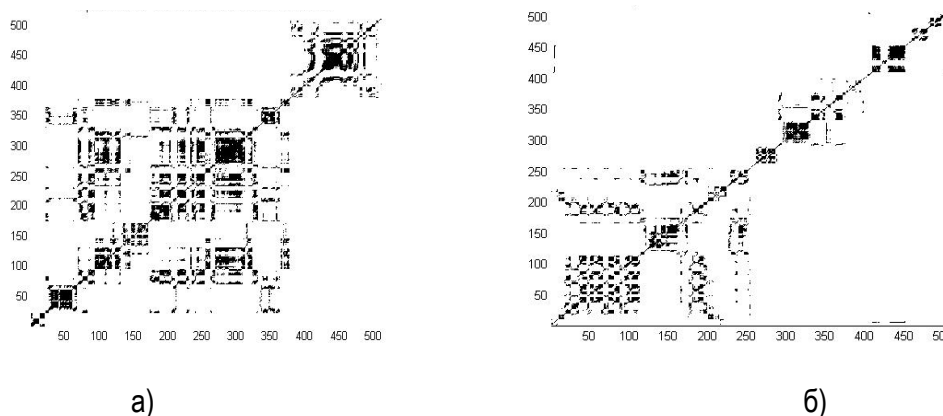


Рисунок 3. РД для ФДЛ: ε выбиралось стандартным методом (а) и с помощью медианного расчета (б)

Для сравнения в табл. 2 рассмотрены средние квадратические и медианные значения отклонений для ФБД и ФГШ. Хотя в случае нормального распределения теоретические значения математического ожидания и медианы совпадают, для выборочных реализаций ограниченной длины (в данном случае-1000 значений) медианное отклонение также меньше, чем среднее квадратическое. Показатель Херста $H = 0.7$.

Таблица 2. Средние квадратические и медианные значения отклонений для ФБД

| ФБД | | ФГШ | |
|------|-----------|------|-----------|
| S | S_{med} | S | S_{med} |
| 0.26 | 0.17 | 0.15 | 0.1 |

При проведении нижеописанных исследований РД были использованы максимальная норма и медианное отклонение.

Результаты исследований модельных данных

Проведенный в работе рекуррентный анализ выявил сильные различия, как в визуальной топологии, так и в численных характеристиках реализаций фрактальных процессов. Во всех случаях проявляется определенная зависимость структуры и количественных характеристик РД от степени самоподобия. Ниже представлены типичные реализации и диаграммы для

кумулятивных рядов и приращений ФБД и ФДЛ с разными показателями Херста и индексами устойчивости. В таблицах приведены значения количественных характеристик РД, усредненные по реализациям длиной 1000 значений.

Реализации фрактального броуновского движения. На рис 4 приведены типичные реализации и РД для ФГШ с показателем Херста $H=0.6$ (слева) и $H=0.9$ (справа). При возрастании показателя Херста проявляется неравномерная структурированность фазового пространства, которая отсутствует для рядов с параметром Херста, близким к 0.5.

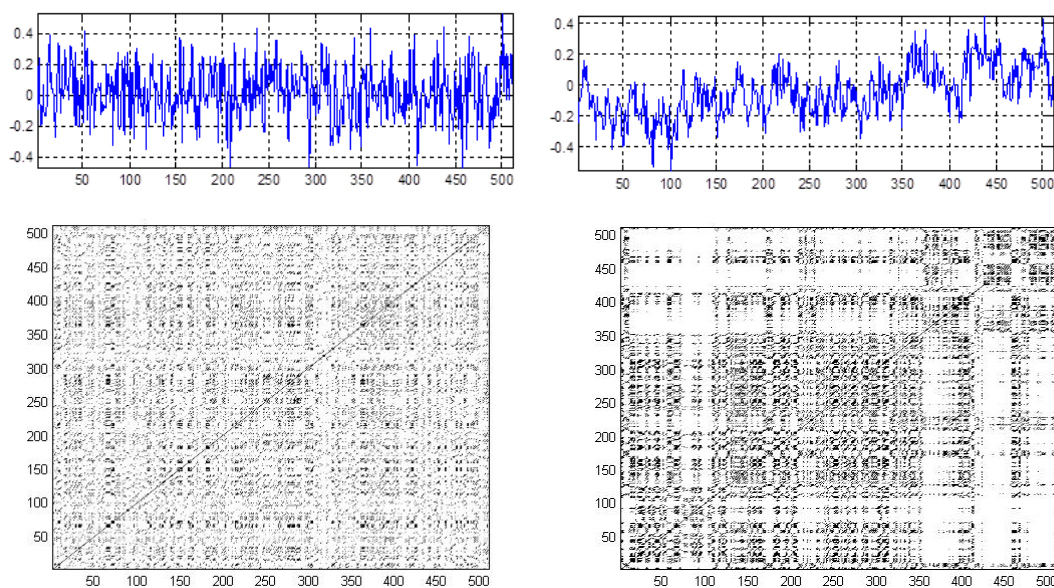


Рисунок 4. Реализации и РД для ФГШ при $H=0.6$ (слева) и $H=0.9$ (справа).

На рис. 5 приведены реализации и диаграммы ФБД с показателем Херста $H=0.6$ (слева) и $H=0.9$ (справа). Реализации с большим параметром Херста более персистентны, они имеют гораздо меньшую изрезанность. На РД реализации с большой персистентностью выстраиваются вдоль диагональной линии, в то время как для рядов с небольшим параметром Херста рекуррентные точки заполняют большую область фазового пространства.

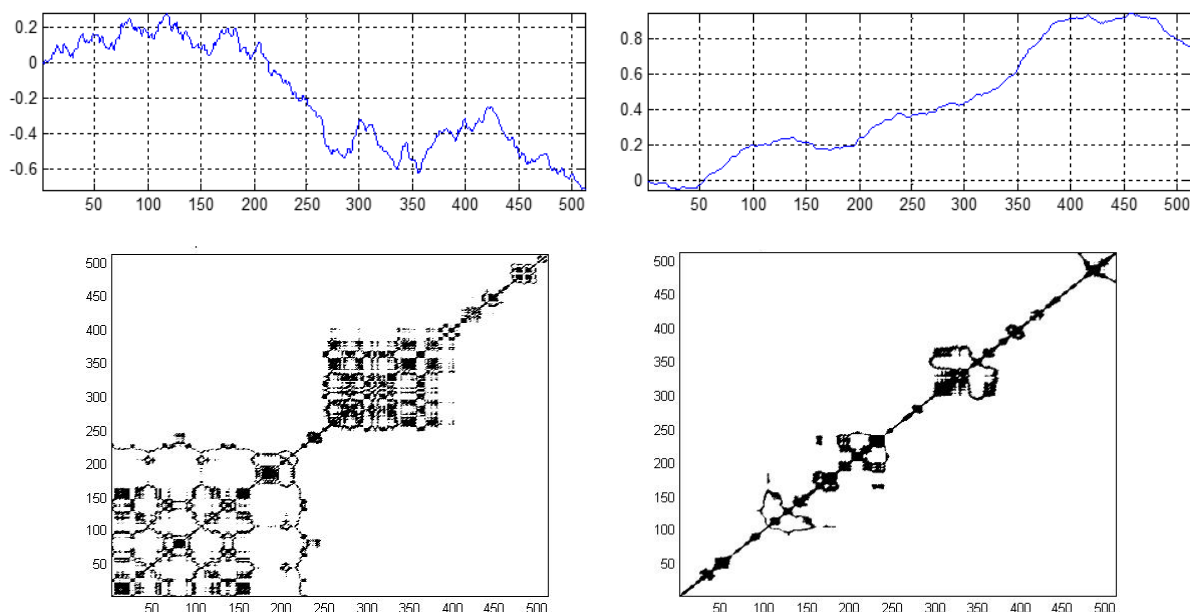


Рисунок 5. Реализации и РД для ФБД при $H = 0.6$ (слева) и $H = 0.9$ (справа).

Структурные различия нашли свое отражение в количественных характеристиках. В табл.3 представлены средние значения характеристик РД (левая колонка для ряда приращений, а правая для кумулятивного ряда), демонстрирующие, что с возрастанием показателя Херста увеличиваются детерминистические составляющие, а следовательно предсказуемость ВР. Интересно отметить, что хотя плотность точек (RR) у реализаций ФБД на порядок ниже, чем у ФГШ, средняя длина диагональных линий (L) и среднее время, которое система может провести в определенном состоянии (TT) в несколько раз больше. Мера детерминизма (Det) в обоих случаях близка к показателю Херста H и может быть использована как дополнительный критерий самоподобия ВР.

Таблица 3. Количественные характеристики РД для ФБМ

| H | RR | | Det | | L | | $ENTR$ | | LAM | | TT | |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|--------|
| | ФГШ | ФБД | ФГШ | ФБД | ФГШ | ФБД | ФГШ | ФБД | ФГШ | ФБД | ФГШ | ФБД |
| 0,6 | 0,188 | 0,027 | 0,615 | 0,684 | 2,763 | 3,866 | 1,206 | 1,826 | 0,476 | 0,824 | 2,659 | 4,010 |
| 0,7 | 0,192 | 0,035 | 0,696 | 0,752 | 2,821 | 8,371 | 1,254 | 2,871 | 0,544 | 0,880 | 2,776 | 9,547 |
| 0,8 | 0,204 | 0,044 | 0,780 | 0,858 | 2,937 | 15,959 | 1,342 | 3,330 | 0,616 | 0,910 | 2,898 | 16,352 |
| 0,9 | 0,228 | 0,049 | 0,889 | 0,937 | 3,180 | 23,292 | 1,508 | 3,831 | 0,717 | 0,937 | 3,207 | 22,235 |

Реализации фрактального движения Леви. ФДЛ характеризуется двумя параметрами – показателем Херста и индексом устойчивости. Поэтому необходимо исследовать зависимость количественных характеристик диаграмм от обоих параметров. На рис. 6 приведены типичные реализации приращений ФДЛ с показателем Херста $H = 0.6$ (вверху) и $H = 0.9$ (внизу). В левой части рис.6 представлены реализации с индексом устойчивости $\alpha = 1.8$, справа – реализации с индексом $\alpha = 1.2$.

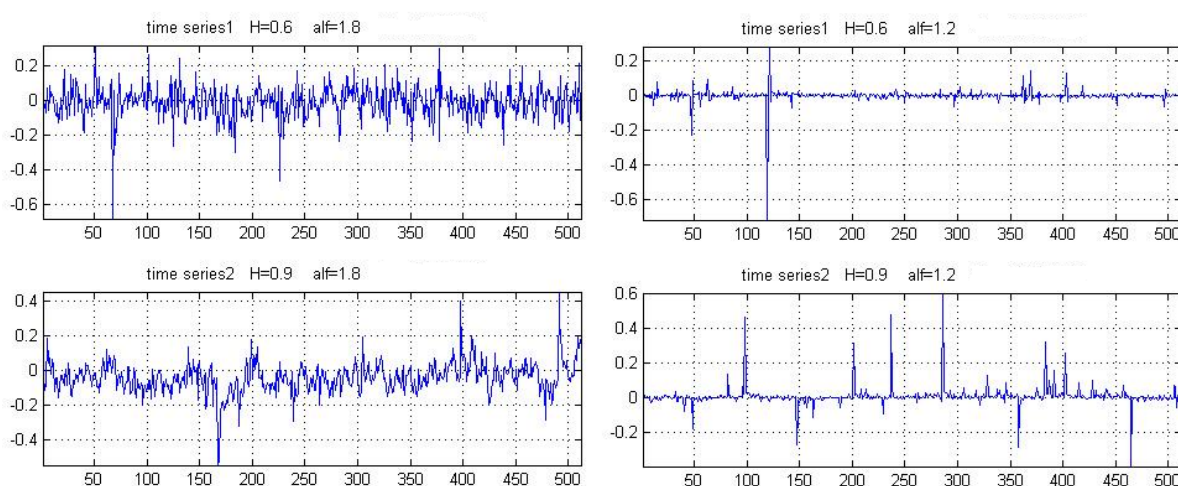


Рисунок 6. Реализации приращений ФДЛ для $H = 0.6$ (вверху) и $H = 0.9$ (внизу), $\alpha = 1.8$ (слева) и $\alpha = 1.2$ (справа).

На рис. 7 приведены РД для приращений ФДЛ с показателем Херста $H = 0.6$ (слева) и $H = 0.9$ (справа) и значением индекса устойчивости $\alpha = 1.2$. При возрастании показателя Херста проявляется неравномерная структурированность фазового пространства, которая отсутствует для рядов с параметром Херста, близким к 0.5. Поскольку РД построены с помощью медианного отклонения, существенных различий в РД для реализаций с разными значениями α не наблюдается.

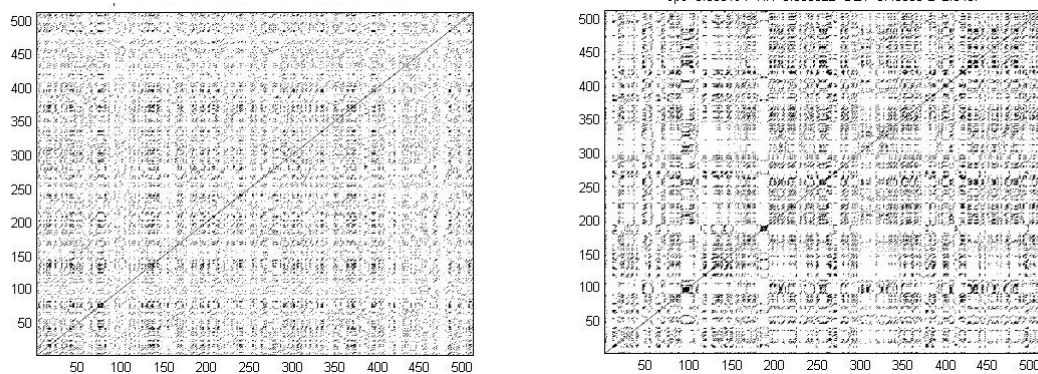


Рисунок 7. РД для приращений ФДЛ при $H = 0.6$ (слева) и $H = 0.9$ (справа).

На рис. 8 приведены типичные реализации ФДЛ с показателем Херста $H = 0.6$ (вверху) и $H = 0.9$ (внизу). В левой части рис.8 представлены реализации с индексом устойчивости $\alpha = 1.8$, справа – реализации с индексом $\alpha = 1.2$.

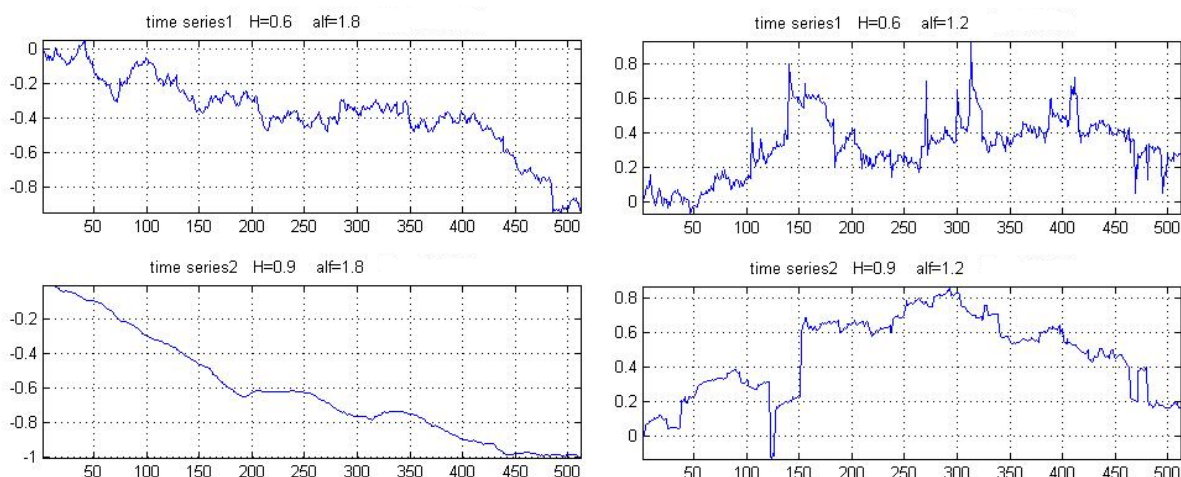


Рисунок 8. Реализации ФДЛ для $H = 0.6$ (вверху) и $H = 0.9$ (внизу), $\alpha = 1.8$ (слева) и $\alpha = 1.2$ (справа).

На рис. 9 приведены РД для ФДЛ с показателем Херста $H = 0.6$ (слева) и $H = 0.9$ (справа) и значением индекса устойчивости $\alpha = 1.2$. Реализации с большим параметром Херста имеют гораздо меньшую изрезанность. На РД реализации с большим показателем Херста выстраиваются вдоль диагональной линии, в то время как для рядов с параметром Херста, близким к 0.5 рекуррентные точки заполняют большую часть фазового пространства. Поскольку РД построены с помощью медианного отклонения, существенных различий в РД для реализаций с разными значениями α не наблюдается.

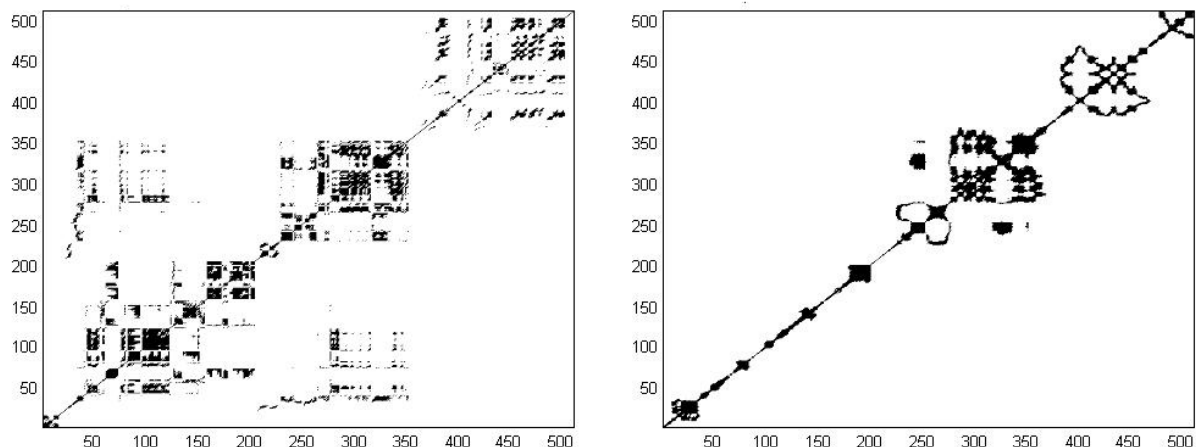


Рисунок 9. РД для ФДЛ при $H = 0.6$ (слева) и $H = 0.9$ (справа).

Количественные характеристики РД показаны в табл.4 (левая колонка для ряда приращений, а правая для кумулятивного ряда). Очевидны те же основные зависимости, которые характерны для ФБД. С возрастанием показателя Херста увеличиваются значения величин, характеризующие детерминистические составляющие, мера детерминизма (Det) в обоих случаях близка к показателю Херста H и может быть использована как дополнительный критерий самоподобия ВР.

Таблица 4. Количественные характеристики РД для ФДЛ

| H | RR | | Det | | L | | $ENTR$ | | LAM | | TT | |
|-----|--------------|-------|--------------|-------|--------------|--------|--------------|-------|--------------|-------|--------------|--------|
| | Δ ФДЛ | ФДЛ | Δ ФДЛ | ФДЛ | Δ ФДЛ | ФДЛ | Δ ФДЛ | ФДЛ | Δ ФДЛ | ФДЛ | Δ ФДЛ | ФДЛ |
| 0,6 | 0,112 | 0,011 | 0,558 | 0,659 | 2,506 | 2,750 | 0,961 | 1,200 | 0,340 | 0,652 | 2,494 | 2,934 |
| 0,7 | 0,148 | 0,033 | 0,633 | 0,911 | 2,661 | 4,701 | 1,115 | 2,134 | 0,464 | 0,926 | 2,647 | 5,629 |
| 0,8 | 0,166 | 0,030 | 0,677 | 0,944 | 2,764 | 6,311 | 1,203 | 2,533 | 0,563 | 0,964 | 2,753 | 7,821 |
| 0,9 | 0,144 | 0,041 | 0,777 | 0,983 | 2,766 | 12,046 | 1,206 | 3,241 | 0,578 | 0,987 | 2,776 | 14,115 |

Стоит отметить, что наибольшие отличия в количественных характеристиках РД между ФБД и ФДЛ проявляются в значениях величины L – средней длины диагональных линий, которое может рассматриваться как среднее время предсказуемости ряда, и величины TT – среднее время, которое система может провести в окрестности определенного состояния. Эти характеристики в несколько раз больше для ФБД, что объясняется большей изрезанностью и перепадами значений реализаций ФДЛ (см. рис. 8).

Исследование фрактальных временных рядов

Рассмотрим применение рассмотренных методов рекуррентного анализа на примерах реальных ВР, обладающих фрактальными свойствами. Исследованные в работе ВР можно условно отнести к различным научным областям: медицинской, биологической и финансовой.

Медицинские данные. Одним из методов диагностики сердечных заболеваний, является анализ рядов, построенных по RR-интервалам. RR-интервал представляет собой промежуток времени между соседними зубцами электрокардиограммы и равен продолжительности сердечного цикла. Исходные данные были получены на специализированном сайте [PhysioNet], где приведены данные RR-интервалов пациентов до и после приема медицинского препарата, применяющегося для лечения и предотвращения тахикардии. На рис. 10 показаны типичные последовательности RR-интервалов до (слева) и после (справа) применения препарата пациентом. Проведенный фрактальный анализ показал, что данные ряды обладают мультифрактальными свойствами, в частности индексом устойчивости, существенно меньшим 2. Представленные ряды являются рядами приращений и методика построения РД может базироваться на результатах исследований приращений ФДЛ. В нижней части рис.10 представлены соответствующие рекуррентные диаграммы.

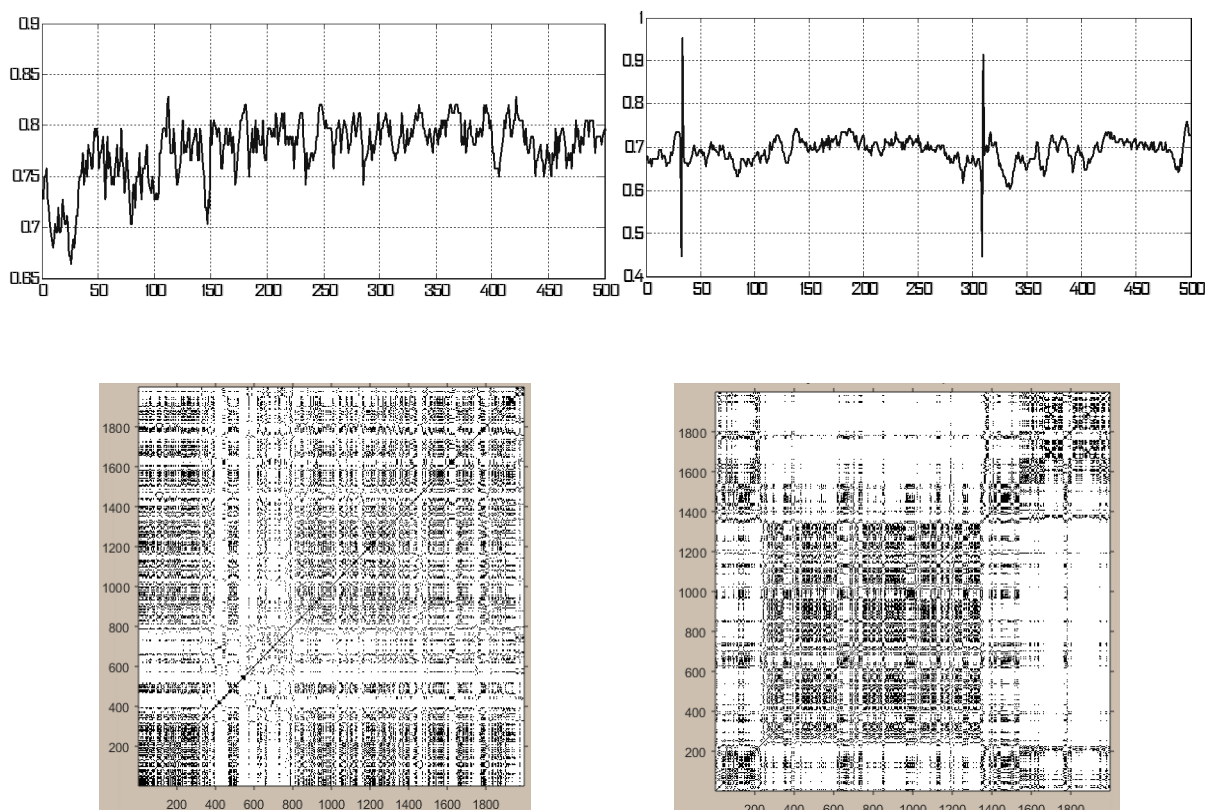


Рисунок 10. Реализации и РД для RR-интервалов до (слева) и после (справа) применения препарата

Количественные характеристики, представленные в табл.5, демонстрируют, что после принятия препарата увеличиваются мультифрактальные свойства ВР. Мера детерминизма (*Det*) изменяется пропорционально изменению показателя Херста *H*. Также значимо отличаются такие параметры как *LAM* и *TT*. Анализ реализаций RR-интервалов может быть использован для уточнения состояния пациента.

Таблица 5. Количественные характеристики РД для RR-интервалов

| | <i>H</i> | α | <i>RR</i> | <i>Det</i> | <i>L</i> | <i>ENTR</i> | <i>LAM</i> | <i>TT</i> |
|-------|----------|----------|-----------|------------|----------|-------------|------------|-----------|
| До | 0.81 | 1,8070 | 0,1009 | 0,5787 | 4,7309 | 1,4655 | 0,4418 | 5,2909 |
| После | 0.87 | 1,5542 | 0,1337 | 0,8095 | 3,4059 | 1,6301 | 0,7857 | 3,8428 |

Кольца деревьев. Годичные кольца деревьев уже стали традиционным источником количественных данных в различных областях научного знания. Ширина годичных колец и их изотопный состав содержат информацию о солнечной активности и климатических эффектах на большой шкале времени в прошлом. Г. Херстом было установлено, что ряды приращений кодовых колец обладают свойством самоподобия [Feder 1988, Hurst, 1965]. В представленной работе были исследованы некоторые ряды колец деревьев, прораставших в разных штатах США. Значение показателя Херста во всех случаях лежит в диапазоне $0.7 \leq H \leq 0.8$, а индекс устойчивости практически равен 2. В этом случае мы можем считать ряды монофрактальными и методика построения РД может базироваться на результатах исследований ФГШ. На рис. 11 показан ВР и соответствующая РД для годичных колец деревьев.

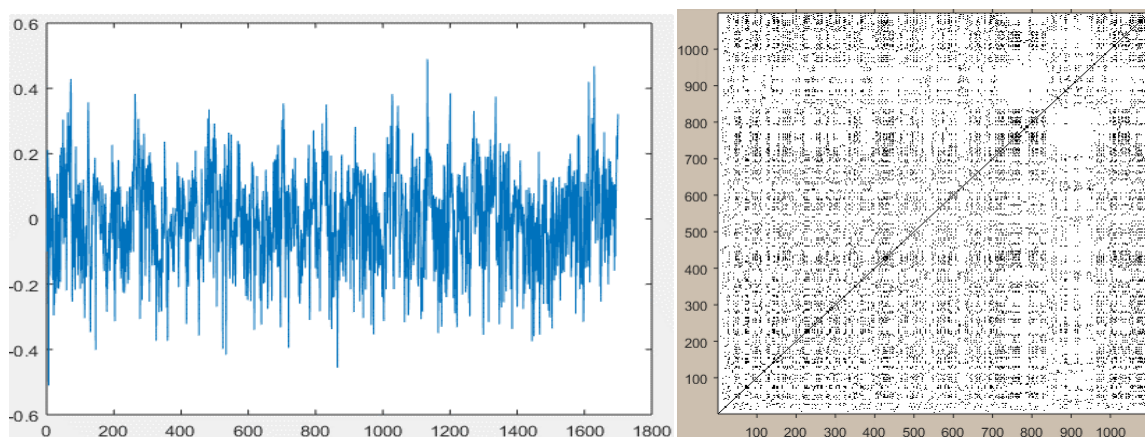


Рисунок 11. ВР и РД для годичных колец деревьев

В табл.6 приведены количественные характеристики РД, полученные для нескольких ВР. Первый столбец указывает года роста дерева. Очевидно, что значения характеристик близки между собой, что свидетельствует о типичности процесса образования колец у данных деревьев.

Таблица 6. Количественные характеристики РД для годовых колец деревьев

| Года | RR | Det | L | ENTR | LAM | TT |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 286-1985 | 0,0861 | 0,5273 | 2,4576 | 0,9069 | 0,3444 | 2,4803 |
| 000-1989 | 0,0865 | 0,5235 | 2,4638 | 0,9139 | 0,3674 | 2,4441 |
| 800-1954 | 0,0961 | 0,5412 | 2,4724 | 0,9236 | 0,3901 | 2,5205 |
| -5141 - 1963 | 0,0925 | 0,5516 | 2,5126 | 0,9681 | 0,4193 | 2,5833 |

Финансовые ряды. Общеизвестным примером фрактальных стохастических структур являются современные финансовые рынки. Многие финансовые ряды, такие как валютные пары, экономические индексы, цены акций и др. обладают самоподобными и мультифрактальными свойствами. Изменение этих свойств является предвестником кризисных состояний [Соловьев, 2003, 2015]. Однако изменение фрактальных свойств сопровождается изменением рекуррентных свойств, поэтому изучение рекуррентных характеристик финансовых рядов является актуальной задачей анализа финансовых рядов.

На рис. 12 сверху показан типичный ВР цены акций компании Тесла с минутным интервалом. Проведенный фрактальный анализ показал, что данные ряды обладают слабыми персистентными свойствами, показатель Херста $0.5 < H \leq 0.55$, а индекс устойчивости практически равен 2. Данный ряд является кумулятивным и построение РД может базироваться на результатах исследований ФБД. Справа показана соответствующая РД для этого ряда.

В нижней части рис. 12 показан ВР объемов продаж акций компании Тесла, соответствующий ряду изменения цены акций. Проведенный фрактальный анализ показал, что ряды объемов продаж обладают мультифрактальными свойствами, в частности индексом устойчивости, существенно меньшим 2. Показатель Херста находится в диапазоне $0.7 \leq H \leq 0.85$.

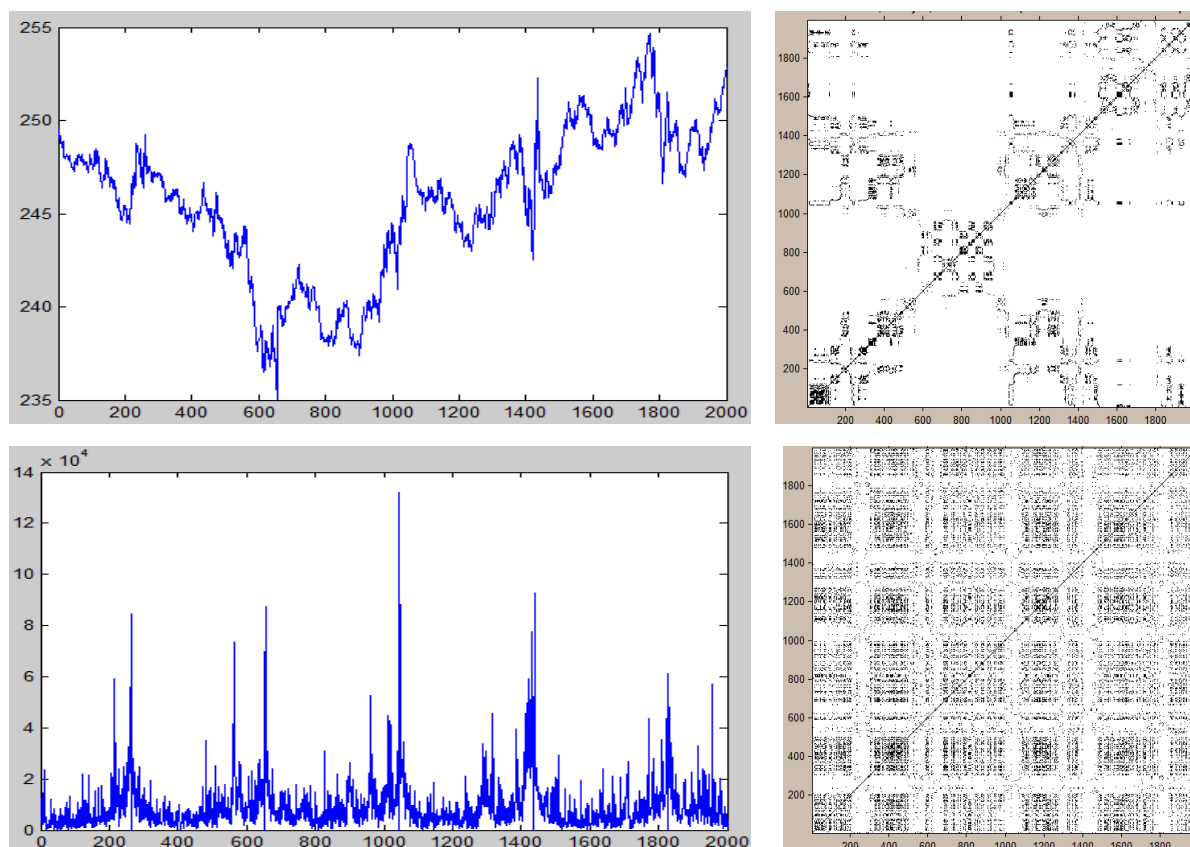


Рисунок 12. ВР и РД для цен и объемов продаж акций Tesla

Представленные ряды являются рядами приращений и методика построения РД может базироваться на результатах исследований приращений ФДЛ. Справа показана РД для этого ряда. В табл.7 приведены количественные характеристики РД, полученные для вышеописанных ВР.

Таблица 7. Количественные характеристики РД для акций и объемов продаж

| | α | H | RR | DET | L | $ENTR$ | LAM | TT |
|---------------|----------|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Цены акций | 1,9999 | 0.54 | 0.0378 | 0.8536 | 3.9165 | 1.8605 | 0.8588 | 4.3641 |
| Объемы продаж | 1,2453 | 0.78 | 0,1254 | 0,6782 | 2,8539 | 1,2779 | 0,5619 | 3,0029 |

Благодарности

Работа опубликована при поддержке проекта ITHEA XXI общества ITHEA ISS (www.ithea.org) и ADUIS (www.aduis.com.ua).

Заключение

В работе проведено исследование характерных особенностей РД для самоподобных и мультифрактальных стохастических ВР. Была предложена методика вычисления окрестности точки РД для монофрактальных и мультифрактальных рядов, имеющих высокую степень неоднородности данных. Получены зависимости количественных мер РД от фрактальных характеристик ВР. Показано, что основным параметром, влияющим на структуру и количественные меры РД является показатель Херста. На основе предложенной методики проведен рекуррентный анализ некоторых медицинских, биологических и финансовых ВР.

Литература

- [Baranovskyi O., 2015] Baranovskyi O. Recurrence Plots as Method for Information Flows Analysis. The advanced science journal, USA, Volume 2015, Issue 2, 2015, P. 45-49.
- [Cont R., 2004] Cont R., Tankov P. Financial modelling with jump processes, Chapman & Hall: CRC Press. 2004, 527 p.
- [Eckmann J.P., 1987] Eckmann J.P., Kamphorst S.O., Ruelle D. Recurrence Plots of Dynamical Systems. Europhysics Letters 5, 1987, P. 973-977.
- [Feder J., 1988] J. Feder. Fractals. J. Feder. Plenum, New York, 1988.
- [Hurst H.E., 1965] Hurst H.E., Black R.P., Simaila Y.M. Long-Term Storage: An Experimental Study. Constable, London, 1965.
- [Iwanski J.S., 1998] Iwanski J. S., Bredley E. Recurrence plots of experimental data: To embed or not to embed? Chaos, №8(4), 1998 P. 861-871.
- [Kirichenko L., 2014] Kirichenko L., Kobitskaya Yu., Habacheva A. Comparative Analysis of the Complexity of Chaotic and Stochastic Time Series. «Радіоелектроніка. Інформатика. Управління», №2 (31), 2014, С.126-134.
- [March T.K., 2005] March T.K., Chapman S. C., Dendy R. O. Recurrence plot statistics and the effect of embedding. Physica D, 2005, P. 171-184.
- [Marwan N., 2002] Marwan N., Wessel N., Meyerfeldt U., Schirdewan A., Kurths J. Recurrence-plots-based measures of complexity and application to heart-rate-variability data. Physical Review, E66, 2002.
- [Marwan N., 2007] Marwan N., Romano M., Thiel M., Kurths J. Recurrence plots for the analysis of complex system. Physics Reports, 2007, P. 237-329.
- [Marwan N., 2008] Marwan N. A historical review of recurrence plots. The European Physical Journal Special Topics, № 164, 2008, P. 3-12.

- [Peters E., 1996] Edgar E. Peters. Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility. Edgar E. Peters. Wiley, 2 edition, 1996.
- [PhysioNet] PhysioNet, the research resource for complex physiologic signals: www.physionet.org
- [Reidi R.H., 2002] R.H.Riedi. Multifractal processes, in Doukhan P., Oppenheim G., Taqqu M.S. (Eds.), Long Range Dependence: Theory and Applications: Birkhuser. -2002. -P. 625–715.
- [Saprykin G., 2015] Saprykin G., Kobyska Yu., Kirichenko L. Using the Characteristics of Chaotic Dynamics in the Knowledge Base of Decision Support System. Матеріали X Міжнародної науково-технічної конференції (CSIT-2015), 2015, С. 162-165.
- [Stanley, 1999] H. E. Stanley, L. A.N. Amaral, A.L. Goldberger, S. Havlin, P.Ch. Ivanov, C.-K. Peng. Statistical Physics and Physiology: Monofractal and multifractal approaches. Physica A 270, 1999, P. 309-324.
- [Stoev S., 2004] S. Stoev, M. S. Taqqu. Simulation methods for linear fractional stable motion and FARIMA using the fast Fourier transform. Fractals, N.12(1), 2004, pp 95-121.
- [Takens F., 1981] Takens F., Rand D. A., Young L.-S. Detecting strange attractors in turbulence. Dynamical Systems and Turbulence: Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, vol. 898, 1981, P. 366–381.
- [Zbilut J.P., 2002] Zbilut J.P., Zaldívar-Comenges J.-M., Stozzi F. Recurrence quantification based Liapunov exponent for monitoring divergence in experimental data. Phys. Lett. A, V. 297, 2002, P. 173-181.
- [Владимирский Э.И., 2011] Владимирский Э.И., Исмаилов Б.И. Синергетические методы управления хаотическими системами. Баку, 2011, 240 с.
- [Дербенцев В.Д., 2010] Дербенцев В.Д., Сердюк О.А., Соловйов В.М., Шарапов О.Д. Синергетичні та еконофізичні методи дослідження динамічних та структурних характеристик економічних систем. Монографія. Черкаси: Брама-Україна, 2010, 287 с.
- [Соловйов В.М., 2003] Соловйов В.М., Дербенцев В.Д., Шарапов О.Д. Моделювання явищ самоорганізації в фінансово-економічних системах. Міжвідомчий науковий збірник «Моделювання та інформаційні системи в економіці, Київ, КНЕУ, Вип. 70, 2003, с.74-85.
- [Соловйов В.М., 2015] Соловйов В.М. Мережні міри складності соціально-економічних систем. Вісник Черкаського університету, сер. «Прикладна математика. Інформатика», № 38 (371), 2015, с.67-79.
- [Шелухин О. И., 2011] О. И. Шелухин. Мультифракталы. Инфокоммуникационные приложения / О. И. Шелухин . М.: Горячая Линия - Телеком, 2011. – 578 с.

Информация об авторах



Людмила Кириченко – д.т.н., профессор Харьковского национального университета радиозлектроники; пр. Науки 14, 61166, Харьков, Украина; e-mail: lyudmyla.kirichenko@nure.ua .

Основные области научных исследований: самоподобные и мультифрактальные временные ряды, фрактальный анализ, вейвлет-анализ, детерминированные хаотические системы.



Алексей Барановский - к.т.н., старший преподаватель Национального технического университета Украины "Киевский политехнический институт"; пр. Победы 37, 03056, Киев; email: o.baranovskyi@kpi.ua .

Основные области научных исследований: фрактальный анализ, анализ рекуррентных диаграмм, теория безопасности, информационная безопасность, информационные операции и воздействия.



Юлия Кобицкая - аспирант Харьковского национального университета радиозлектроники; пр. Науки 14, 61166, Харьков, Украина; e-mail: yulija.kobyska@nure.ua .

Основные области научных исследований: анализ самоподобных временных рядов, фрактальный, рекуррентный и энтропийный анализ временных рядов.

Recurrent analysis of self-similar and multi-fractal time series

Lyudmila Kirichenko, Alexei Baranovskyi, Julia Kobitskaya

Abstract: A comparative recurrent analysis of the self-similar and multi-fractal stochastic time series is presented in the work. A methodic of construction recurrent diagrams of fractal series with a high degree of heterogeneity is proposed. The dependencies between quantitative measures of recurrent diagrams and fractal characteristics of time series are obtained. On the basis of the proposed methodic, some medical, biological and financial series are analyzes.

ACM Classification Keywords: G.3 Probability and statistics - Time series analysis, Stochastic processes, G.1 Numerical analysis, G.1.2 Approximation - Wavelets and fractals.