ОЦЕНКА ИНТЕРВАЛЬНЫХ АЛЬТЕРНАТИВ: НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Михаил Стернин, Геннадий Шепелёв

Аннотация: *Рассмотрена задача принятия решений в условиях неопределенности с одним интервальным показателем качества сравниваемых альтернатив. Введено понятие иерархии неопределенностей в множествах предлагаемых к сравнению альтернатив, показатели качества которых описываются различными представлениями интервальных оценок, – моно интервальными и поли интервальными. Из-за типичного для задач выбора в множествах интервальных оценок пересечения интервалов задача сравнения таких, «интервальных», альтернатив может быть решена только с учетом предпочтений лица, принимающего решение. В рамках введенной иерархии предлагаются некоторые подходы к сравнению интервальных альтернатив и связанные с ними способы описания предпочтений ЛПР. Анализируется возможность введения предпочтений на базе предложенного авторами ранее метода расчета коэффициента уверенности в истинности проверяемой гипотезы о предпочтительности той или иной альтернативы. Рассматриваются возможности сравнения интервальных альтернатив и описания предпочтений посредством функций полезности, отражающих три основных вида предпочтений ЛПР, - безразличие к риску; постоянную несклонность к риску и постоянную склонность к нему. Здесь проводится также сопоставление точечных оценок, эквивалентных сравниваемым интервальным, которые рассчитываются в рамках аппарата функций полезности («детерминированные эквиваленты»), с оценками «пессимизма – оптимизма» Гурвица. Показано, что в обоих этих методах результатами сравнения выступают характерные для многократно повторяющихся ситуаций осредненные индикаторы, используемые затем для описания предпочтений, что не всегда адекватно содержанию решаемых задач. В связи с этим предложен новый метод сравнения интервальных величин и описания предпочтений, сравнение оценок и задание предпочтений в котором осуществляется на основе сопоставления «гарантированных» значений разностей показателей качества сравниваемых альтернатив, трактуемых как случайные переменные, для выбранных экспертом уровней шансов реализации проверяемой гипотезы о предпочтительности. Этот метод сравнения и описания предпочтений, который свободен от использования осредненных величин, иллюстрируется для случая полученных авторами соотношений для функций распределения вероятностей разностей двух равномерно распределенных величин, заданных на сравниваемых интервалах. Дан численный пример сравнения интервальных альтернатив, осуществляемого разными методами.*

Keywords*: interval alternatives, hierarchy of uncertainties, preferences, utility functions, probability distribution of difference for two random variables, methods comparing interval alternatives.*

ACM Classification Keywords*: H.1.2 Human information processing. G3 Distribution functions. I.2.3 Uncertainty, “fuzzy," and probabilistic reasoning.*

Введение

Многие практические задачи приходиться исследовать в условиях неопределенности. В первую очередь это задачи прогнозирования, в которых необходимо оценивать будущие значения анализируемых величин. В большинстве случаев эти величины измеряются в числовых шкалах и получают из-за неопределенности, интервальные, часто экспертные, оценки. Интервальные оценки распространены в естествознании, гуманитарных областях не реже, чем точечные. Например, все инструментальные измерения выполняются с некоторой точностью, а для величин, не измеримых непосредственно, расчеты, сделанные с интервальными исходными данными, приводят к интервальным результатам. Так, в задачах выбора в условиях неопределенности показатели эффективности (качества) сравниваемых альтернатив, которые, как правило, являются результатами расчетов на моделях, имеют интервальное представление. Альтернативы, показатели эффективности которых имеют интервальное представление, будем называть интервальными альтернативами.

В классе интервальных оценок, связанных с прогнозными исследованиями, т.е. с оценкой неизвестных точно на момент прогнозирования будущих значений анализируемых величин, прогнозируемая величина по прошествии определенного времени с приемлемой для практики точностью будет иметь единственное (точечное) значение. Каждое возможное точечное значение назовем реализацией интервальной оценки показателя. Таким образом, интервальная оценка содержит континуум возможных точечных реализаций.

В интервальной парадигме можно выделить два основных направления: моноинтервальный и полиинтервальный подходы. В первом из них анализируемые параметры задаются как одноинтервальные оценки. Второй подход является развитием моно подхода, при котором первичный объект моно подхода – точечная оценка - заменяется интервальной оценкой, а интервал как способ описания неопределенности заменяется совокупностью интервальных оценок. В русле второго направления нами предложен вариант полиинтервального подхода [Chugunov, 2008; Стернин, 2010], в рамках которого для описания неопределенности вводится полиинтервальная оценка (ПИО), наглядно представимая как криволинейная трапеция на плоскости ($X = D$, $Y = h$). Здесь D - значения анализируемого параметра, h - «метка» отдельного частного интервала в составе ПИО. Задание на ПИО совместной функции распределения вероятностей с плотностью $f(h, D) = f_1(h)f_2(D|h)$ превращает ПИО в обобщенную интервальную оценку (ОИО).

Для того чтобы интервальные оценки можно было использовать при принятии решений, необходимо уметь сравнивать пары альтернатив с интервальными показателями качества. Имея в виду эту задачу, введем следующую иерархию неопределенностей в множествах сравниваемых интервальных оценок. В моноинтервальном случае иерархия неопределенностей (в возрастающем порядке степени неопределенности) содержит точечные оценки (неопределенность отсутствует), интервально-вероятностные (промежуточная степень неопределенности), интервальные оценки (наибольшая неопределенность). В рамках подхода ОИО существует следующая иерархия неопределенностей: точечные оценки; интервально-вероятностные оценки первого рода, когда известны функции $f_1(h)$ и $f_2(D|h)$; интервально-вероятностные оценки второго рода, когда известна лишь функция $f_1(h)$; полиинтервальные оценки.

Существуют около 20 сочетаний различных интервальных оценок при сравнении пар альтернатив. Например, в моно случае мы имеем следующие возможные комбинации пар оценок сравниваемых альтернатив: интервально – интервальная пара, интервальная – интервально-вероятностная пара, интервальная - точечная комбинация и так далее. В случае поли подхода мы имеем комбинации ПИО - ПИО, ПИО - интервально-вероятностные оценки первого рода, ПИО - интервально-вероятностные оценки второго рода, ПИО – точечная оценка и так далее и, наконец, все перекрестные комбинации (моно оценки - ОИО). Чтобы обеспечить сопоставимость результатов таких сравнений, целесообразно построить унифицированный метод, позволяющий сравнивать любую пару интервальных альтернатив. Заранее ясно, что эта проблема не может быть решена чисто математическими методами, а должна рассматриваться как задача принятия решений, то есть с учетом предпочтений человека, эксперта или лица принимающего решения (ЛПР), и ее/его отношения к различным подходам к учету неопределенности.

ЛПР может выразить свои предпочтения различными способами. Пусть, например, большее значение показателя качества отвечает более предпочтительной ситуации. Ограничимся пока в задачах сравнения моно интервальной картиной. Если в результате расчетов для показателей качества двух сравниваемых альтернатив получены интервально-вероятностные оценки, то ЛПР может сравнивать значения показателей эффективности конкурирующих альтернатив, отвечающие одинаковым уровням вероятности $P(D \geq D_o)$. Так, например, производится классификация запасов углеводородов, в соответствии с которой их объем при P = 0,9 принимается за объем наиболее разведанной их части, так называемых доказанных запасов. Этот подход вряд ли можно признать приводящим к корректному решению задачи сравнения. В самом деле, все возможные значения запасов в интервале [L, R] (L - левая граница интервальной оценки, R – правая) отвечают P = 1. При P = 0,9 мы получаем суженные интервальные оценки [$L_{1(0,9)}$, R_1] для первого объекта и [$L_{2(0,9)}$, R_2] для второго. Ясно, что при сравнении этих новых интервальных оценок, содержащихся в исходных, любая из них может оказаться предпочтительной в соответствии с тем, какие их точечные оценки реализуются в действительности в будущем. Таким образом задача сравнения по-прежнему осталась не решенной. Исключением является лишь случай, когда $L_{1(0,9)} < R_1 < L_{2(0,9)} < R_2$ (тогда второй объект заведомо предпочтительнее первого) или когда $L_{2(0,9)} < R_2 < L_{1(0,9)} < R_1$ (тогда первый объект предпочтительнее). Ниже мы вернемся к этому подходу, рассмотрев его другой точки зрения.

Дополнительными возможностями отображения предпочтений ЛПР при сравнении может служить аппарат функций полезности [Кини, 1981], а также связь предпочтений со значениями коэффициента уверенности, введенного авторами ранее в методе прямого сравнения моноинтервальных оценок [Стернин, 2009; Shepelyov, 2011]. Эти возможности будут рассмотрены ниже. В следующем разделе подход с расчетом коэффициента уверенности распространен на все возможные пары интервальных альтернатив в их иерархии.

Сравнение Интервальных Оценок по Значению Коэффициента Уверенности

Будем считать, что проверяется гипотеза о том, что вторая интервальная альтернатива I_2 предпочтительнее («лучше») первой I_1. Будем использовать обозначения I_1 и I_2 как для альтернатив, так и для их интервальных оценок. Предполагается, что каждая интервальная оценка содержит неизвестное к моменту прогнозирования точечное значение анализируемого параметра, которое окажется его реализацией в будущем. Будем говорить, что пара точечных реализаций (i_1, i_2) интервальных оценок I_1 и I_2 соответственно принадлежит зеленой зоне, если i_2 не меньше, чем i_1, и принадлежит красной зоне в противоположном случае. Таким образом, зеленая зона – это зона, благоприятствующая истинности проверяемой гипотезы, а красная зона наоборот.

Для сравнения интервалов необходимо сделать много (скажем, N) испытаний в процессе численного моделирования, при каждом из которых соответствующий интервал заменяется точечной реализацией, и отметить количество попаданий в зеленую N_g и красную зоны N_r, соответственно. Конечно, для этого необходимо знать распределения вероятностей на сравниваемых интервалах или постулировать их. Можно видеть, что $K_g = N_g/N$ может служить мерой шансов реализации зеленой зоны (шансов, что альтернатива I_2 окажется предпочтительнее альтернативы I_1), а $K_r = N_r/N$ аналогичной мерой для красной зоны.

Введем коэффициент уверенности K_{as} как разность между K_g и K_r: $K_{as} = K_g — K_r$. Коэффициент уверенности показывает, насколько шансы реализации зеленой зоны превышают шансы реализации красной зоны. Именно этот показатель предлагается в качестве критерия сравнения пар интервальных альтернатив для всех их модификаций, как моно и полиинтервальных, так и их комбинаций. В поли интервальном случае необходимо сначала разыграть величину h (по $f_1(h)$), специфицируя таким образом интервал в составе ПИО, а затем D по $(f_2(D|h))$, находя соответствующую точечную реализацию. Будем говорить, что альтернатива I_2 теоретически предпочтительнее, чем I_1, если значение K_{as} положительно. Теоретически, поскольку предпочтения ЛПР еще не учтены. Эти предпочтения могут быть выражены введением назначаемого ЛПР порогового значения коэффициента уверенности K_{th}. Именно, если вычисленное для данной пары интервальных оценок значение K_{as} не меньше, чем K_{th}, то I_2 следует признать более предпочтительной альтернативой с учетом предпочтений ЛПР на уровне уверенности K_{as}. Если порог, назначенный ЛПР, не позволяет признать вторую альтернативу предпочтительной, необходимо анализировать ситуацию заново. Если K_{as} отрицательно, необходимо проверить противоположную гипотезу.

Рассмотрим некоторые свойства коэффициента уверенности. Пусть $K_{as}(I_2, I_1)$ - коэффициент уверенности при проверке гипотезы о том, что альтернатива I_2 более предпочтительна, чем I_1. Возможные значения коэффициента уверенности лежат в диапазоне [- 1, 1]: $-1 \le K_{as}(I_2, I_1) \le 1$. Отметим, что условие $K_{as}(I_2, I_1) = 1$ соответствует ситуации, когда I_2 доминирует I_1 (интервалы не пересекаются и $L_2 > R_1$), а $K_{as}(I_2, I_1) = —1$ отвечает противоположной ситуации. Условие $K_{as}(I_2, I_1) = 0$ соответствует ситуации равнозначности интервальных альтернатив по предпочтению. Как функция двух переменных K_{as} является антисимметричной функцией: $K_{as}(I_2, I_1) = - K_{as}(I_1, I_2)$. Кроме того, K_{as} согласуется с требованием транзитивности отношения предпочтительности. Действительно, если $K_{as}(I_2, I_1) > 0$, тогда (теоретически) $I_2 \succ I_1$; если $K_{as}(I_3, I_2) > 0$, то $I_3 \succ I_2$, и, поскольку, в силу транзитивности, $I_3 \succ I_1$, то $K_{as}(I_3, I_1) > 0$.

Поскольку коэффициент уверенности новая характеристика, полезно сравнить значения этого фактора со значениями K_g и K_r (см. таблицу 1).

ЛПР может интересовать также оценка шансов того, что интервал I_2 больше, в среднем, чем I_1 на величину $\delta > 0$. Теперь попадание пары реализаций точечных оценок в зеленую зону определяется условием $i_2 - i_1 > \delta$. Для коэффициента уверенности имеем: $K_{as}(\delta) = 2K_g(\delta) —1$, где $K_g(\delta) = N_g(\delta)/N$, и $N_g(\delta)$ - количество реализаций, удовлетворяющих указанному выше условию.

Таблица 1. Сравнение значений K_{as}, K_g и K_r

K_g	$K_r = 1 — K_g$	$K_{as} = K_g — K_r$
0	1	-1
0.1	0.9	- 0.8
0.2	0.8	- 0.6
0.3	0.7	- 0.4
0.4	0.6	- 0.2
0.5	0.5	0.0
0.6	0.4	0.2
0.7	0.3	0.4
0.8	0.2	0.6
0.9	0.1	0.8
1.0	0	1

Проиллюстрируем теперь предложенную процедуру сравнения интервальных оценок на примере пар интервалов с треугольными распределениями на них. Эти примеры также полезны потому, что точное распределение шансов на сравниваемых интервалах часто неизвестно. Но мы можем предположить, что эти распределения унимодальны и для многих типов распределений можно приближенно заменить эти неизвестные (но унимодальные) распределения треугольными распределениями.

Получим формулу, связывающую случайные числа для равномерного (N_u) и треугольного (N_t) распределений, которую будем использовать при сравнении интервальных оценок методом статистических испытаний. Если L, R и M левая, правая границы интервала и мода распределения, соответственно, то плотность $f(z)$ треугольного распределения имеет вид:

$$f(z) = \frac{2}{R-L}\begin{cases} \dfrac{z-L}{M-L}, & L \le z \le M, \\ \dfrac{R-z}{R-M}, & M < z \le R \end{cases}$$

Методом обратной функции получим:

$$N_t = \begin{cases} L + \left[N_u(R-L)(M-L)\right]^{1/2}, & N_u \le (M-L)/(R-L), \\ R - \left[(1-N_u)(R-M)(R-L)\right]^{1/2}, & N_u > (M-L)/(R-L) \end{cases}.$$

Используя эти соотношения, обратимся теперь к примеру сравнения интервальных оценок с треугольными распределениями на них. Границы интервалов (L, R) и значения моды (M) распределения представлены в таблице 2. Количество испытаний в каждом варианте равно 100 000. Сравнение сделано на основании значений $K_{as}(I_2, I_1)$ для $\delta = 0$. Необходимо иметь в виду, что вычисленные значения коэффициента $(K_{as})_c$ несколько отличаются от «точных» значений, которые были бы получены для бесконечного числа реализаций.

Прокомментируем полученные результаты. Строки 1 - 3 таблицы 2 соответствуют конфигурации правого сдвига для пары сравниваемых интервальных оценок. Заранее ясно, что эта конфигурация благоприятствует истинности гипотезы $I_2 \succ I_1$. Но можно ли безоговорочно принять это предположение? Значения коэффициента уверенности показывают, что да, поскольку даже в худшем случае (строка 1), когда моды распределений находятся в практически крайних позициях (слева для второго интервала и справа для первого – пессимистические для истинности проверяемой гипотезы оценки), его значение превышает 0,7. Такое значение, по-видимому, может удовлетворить большинство ЛПР.

Таблица 2. Сравнение интервальных оценок для треугольного распределения

Номер примера	Интервал 1			Интервал 2				
	L_1	R_1	M_1	L_2	R_2	M_2	N_g	$(K_{as})_c$
1	50	100	90	70	170	80	85055	0.7011
2	50	100	60	70	170	160	99244	0.98488
3	50	100	75	70	170	120	97832	0.95664
4	50	100	75	50	100	75	50100	0.002
5	50	100	90	50	100	60	25672	-0.48656
6	50	100	60	50	100	90	74652	0.49304
7	70	170	75	80	150	145	75970	0.5194
8	70	170	160	80	150	100	20091	-0.59818
9	70	170	120	80	150	115	42648	-0.14704

Строки 4 - 6 таблицы 2 соответствуют конфигурации совпадающих интервальных оценок. Можем мы принять, что эти оценки эквивалентны при любом расположении моды? Вспомним, что для эквивалентных оценок $K_{as} = 0$. Очевидно, что это условие выполнено только для симметричных треугольных распределений (строка 4). Это не так в других случаях (строки 5, 6). Однако даже для самых благоприятных условий (строка 6), когда мода распределения для второй оценки резко сдвинута вправо, а мода первого распределения влево, значение коэффициента K_{as} может оказаться недостаточным для того, чтобы рациональный ЛПР сделал заключение, что $I_2 \succ I_1$.

Результаты сравнения двух вложенных интервальных оценок показаны в строках 7 - 9 таблицы 2. Видно, что значения K_{as} и, стало быть, выводы о предпочтительности существенно зависят от положения мод распределений.

Эти примеры показывают, что если информация о шансах на реализацию зеленых и красных зон известна, можно сказать, что проблема сравнения альтернатив в принципе решена. Во всяком случае, с известными оговорками, она решена для интервально-вероятностных пар и пар, заданных интервально-вероятностными и точечными оценками. Содержание сделанной оговорки обсуждается в конце следующего раздела.

Но если хотя бы одна оценка чисто интервальная, мы не сможем осуществить эту программу. Что можно предложить в этой ситуации? Возможны два пути. Первый основан на принципе максимальной энтропии (принцип Гиббса - Джейнса), согласно которому все возможные состояния природы имеют равные шансы на реализацию и, следовательно, необходимо признать наличие на интервале равномерного распределения.

Мы обсудим некоторые последствия этого предположения в следующих разделах. Второй путь основан на предположении о том, что неизвестное распределение может быть любым, включая смесь распределений. Отчасти эта ситуация уже обсуждалась на примерах сравнения оценок при треугольных распределениях, когда предполагалось, что неизвестные (но унимодальные) распределения могут быть аппроксимированы треугольными распределениями.

Помимо коэффициента уверенности предпочтения ЛПР могут быть выражены также на языке функций полезности. Рассмотрим эту возможность более подробно.

Сравнение Интервальных Альтернатив и Функции Полезности

В работе [Кини, 1981] подробно исследованы основные типы функций полезности (ФП) и их характеристики. Здесь мы рассмотрим ФП, отражающие следующие три основных вида предпочтений ЛПР: безразличие к риску; постоянную несклонность к риску и постоянную склонность к нему.

Пусть имеются две интервальных оценки, предложенные к сравнению, I_1 = [L_1, R_1] и I_2 = [L_2, R_2]. Определим функцию полезности $U(D)$, заданную на интервале [L, R] = [min(L_1, L_2), max(R_1, R_2)]. Нормируем $U(D)$ таким образом, что $U(L) = 0$, $U(R) = 1$. Будем считать, что для описания неопределенности на оценках I_1, I_2 заданы плотности распределения вероятностей $f_1(D)$ и $f_2(D)$ соответственно. Тогда критерием сравнения интервальных оценок служат значения математических ожиданий ФП $E_i[U(D)]$, i =1, 2, вычисленные на I_1, I_2 соответственно:

$$E_i[U(D)] = \int_{L_i}^{R_i} U(x) f_i(x) dx$$

Пусть ЛПР безразличен к риску, т.е. значения показателя качества альтернатив, отличающиеся величиной, равноценны для него. Представителем ФП этого класса является линейная ФП $U(R) = A + BD$ с постоянными A и B, для которой функция несклонности к риску $R(D)$, равная взятому с обратным знаком отношению второй и первой ее производных, $R(D) = - U''(D)/U'(D)$, равна нулю, а $E[U(D)] = A + BD_{AV}$, где D_{AV} - математическое ожидание анализируемой случайной величины D.

Рассмотрим две основных конфигурации относительного расположения двух интервальных моно оценок: конфигурацию A (вложенные оценки, $L_1 < L_2 < R_2 < R_1$) и конфигурацию B (ситуация правого сдвига, $L_1 < L_2 < R_1 < R_2$). Нетрудно видеть, что в первом случае $L = L_1$, $R = R_1$, и $U(D) = (D - L_1)/(R_1 - L_1)$, а во втором $L = L_1$, $R = R_2$, и $U(D) = (D - L_1)/(R_2 - L_1)$. Примем для простоты, что на сравниваемых интервальных оценках заданы равномерные распределения. Непосредственное интегрирование или использование общей формулы для ожидания ФП дает для конфигурации A: $E_1(U) = ½$, $E_2(U) = (R_2 + L_2 - 2L_1)/[2(R_1 - L_1)]$. И $E_2(U) - E_1(U) = [(L_2 - L_1) - (R_1 - R_2)]/[2(R_1 - L_1)] = (S_g - S_r)/[2(R_1 - L_1)] = (D_{2AV} - D_{1AV})/(R_1 - L_1)$, где S_g и S_r суть протяженности зеленой и красной зон в методе прямого сравнения интервальных оценок [Стернин, 2009; Shepelyov, 2011]. Для конфигурации В имеем: $E_1(U) = (R_1 - L_1)/[2(R_2 - L_1)]$; $E_2(U) = (R_2 + L_2 - 2L_1)/[2(R_2 - L_1)]$. И $E_2(U) - E_1(U) = [(L_2 - L_1) + (R_2 - R_1)]/[2(R_2 - L_1)] = S_g/[2(R_2 - L_1)] = (D_{2AV} - D_{1AV})/(R_2 - L_1)$.

Важной характеристикой интервально-вероятностной оценки I в аппарате теории функций полезности является ее детерминированный эквивалент D_d, т.е. такое значение показателя качества, что ЛПР безразлично, выбрать ли альтернативу, описываемую интервальной оценкой I, или альтернативу с точечной оценкой показателя качества D_d. Существенно, что эта величина рассчитывается в рамках теории по ФП, а не задается ЛПР дополнительно к ней. Именно, по определению $U(D_d) = E[U(D)]$, а тогда для линейной ФП $D_d = D_{AV}$. Вспомним, что распространенной точечной характеристикой интервальной оценки, используемой при сравнении, служит оценка, получаемая в соответствии с коэффициентом пессимизма – оптимизма Гурвица α. Ее сравнение с детерминированным эквивалентом для равномерного распределения показывает, что эти характеристики совпадают только при α = 0,5. Таким образом показано, что при описании неопределенности посредством равномерного распределения вероятностей, а предпочтений ЛПР линейной функцией полезности результат сравнения интервальных оценок совпадает с результатами метода прямого сравнения и со сравнением по средним величинам. Показано также, что в этих условиях использование ЛПР значений коэффициента Гурвица, отличных от 0,5, свидетельствует о том, что его ФП не линейна.

Рассмотрим теперь ФП, выражающие постоянную несклонность ЛПР к риску и постоянную склонность к нему. Представителем ФП этих классов является функция вида $U(D) = A - B\exp(CD)$, где A, B, C – константы. Можно проверить, что функция несклонности к риску в данном случае не зависит от D и определяется равенством $R = - C$. Это значит, что положительные значения C отвечают ФП ЛПР, склонного к риску, а отрицательные соответствуют ФП ЛПР, не склонного к риску. Величина C показывает «интенсивность» склонности (несклонности). Действуя, как и выше, получаем:

Для конфигурации A (интервал I_2 вложен в I_1)

$U(D) = [\exp(CL_1) - \exp(CD)]/[\exp(CL_1) - \exp(CR_1)]$, $E_1(U) = 1/[C(R_1 - L_1)] - \exp(CL_1)/[\exp(CR_1) - \exp(CL_1)]$,

$E_2(U) = [\exp(CR_2) - \exp(CL_2)]/\{C(R_2 - L_2)[\exp(CR_1) - \exp(CL_1)]\} - \exp(CL_1)/[\exp(CR_1) - \exp(CL_1)]$. То есть $I_2 \succ I_1$, если $[\exp(CR_2) - \exp(CL_2)]/[\exp(CR_1) - \exp(CL_1)] > (R_2 - L_2)/(R_1 - L_1)$. Для детерминированных эквивалентов D_{id} интервальных оценок (i = 1, 2) имеем: $D_{id} = \mathrm{Ln}\{[\exp(CR_i) - \exp(CL_i)]/[C(R_i - L_i)]\}/C$. Теперь видно, что коэффициенты Гурвица для оценок $\alpha_i = \{\mathrm{Ln}\{[\exp(CR_i) - \exp(CL_i)]/[C(R_i - L_i)]\}/C - L_i\}/(R_i - L_i)$, а их значения, вообще говоря, не совпадают при сравнении интервальных оценок по эквивалентным точечным. Итак, ясно, что при нелинейных ФП ЛПР должен для согласованности результатов выбора по формуле Гурвица и по ФП использовать разные значения коэффициентов «пессимизма – оптимизма» при сравнении оценок.

Приведем теперь соответствующие формулы для конфигурации B (интервал I_2 сдвинут относительно I_1 вправо). $U(D) = [\exp(CL_1) - \exp(CD)]/[\exp(CL_1) - \exp(CR_2)]$,

$E_1(U) = [\exp(CR_1) - \exp(CL_1)]/\{C(R_1 - L_1)[\exp(CR_2) - \exp(CL_1)]\} - \exp(CL_1)/[\exp(CR_2) - \exp(CL_1)]$,

$E_2(U) = [\exp(CR_2) - \exp(CL_2)]/\{C(R_2 - L_2)[\exp(CR_2) - \exp(CL_1)]\} - \exp(CL_1)/[\exp(CR_2) - \exp(CL_1)]$.

Условия предпочтительности ($I_2 \succ I_1$), выражения для детерминированных эквивалентов интервальных оценок и их связей с точечными оценками Гурвица, совпадают с предыдущими.

Обратимся теперь к еще одной возможности представления предпочтений ЛПР. Она развивает один из вышеуказанных способов, но задание желательных для ЛПР уровней шансов предлагается осуществлять не для отдельных интервально-вероятностных оценок, а для интервально-вероятностной оценки разности исходных величин. Мы рассмотрим это способ на примере разности двух равномерных распределений вероятности.

Распределение Разности Двух Равномерных Распределений Вероятности

Найдем распределение разности *Z* двух равномерных распределений X_2, X_1, заданных на интервалах I_2, I_1 соответственно, и изучим его свойства. Определим кумулятивную функцию распределения *F(z)* равенством

$$F(z)\overset{\Delta}{=}F(Z<z)=\iint\limits_{\substack{x_2-x_1<z\\ L_1<x_1<R_1\\ L_2<x_2<R_2}} f(x_1)f(x_2)dx_1dx_2.$$

Здесь $x_1 \in I_1$, $x_2 \in I_2$, $f(x_1) = 1/(R_1 — L_1)$, $f(x_2) = 1/(R_2 — L_2)$.

На плоскости с декартовыми координатами ($X = X_1$, $Y = X_2$) возникают два типа областей интегрирования: прямоугольник, вытянутый вверх $R_1 — L_1 < R_2 — L_2$ (область 1) и прямоугольник, вытянутый вправо $R_1 — L_1 > R_2 — L_2$ (область 2).

В каждой области интегрирования возникают три подобласти переменной *z*.

Область 1-1: $L_2 —R_1 < z < L_2 —L_1$; область 1 - 2: $L_2 —L_1 <z < R_2 —R_1$; область 1 - 3: $R_2 — R_1 < z < R_2 —L_1$.

Область 2-1: $L_2 —R_1 < z < R_2 —R_1$; область 2 - 2: $R_2 —R_1 <z < L_2 —L_1$; область 3 - 3: $L_2 — L_1 < z < R_2 —L_1$.

Теперь несложно выполнить интегрирование и, вводя обозначения $S_1 = R_1 —L_1$, $S_2 = R_2 —L_2$, $S_q = S_1S_2$, получить для кумулятивной функции распределения *F(z)* и ее плотности *f(z)*:

Если $z < L_2 —R_1$ то $f = 0$, $F = 0$, если $z > R_2 —L_1$ то $f = 0$, $F = 1$.

Для $R_1 — L_1 < R_2 — L_2$ (область 1):

Если $L_2 —R_1 < z < L_2 — L_1$, то

$$f(z)=\frac{z+R_1-L_2}{S_q}, F(z)=\frac{(z+R_1-L_2)^2}{2S_q} \tag{1}$$

Если $L_2 — L_1 < z < R_2 —R_1$, то

$$f(z)=\frac{R_1-L_1}{S_q}, F(z)=\frac{R_1-L_1}{2S_q}\left[R_1+L_1+2(z-L_2)\right] \tag{2}$$

Если $R_2 — R_1 < z < R_2 – L_1$, то

$$f(z)=\frac{R_2-L_1-z}{S_q}, F(z)=1-\frac{(R_2-L_1-z)^2}{2S_q} \tag{3}$$

Для $R_1 — L_1 > R_2 — L_2$ (область 2):

Если $L_2 —R_1 < z < R_2 —R_1$, то

$$f(z)=\frac{z+R_1-L_2}{S_q}, F(z)=\frac{(z+R_1-L_2)^2}{2S_q} \tag{4}$$

Если $R_2 — R_1 <z < L_2 — L_1$, то

$$f(z) = \frac{R_2 - L_2}{S_q}, F(z) = \frac{R_2 - L_2}{2S_q}\left[- R_2 - L_2 + 2(z + R_1)\right] \qquad (5)$$

Если $L_2 — L_1 < z < R_2 — L_1$, то

$$f(z) = \frac{R_2 - L_1 - z}{S_q}, F(z) = 1 - \frac{(R_2 - L_1 - z)^2}{2S_q} \qquad (6)$$

Таким образом, распределение разности двух равномерных распределений является трапецеидальным распределением. Это распределение симметрично, его математическое ожидание $E(Z)$ равно $E(Z) = (R_2 + L_2 - R_1 - L_1)/2$, $F(z < E(z)) = 1/2$.

Получим выражение для коэффициента уверенности в терминах $F(z)$. В соответствии с общим подходом к расчету коэффициента уверенности имеем: $K_{as} = F(z > 0) - F(z < 0)$.

Теперь можно проанализировать результаты использования этих формул для сравнения интервальных оценок. Отметим, что существует возможность «быстрого» сравнения, основанного на свойствах математического ожидания $E(z)$ трапецеидального распределения. Именно, $E(z)$ может быть положительным и отрицательным. Если $E(z) < 0$, то можно заранее сказать, что I_2 не может быть предпочтительнее, чем I_1, поскольку $F(z < E(z)) = 1/2$, $K_{as} = 0$ для этой точки и, следовательно, переход в область $z > 0$ значений z приводит к $K_{as} < 0$. Аналогичные утверждения справедливы для произвольного, а не только для равномерного распределения, если заменить ожидаемое значение медианой Me, поскольку для нее $F(z < (Me)) = 1/2$, $K_{as} = 0$.

Обсудим теперь сравнение моно интервальных оценок по предпочтительности для возможных конфигураций их относительного расположения с точки зрения только что полученных результатов.

Совпадающие интервалы ($L_1 = L_2$, $R_1 = R_2$). Область интегрирования - квадрат, $E(Z) = 0$, $F(z < 0) = F(z > 0) = 1/2$, и в соответствии с определением коэффициента уверенности $K_{as} = 0$, т.е. оценки эквивалентны по предпочтительности. В этом случае выражение для коэффициента уверенности K_{as} совпадает с его выражением для метода прямого сравнения $(K_{as})_{dm}$ [Стернин, 2009]. Напомним, что для других распределений это не так, как следует из данных, приведенных в таблице 2.

Вторая оценка сдвинута вправо относительно первой. В этой конфигурации для обоих типов областей интегрирования (1 и 2) $F(z < 0) = (R_1 - L_2)^2/(2S_q)$. Следовательно, $K_{as} = 1 - (R_1 - L_2)^2/S_q = 1 - S_y^2/S_q$. Можно показать, что $(K_{as})_{dm} \leq K_{as}$. (Равенство лишь при $L_1 = L_2$). Это означает, что если признать $I_2 \succ I_1$ с коэффициентом уверенности $(K_{as})_{dm}$ по методу прямого сравнения, это заключение будет тем более верным в случае использования метода сравнения по распределению разности оценок. Заметим также, что для этой конфигурации значение $E(z)$ всегда положительно. Итак, можно использовать $(K_{as})_{dm}$ для экспресс-анализа и K_{as} для точных вычислений.

Вторая оценка вложена в первую. Здесь $R_1 - L_1 > R_2 - L_2$. Это означает, что в этой конфигурации имеется только область интегрирования, вытянутая вправо, а точка $z = 0$ принадлежит подобласти 2, поскольку $R_2 — R_1 < 0$, $L_2 — L_1 > 0$. Тогда $F(z < 0) = (R_2 — L_2)(2R_1 — R_2 — L_2)/(2S_q)$ и, следовательно, $K_{as} = (R_2 — L_2)(R_2 + L_2 — R_1 — L_1)/S_q$. Или $K_{as} = [S_g(= L_2 - L_1) - S_r(= R_1 - R_2)]/(R_1 - L_1) = (K_{as})_{dm}$.

Заметим, что формулы этого раздела для $Z = I_2 - I_1$ преобразуются в формулы для $Z = I_1 - I_2$ при перестановке индексов 1 ↔ 2 и областей интегрирования (прямоугольник, вытянутый вверх, заменяется прямоугольником, вытянутым вправо, и наоборот).

Сравнение Интервальных Оценок по «Гарантированной» Величине их Разности

Если ЛПР принимает способ сравнения по средним величинам, то он может применять соотношения, полученные в предыдущем разделе для равномерного распределения, или воспользоваться методом статистических испытаний для других типов распределений. В противном случае он может задать величину шансов на реализацию гипотезы о предпочтительности одной из оценок по распределению их разности и найти соответствующее этому уровню шансов значение разности. Это «гарантированное» значение показывает ЛПР, насколько одна из интервальных оценок предпочтительнее («не хуже» - не менее или не более) другой при заданной величине шансов. При таком подходе для произвольных распределений на оценках ЛПР должен построить распределение разности методом статистических испытаний, а для равномерных распределений может воспользоваться формулами, выводимыми далее.

В процессе сравнения могут возникнуть две возможности. При первой из них показатель качества сравниваемых альтернатив таков, что его меньшее значение отвечает более предпочтительному состоянию. Тогда гарантированное значение следует определять по функции F. При второй большее значение показателя качества отвечает более предпочтительному состоянию. Тогда гарантированное значение следует определять по функции $P = 1 — F$. Нетрудно видеть, что, если $S_2 > S_1$, то, в случае соотношения (3), возможные значения P лежат в диапазоне $0 \le P \le S_1/(2S_2)$; в случае соотношения (2) в диапазоне $S_1/(2S_2) < P \le 1 — S_1/(2S_2)$, и в случае (1) в диапазоне $1 — S_1/(2S_2) < P \le 1$. Точно так же, если $S_2 < S_1$, то, в случае соотношения (6), возможные значения P лежат в диапазоне $0 \le P \le S_2/(2S_1)$; в случае соотношения (5) в диапазоне $S_2/(2S_1) < P \le 1 — S_2/(2S_1)$, и в случае (4) в диапазоне $1 — S_2/(2S_1) < P \le 1$. Возможные значения F можно найти из вышеприведенных неравенств, используя соотношение $F = 1 — P$.

Теперь следует связать задаваемую ЛПР величину шансов (P или F) с гарантированным значением разности z для конфигураций вложенных и сдвинутых пар интервальных оценок. Напомним, что проверяется гипотеза о предпочтительности оценки I_2 и Z есть разность I_2 и I_1. Пусть z_M гарантированная величина разности для случая, когда большее значение показателя качества отвечает более предпочтительному состоянию, а z_L для случая, когда меньшее значение показателя качества отвечает более предпочтительному состоянию.

Вложенные оценки (I_2 вложена в I_1). Здесь $S_1 > S_2$ и следует ограничиться только соотношениями (4 – 6). Тогда:

Для $0 \le P \le S_2/(2S_1)$: $z_M = R_2 – L_1 – (2S_1S_2P)^{1/2}$, $z_L = R_2 – L_1 – [2S_1S_2 (1 — F)]^{1/2}$.

Для $S_2/(2S_1) < P \le 1 — S_2/(2S_1)$: $z_M = L_2 – R_1 + [S_2 + 2(1 — P)S_1]/2$, $z_L = L_2 – R_1 + (S_2 + 2S_1F)/2$.

Для $1 — S_2/(2S_1) < P \le 1$: $z_M = L_2 – R_1 + [2(1 – P)S_1S_2)]^{1/2}$, $z_L = L_2 – R_1 + (2FS_1S_2)^{1/2}$.

Экспресс-анализ может быть проведен по значению вероятности, для которой $z \ge 0$ или $z \le 0$. Например, можно показать, что для вложенных оценок $P(z_M \ge 0) = (R_2 + L_2 — 2L_1)/(2S_1)$. Если окажется, что величина P мала, то гипотеза $I_2 \succ I_1$ скорее всего будет ЛПР отвергнута.

Сдвинутые оценки ($L_1 < L_2 < R_1 < R_2$). Здесь возможны как случай $S_1 > S_2$, так и случай $S_1 < S_2$. В первом случае формулы для расчета z аналогичны формулам для вложенных оценок. Для $S_1 < S_2$ имеем:

Для $0 \le P \le S_1/(2S_2)$: $z_M = R_2 – L_1 – (2S_1S_2P)^{1/2}$, $z_L = R_2 – L_1 — (2S_1S_2F)^{1/2}$.

Для $S_1/(2S_2) < P \le 1 — S_1/(2S_2)$: $z_M = L_2 – R_1 + [S_1 + 2(1 — P)S_2)/2$, $z_L = L_2 – R_1 + (S_1 + 2FS_2)/2$.

Для $1 — S_1/(2S_2) < P \le 1$: $z_M = L_2 – R_1 + [2(1 – P)S_1S_2)]^{1/2}$, $z_L = L_2 – R_1 – (2FS_1S_2)^{1/2}$.

Для сдвинутых оценок $P(z_M \geq 0) = 1 - (R_1 - L_2)^2/(2S_1S_2)$ как для $S_1 > S_2$, так и для $S_1 < S_2$.

Напомним, что возможные значения F можно найти, используя соотношение $F = 1 - P$.

Пример

Рассмотрим задачу сравнения вложенных интервальных оценок показателей качества $I_1 = [0, 35]$, $I_2 = [10, 25]$ при равномерных распределениях вероятностей на каждом из интервалов для случая, когда большее значение показателя отвечает более предпочтительному состоянию. Проверяется гипотеза $I_2 \succ I_1$.

Метод прямого сравнения оценок дает $S_g = S_r = 10$, $K_{as} = 0$, следовательно, оценки эквивалентны по предпочтительности. Тот же вывод следует при сравнении по средним: $I_{1av} = I_{2av} = 17{,}5$ и по ФП, характеризующей безразличие ЛПР к риску, как по критерию ожидания ФП, так и при сравнении по детерминированным эквивалентам, совпадающим для линейной ФП со средними. Коэффициенты Гурвица, отвечающие последним, равны 0,5.

Пусть теперь предпочтения ЛПР описываются ранее рассмотренной ФП вида $U(D) = [\exp(CL_1) - \exp(CD)]/[\exp(CL_1) - \exp(CR_1)]$, где C > 0, если ЛПР склонен к риску, и C < 0 в противном случае. Тогда при $C = 1{,}5$ значение $E_1(U) = 0{,}019$, $E_2(U) = 0$, для детерминированных эквивалентов имеем: $D_{1d} = 32{,}359$, $D_{2d} = 22{,}294$. При $C = -1{,}5$ имеем $E_1(U) = 0{,}981$, $E_2(U) = 1$, для детерминированных эквивалентов имеем: $D_{1d} = 2{,}641$, $D_{2d} = 12{,}076$.

Таким образом, ЛПР, склонный к риску, предпочтет первую оценку, а несклонный вторую. Для рассматриваемого примера $P(z_M \geq 0) = 0{,}5$. Это означает, равновероятность противоположных гипотез о предпочтительности даже на «нулевом» уровне. Таким образом, рациональный ЛПР, безразличный к риску, не может предпочесть ни одну из оценок. Выбор может быть произведен лишь или осторожным или рискованным ЛПР.

Рассмотрим теперь аналогичную задачу для сдвинутых интервальных оценок $I_1 = [0, 35]$, $I_2 = [10, 55]$. Метод прямого сравнения оценок дает $S_g = 30$, $K_{as} = 0{,}55$ и, следовательно, имеются веские основания считать вторую оценку более предпочтительной. Аналогичный вывод имеет место при сравнении по средним, когда $I_{1av} = 17{,}5$; $I_{2av} = 32{,}5$, и по ФП, характеризующей безразличие ЛПР к риску, как по критерию ожидания ФП, так и при сравнении по детерминированным эквивалентам, совпадающим в линейном случае со средними.

Для ФП $U(D) = [\exp(CL_1) - \exp(CD)]/[\exp(CL_1) - \exp(CR_2)]$ имеем: при $C = 1{,}5$ $E_1(U) = 0$, $E_2(U) = 0{,}015$, для детерминированных эквивалентов получаем: $D_{1d} = 32{,}359$, $D_{2d} = 52{,}122$. При $C = -1{,}5$ $E_1(U) = 0{,}981$, $E_2(U) = 1$, для детерминированных эквивалентов имеем: $D_{1d} = 2{,}641$, $D_{2d} = 12{,}808$.

Итак, вторая оценка оказалась более предпочтительной. Для этого случая $P(z_M \geq 0) = 0{,}802$, что по-видимому достаточно, чтобы признать вторую оценку предпочтительней.

Заключение

Таким образом, мы рассмотрели ряд способов описания предпочтений ЛПР. Первый, основанный на задании ЛПР желаемого уровня шансов на реализацию гипотезы о предпочтительности одной интервальной оценки другой, подкупает своей простотой и доступностью для ЛПР. Недостаток способа состоит в том, что задача сравнения, вообще говоря, исчерпывающим образом не решается. В результате его применения лишь сужаются сопоставляемые интервалы по отношению к исходным оценкам.

Привлекательность метода расчета коэффициента уверенности в истинности проверяемой гипотезы о предпочтительности одной из оценок основана на его общности, и применимости ко всем сравниваемым парам в иерархии неопределенности интервальных оценок. Недостаток заключается в том, что рассчитываемый коэффициент является средней оценкой и, как все средние величины, отражают закономерности повторяющихся, массовых явлений, что далеко не всегда присуще практическим задачам, решаемым в условиях неопределенности.

Метод функций полезности – мощный инструмент представления предпочтений ЛПР при сравнении интервальных оценок. Однако задача выбора типа ФП и его спецификация для конкретного ЛПР и длительная и сложная процедура. Кроме того, критерием отбора здесь вновь выступают средние величины.

Рассмотрен также метод представления предпочтений ЛПР, согласно которому задание желательных для ЛПР уровней шансов на реализацию гипотезы о предпочтительности интервальной оценки предлагается осуществлять для интервально-вероятностной оценки разности исходных величин.

Благодарности

The paper is published with financial support by the project ITHEA XXI of the Institute of Information Theories and Applications FOI ITHEA (www.ithea.org) and the Association of Developers and Users of Intelligent Systems ADUIS Ukraine (www.aduis.com.ua).

Библиография

[Кини, 1981] Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь. 1981.

[Стернин, 2009] Стернин М.Ю., Шепелев Г.И. Сравнение полиинтервальных оценок в методе ОИО. // Intelligent support of decision making. Information Science and Computing. No.10, pp. 83-88. ITHEA. 2009.

[Стернин, 2010] Стернин М.Ю., Шепелев Г.И. Обобщенные интервальные экспертные оценки в принятии решений. // Доклады академии наук. Т. 432, № 1, сс. 33 – 34. 2010.

[Shepelyov, 2011] Shepelyov G., Sternin M. Methods for comparison of alternatives described by interval estimations// International Journal of Business Continuity and Risk Management. Vol. 2, No. 1. 2011.

Информация об Авторах

Михаил Стернин*– старший научный сотрудник Института системного анализа Российской академии наук, Россия, 117312, Москва, просп. 60-летия Октября, ИСА РАН; e-mail: mister@isa.ru*

***Геннадий Шепелёв** – заведующий лабораторией ИСА РАН; e-mail: gis@isa.ru*