О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НЕЧЕТКИХ ПЕРСЕПТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ЗАДАННЫХ НА РАЗНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ

Алексей Бычков, Евгений Иванов, Ольга Супрун

Abstract: *В статье получены критерии существования модели сходимости и расходимости с необходимостью 1 для систем конечномерных распределений последовательностей нечётких персептивных элементов, доказаны теоремы о не выполнении теоретико-возможностного аналога закона больших чисел для сходимости по возможности и сходимости с необходимостью 1.*

Keywords: *теория возможностей, нечёткая логика, сходимость нечётких персептивных элементов.*

ACM Classification Keywords: *G.3 – Probability and Statistics; I – Computing Methodologies, I.6 – Simulation and Modeling.*

Введение

В работах [Пытьев, 2000], [Бычков, 2007a], [Бычков, 2007b] для моделирования неопределенностей предлагается применять теорию возможностей. Основы этой теории заложены в [Zadeh, 1978] и монографии [Дюбуа, 1990]. В этих работах вводится понятие мер возможности, необходимости и основные аксиомы построения пространства возможностей.

Из монографии [Пытьев, 2000] известен теоретико-возможностный аналог закона больших чисел для сходимости распределений, но для других основных видов сходимости в теории возможностей (по возможности и с необходимостью 1) не было известно, имеет ли место такой аналог.

В этой статье исследуем свойства сходимости последовательностей нечетких персептивных элементов, заданных на разных возможностных пространствах и применим полученные результаты к исследованию теоретико-возможностного аналога закона больших чисел для сходимости по возможности и с необходимостью 1.

Основной результат

Пусть X – не пустое множество (пространство элементарных событий), $\mathbf{A}$ – класс подмножеств X, который содержит $\varnothing$ и X (множество составных событий), $\beta(X)$ – булеан множества X.

Определение 1. Полностью аддитивной мерой возможности на классе множеств $\mathbf{A}$ называется функция $P:\mathbf{A}\to[0,1]$, которая удовлетворяет условию

$$P\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)=\sup_{t\in T} P(A_t)$$

для каждого семейства $\{A_t \mid t\in T\}$ множеств из класса $\mathbf{A}$ такого, что $\bigcup_{t\in T} A_t\in\mathbf{A}$.

Мера возможности P называется нормированной, если $P(X)=1$ и $P(\varnothing)=0$.

В дальнейшем, если не сказано иначе, меры возможности будут считаться нормированными и полностью аддитивными.

Определение 2. P -моделью теории возможностей называется тройка $(X,\mathbf{A},P)$, где $\{0,X\}\subseteq\mathbf{A}\subseteq 2^X$, P -мера возможности на классе множеств $\mathbf{A}$. P -модель мы также будем называть пространством возможностей.

Для дальнейшего нам понадобится техника продолжения меры возможности с одного класса множеств на более широкий класс множеств. Проблема продолжения меры возможности рассматривалась многими авторами [Boyel,1995], [Wang, 1992], [Бычков, 2007a], [Пытьев, 2000]. Мы будем использовать следующий вариант теоремы о продолжении [Wang, 1992].

Определение 3. Функция $P^*(A)=\inf\left\{\sup_{t\in T} P(A_t) \mid \bigcup_{t\in T} A_t\supseteq A\right\}$, где нижняя грань берётся по семействам множеств $(A_t)_{t\in T}$ из класса $\mathbf{A}$, которые покрывают множество A, называется внешней мерой возможности, соответствующей функции $P:\mathbf{A}\to[0,1]$.

Теорема (О продолжении меры возможности).

1) Функцию P , определённую на классе множеств $\mathbf{A} \subseteq 2^X$ можно продолжить до меры возможности на $\beta(X)$ тогда и только тогда, когда для произвольного семейства множеств $(A_j)_{j\in J}$, $A_j \in \mathbf{A}$ и множества $A \in \mathbf{A}$ выполняется импликация

$$A \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j \Rightarrow P(A) \le \sup_{j\in J} P(A_j).$$

2) Если P имеет некоторое продолжение $\overline{P}$ до меры возможности на $\beta(X)$, то P^* является продолжением P до меры возможности на $\beta(X)$ и $\forall A \subseteq X\, \overline{P}(A) \le P^*(A)$.

Следствие. Если класс множеств $\mathbf{A}$ замкнут относительно конечных пересечений и P -мера возможности, то P^* является её (наибольшим) продолжением до меры возможности на $\beta(X)$.

Пространство возможностей $(X, \mathbf{A}, P)$ назовём регулярным, если $\mathbf{A} = \beta(X)$ и мера возможности $P: \beta(X) \to L$ является полностью аддитивной и нормированной.

Пусть задано метрическое пространство $\mathbf{M} = (M, d)$.

Определение 4. Нечётким персептивным элементом ξ на пространстве возможностей $(X, \mathbf{A}, P)$ называется $\mathbf{A}$ -измеримая тотальная функция $\xi: X \to \mathbf{M}$.

Определение 5. В случае, когда $\mathbf{A} = \beta(X)$, распределением нечёткого персептивного элемента ξ называется функция $f_\xi(y) = P\{\xi = y\}$, $y \in \mathbf{M}$.

Введем следующие обозначения:

$M^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} M^k$ – множество кортежей из элементов M (слов в алфавите M);

M^ω – множество последовательностей элементов M (ω-слов в алфавите M);

$a * b$ – конкатенация кортежей (слов) a и b, где $a \in M^+$, $b \in M^+ \cup M^\omega$;

$a \prec b$ – отношение “быть строгим префиксом”, т.е. $\exists c \in M^+ \cup M^\omega \;\; a * c = b$;

$\beta_{+}(M) = \bigcup_{n \ge 1} \beta(M^n)$ – множество слов фиксированной конечной длины;

$\beta_{\infty}(M) = \beta_{+}(M) \cup \beta(M^{\omega})$.

Для пар множеств $A \in \beta_{+}(M)$, $B \in \beta_{\infty}(M)$ введём обозначения:

$\mathrm{len}(A) = n$, если $A \subseteq M^n, A \neq \varnothing$;

$A * B = \{a * b \mid a \in A, b \in B\} \in \beta_{\infty}(M)$ – конкатенация всех пар элементов;

$\mathrm{Pref}_n(B) = \{a \in M^n \mid \exists b \;\; a * b \in B\}$ – множество префиксов длины n;

$\mathrm{Suff}(B) = \{w \mid \exists u \in M^* \;\; u * w \in A\}$ – множество суффиксов.

Определим следующие множества:

1) FD_M – множество полностью аддитивных нормированных мер возможности на $\beta(M)$. Его элементы будем называть (нечеткими) распределениями;

2) FD_M^{ω} – множество последовательностей распределений (элементов FD_M);

3) FS_M^{ω} – множество полностью аддитивных нормированных мер возможности на $\beta(M^{\omega})$. Его элементы будем называть (нечеткими) распределениями последовательности;

4) FS_M^{+} – множество полностью аддитивных нормированных мер возможности Q_{+} на $\beta_{+}(M)$, которые удовлетворяют условию $Q_{+}(Y) = Q_{+}(Y * M)$ для всех $Y \in \beta_{+}(M)$. Его элементы будем называть системами конечномерных распределений последовательности.

Определим тотальный оператор $Fin : FS_M^{\omega} \to FS_M^{+}$ равенством

$$(Fin(Q))(Y) = Q(Y * M^{\omega}), \quad Y \in \beta_{+}(M).$$

Введем на множестве M^{ω} топологию: открытые множества имеют вид $W * M^{\omega}$, где $W \subseteq M^{+}$ (топология произведения). Множества из $BT_M^0 = \{u * M^{\omega} \mid u \in M^*\}$ будем считать (открытыми) шарами. Класс открытых множеств будем обозначать как $BT_M = \{U * M^{\omega}, U \in \beta_{+}(M)\}$.

Утверждение 1. Выполняются следующие свойства:

1) класс BT_M замкнут относительно конечных объединений и пересечений;

2) тотальная функция $Q^0_\omega : BT_M \to L$, определенная равенством $Q^0_\omega(U * M^\omega) = Q_+(U)$, является мерой возможности на BT_M. Будем ее обозначать как $Inf(Q_+)$;

3) для $Q_+ \in FS^+_M$ и $Q_\omega \in FS^\omega_M$, $Fin(Q_\omega) = Q_+$ тогда и только тогда, когда $Q_\omega |_{BT_M} = Inf(Q_+)$.

Доказательство.

1) Следует из равенства $U_1 * M^\omega \circ U_2 * M^\omega = (U_1 \circ U_2) * M^\omega$, где $\circ$ обозначает $\cup$ или $\cap$.

2) Пусть $U * M^\omega = U' * M^\omega$ для некоторых $U \in M^k, U' \in M^n$, считаем $k \le n$. Тогда $U * M^{n-k} = \mathrm{Pref}_n(U * M^\omega) = \mathrm{Pref}_n(U' * M^\omega) = U'$ и, следовательно: $Q_+(U) = Q_+(U')$.

Поэтому функция Q^0_ω является корректно определенной. Рассмотрим семейство множеств:

$$Y_t = U_t * M^\omega \in BT_M, t \in T \text{ такое, что } Y = \bigcup_{t \in T} Y_t = U * M^\omega \in BT_M .$$

Пусть $n = \mathrm{len}(U)$. Тогда $U = \bigcup_i U_i * M^{n-len(U_i)}$, где объединение по таким i, что $\mathrm{len}(U_i) \le n$. И соответственно:

$$Q^0_\omega(Y) = Q_+(U) = \sup_i Q_+(U_i * M^{n-len(U_i)}) = \sup_i Q_+(U_i) = \sup_{t \in T} Q_+(U_t) = \sup_{t \in T} Q^0_\omega(Y_t).$$

Следовательно, Q^0_ω является полностью аддитивной мерой возможности на BT_M.

3) Необходимость. Пусть $Fin(Q_\omega) = Q_+$. Тогда $Q_\omega(U * M^\omega) = Q_+(U) = Inf(Q_+)(U * M^\omega)$.

Достаточность. Пусть $Q_\omega |_{BT_M} = Inf(Q_+)$. Тогда $Q_+(U) = Inf(Q_+)(U * M^\omega) = Q_\omega(U * M^\omega)$, откуда, по определению, $Fin(Q_\omega) = Q_+$.

Утверждение доказано.

Введём такое обозначение: если $\xi_n : X \to M$ – последовательность нечетких персептивных элементов, то нечеткий персептивный элемент $\xi_{(n)} : X \to M^{\omega}$ определяется как $\xi_{(n)}(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x), \ldots)$.

Утверждение 2. Пусть $(X, 2^X, P)$ – пространство возможностей, $\xi_n : X \to M$ – последовательность нечетких персептивных элементов, $\xi : X \to M$ – нечёткий персептивный элемент. Тогда $P_{\xi} \in FD_M$, $P_{\xi_{(n)}} \in FS_M^{\omega}$ и $Fin(P_{\xi_{(n)}}) \in FS_M^{+}$.

Доказательство. Очевидно.

Определение 6. Пара (PS, ξ), где PS – регулярное пространство возможностей $(X, 2^X, P)$, $\xi : X \to M$ – нечеткий персептивный элемент, называется моделью распределения $Q \in FD_M$, если $Q \equiv P_{\xi}$.

Аналогично пара $(PS, \xi_{(n)})$, $\xi_{(n)} : X \to M^{\omega}$ называется моделью распределения последовательности $Q_{\omega} \in FS_M^{\omega}$.

Моделью последовательности распределений $Q_{(n)} \in FD_M^{\omega}$ называется пара $(PS, \xi_{(n)})$, $\xi_{(n)} : X \to M^{\omega}$, такая, что $\forall n \in \mathbf{N} \quad Q_n \equiv P_{\xi_n}$.

Моделью системы конечномерных распределений последовательности $Q_{+} \in FS_M^{+}$ называется пара $(PS, \xi_{(n)})$, такая, что $Q_{+} = Fin(P_{\xi_{(n)}})$.

Определение 7. Моделью сходимости с необходимостью 1 системы конечномерных распределений последовательности Q_{+} называется такая модель $(PS, \xi_{(n)})$ системы распределений Q_{+}, в которой $\xi_{(n)}$ сходится с необходимостью 1.

Аналогично определяться понятия модели расходимости с необходимостью 1 и модели сходимости (расходимости) с положительной необходимостью.

Пусть $(X, \mathbf{A}, P)$ – пространство возможностей, в котором класс множеств $\mathbf{A}$ замкнут относительно конечных пересечений, а P – нормированная мера возможности. Пусть P^{*} – внешняя мера возможности, соответствующая P.

Определим функцию $P_* : 2^X \to L$ для каждого $D \subseteq X$ равенством:

$$P_*(D) = \sup\{P(A) \mid A \in \mathbf{A}, P(A) > P^*(A \setminus D)\}$$

(в этой записи предполагается, что $\sup \varnothing = 0$).

Лемма 1. (О продолжении меры возможности с условием).

Пусть D – подмножество X, $\delta \in L$. Тогда P можно продолжить до меры возможности $\bar{P}$ на 2^X такой, что $\bar{P}(D) = \delta$ тогда и только тогда, когда $\delta \le P^*(D)$ и выполняется хотя бы одно следующих условий:

1) если A, $(B_t)_{t\in T}$ – множества из класса $\mathbf{A}$ такие, что $A \subseteq D \cup \bigcup_{t\in T} B_t$, то $P(A) \le \delta \vee \sup\limits_{t\in T} P(B_t)$;

2) $\forall A \in \mathbf{A}\ P(A) > \delta \Rightarrow P^*(A \setminus D) = P(A)$;

3) $P_*(D) \le \delta$.

Доказательство. Докажем утверждение леммы для условия 1.

Необходимость. Предположим, что продолжение $\bar{P}$ существует. Выберем множества $A, B_t \in \mathbf{A}$, такие, что $A \subseteq D \cup \left(\bigcup\limits_{t\in T} B_t\right)$. Тогда

$$\bar{P}(A) \le \bar{P}(D) \vee \sup_{t\in T} \bar{P}(B_t) \le \delta \vee \sup_{t\in T} P(B_t).$$

Также, $\delta = \bar{P}(D) \le P^*(D)$.

Достаточность. Положим $\mathbf{A}^D = \mathbf{A} \cup \{D\}$. Определим функцию P на классе $\mathbf{A}^D$ равенствами $P(D) = \delta$ и $P(A) = P_0(A)$ при $A \in \mathbf{A}$. Пусть A^D и $(A_t^D)_{t\in T}$ – элементы $\mathbf{A}^D$. Докажем, что из включения $A^D \subseteq \bigcup\limits_{t\in T} A_t^D$ следует $P(A^D) \le \sup\limits_{t\in T} P(A_t^D)$.

Для этого рассмотрим 4 случая:

1) элементы A^D и $(A_t^D)_{t\in T}$ принадлежат $\mathbf{A}$. Тогда $A^D = \bigcup\limits_{t\in T} \left(A_t^D \cap A^D\right)$ и

$$P(A^D) = \sup_{t\in T} P(A_t^D \cap A^D) \le \sup_{t\in T} P(A_t^D).$$

2) $A^D = D$, а элементы $(A_t^D)_{t\in T}$ принадлежат $\mathbf{A}$. Тогда множества A_t^D образуют покрытие множества D, поэтому $P(A^D) = \delta \le P^*(D) \le \sup_{t\in \mathbf{A}} P(A_t^D)$.

3) $A^D \in \mathbf{A}$ и среди элементов $(A_t^D)_{t\in T}$ есть множество D. Пусть $T^0 \subseteq T$ – множество индексов t, таких, что $A_t^D \in \mathbf{A}$ (возможно пустое). Тогда по условию леммы:

$$P(A^D) = P_0(A^D) \le \delta \vee \sup_{t\in T^0} P_0(A_t^D) = \sup_{t\in T} P(A_t^D).$$

4) $A^D = D$ и среди элементов $(A_t^D)_{t\in T}$ есть множество D. Тогда $P(A^D) \le \sup_{t\in T} P(A_t^D)$.

Таким образом, выполняются условия теоремы о продолжении меры возможности для функции P на классе $\mathbf{A}^D$, поэтому существует продолжение P до меры возможности $\bar{P}$ на 2^X. Мера возможности $\bar{P}$ является продолжением P_0 и удовлетворяет условию $\bar{P}(D) = \delta$.

Докажем, что из условия 1 следует условие 2.

Пусть $A \in \mathbf{A}$ и $P(A) > \delta$. Пусть $(B_t)_{t\in T}$ – произвольное покрытие множества $A \setminus D$ элементами класса $\mathbf{A}$. Тогда $A \setminus D \subseteq \bigcup_{t\in T} B_t$, $A \subseteq D \cup \bigcup_{t\in T} B_t$. И по условию 1: $P(A) \le \delta \vee \sup_{t\in T} P(B_t)$. Учитывая, что $P(A) > \delta$, получаем $P(A) \le \sup_{t\in T} P(B_t)$.

Таким образом, $P(A) \le P^*(A \setminus D)$, откуда $P^*(A \setminus D) = P(A)$.

Докажем, что из условия 2 следует условие 3.

Из условия 2 следует, что для любого множества $A \in \mathbf{A}$, такого, что $P(A) > P^*(A \setminus D)$ выполняется неравенство $P(A) \le \delta$. Тогда $P_*(D) = \sup\{P(A) \mid A \in \mathbf{A}, P(A) > P^*(A \setminus D)\} \le \delta$.

Докажем, что из условия 3 следует условие 1.

Пусть $P_*(D) \le \delta$ и A, $(B_t)_{t\in T}$ – множества из класса $\mathbf{A}$, такие, что $A \subseteq D \cup \bigcup_{t\in T} B_t$.

Тогда $A \setminus D \subseteq \bigcup_{t \in T} B_t$, т.е. множества $(B_t)_{t\in T}$ образуют покрытие множества $A \setminus D$, поэтому $P^*(A \setminus D) \le \sup_{t\in T} P(B_t)$. Если $P(A) \le P^*(A \setminus D)$, то $P^*(A \setminus D) \le \sup_{t\in T} P(B_t)$.

Если же $P(A) > P^*(A \setminus D)$, то по условию 3, $P(A) \le \delta$. В обоих случаях выполняется неравенство:

$$P(A) \le \delta \vee \sup_{t\in T} P(B_t).$$

Лемма доказана.

Следствие. Если $A \in \mathbf{A}$, то $P_*(A) = P(A)$.

Доказательство. Поскольку P имеет продолжение до меры возможности на 2^X и любое такое продолжение $\bar{P}$ удовлетворяет условию $\bar{P}(A) = P(A)$, то $P_*(A) = P(A) = P^*(A)$.

Примечание. Функция P_* может не быть мерой возможности, как показывает следующий пример. Положим $X = \{0,1\}$, $\mathbf{A} = \{\varnothing, X\}$, $P(\varnothing) = 0$, $P(X) = 1$. Тогда $P^*(\{0\}) = P^*(\{1\}) = 1$ и $P_*(\{0\}) = P_*(\{1\}) = 0$, но $P_*(\{0,1\}) = 1$.

Определение 8. Распределение $Q \in FD_M$ называется вырожденным, если $Q(\{y\}) > 0$ не более чем для одного элемента $y \in M$.

Утверждение 3. Выполняются следующие свойства:

1) каждое распределение $Q \in FD_M$ имеет модель;

2) каждое распределение последовательности $Q_\omega \in FS_M^\omega$ имеет модель;

Доказательство.

1) Положим $X = \{(y,p) \mid y \in M, p = Q(\{y\})\}$, $P(A) = \sup_{(y,p)\in A} p$, $\xi((y,p)) = y$.

Тогда $P_\xi(Y) = P\{(y,p) \mid \xi((y,p)) \in Y\} = \sup\{Q\{y\} \mid y \in Y\} = Q(Y)$, $Y \subseteq M$.

2) Доказательство аналогично пункту 1.

Утверждение доказано.

Лемма 2. Пусть Q_+ – система конечномерных распределений последовательности. Тогда каждая ее модель является моделью сходимости с необходимостью 1 тогда и только тогда, когда для каждой расходящейся последовательности (y_n) выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} Q_+(\{(y_1,..,y_n)\})=0$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что существует расходящаяся последовательность $y^0=(y_1^0,y_2^0,..)\in M^\omega$, такая, что $\delta=\lim\limits_{n\to\infty} Q_+(\{(y_1^0,..,y_n^0)\})>0$.

Пусть Q^* – внешняя мера возможности, соответствующая мере возможности $Inf(Q_+)$. Тогда $Q^*(\{y_{(\cdot)}\})=\inf\limits_{n>0} Inf(Q_+)((y_1,..,y_n)*M^\omega)=\lim\limits_{n\to\infty} Q_+\{(y_1,..,y_n)\}$ для произвольного $y_{(\cdot)}\in M^\omega$. Отсюда $Q^*(\{y^0\})=\delta>0$, и поскольку Q^* имеет модель, которая является моделью Q_+, то Q_+ имеет модель которая, не является моделью сходимости с необходимостью 1, что противоречит предположению и завершает доказательство необходимости.

Достаточность. Для каждой расходящейся последовательности (y_n) выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} Q_+(\{(y_1,..,y_n)\})=0$, и поэтому $Q^*(\{(y_1,y_2,..)\})=0$. Поскольку для произвольного продолжения Q_ω меры возможности $Inf(Q_+)$ на булеан множества M^ω выполняется неравенство $Q_\omega\{(y_1,y_2..)\}\le Q^*\{(y_1,y_2..)\}$, то $Q_\omega\{(y_1,y_2..)\}=0$. Следовательно, произвольная модель системы конечномерных распределений Q_+ является моделью сходимости с необходимостью 1.

Лемма доказана.

Следствие. Если пространство M полно и ограничено, то условие леммы можно заменить таким: $Q_+\{(y_1,..,y_N)\}\sup\limits_{n,m>N} d(y_n,y_m)\to 0$ при $N\to\infty$ для произвольной последовательности (y_n).

Доказательство. Пусть для каждой расходящейся последовательности (y_n) выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} Q_+(\{(y_1,..,y_n)\})=0$. Тогда

$$\lim_{N\to\infty} Q_+\{(y_1,..,y_N)\}\sup_{n,m>N} d(y_n,y_m)=\lim_{N\to\infty} Q_+\{(y_1,..,y_N)\}\lim_{N\to\infty}\sup_{n,m>N} d(y_n,y_m),$$

поскольку пространство M ограничено.

Если последовательность y_n сходится, то из полноты пространства M получаем равенство $\lim_{N\to\infty} \sup_{n,m>N} d(y_n, y_m) = 0$.

Если последовательность y_n расходится, то $\lim_{N\to\infty} Q_+\{(y_1,..,y_N)\} = 0$. В обоих случаях

$$Q_+\{(y_1,..,y_N)\} \sup_{n,m>N} d(y_n, y_m) \to 0 .$$

Наоборот, если $Q_+\{(y_1,..,y_N)\} \sup_{n,m>N} d(y_n, y_m) \to 0$ для каждой последовательности (y_n), то для каждой расходящейся последовательности (y_n) выполняется неравенство $\lim_{N\to\infty} \sup_{n,m>N} d(y_n, y_m) > 0$, откуда $Q_+\{(y_1,..,y_N)\} \to 0$.

Следствие доказано.

Как показывает следующий пример, условие леммы 2 не эквивалентно условию существования модели сходимости по возможности (т.е. наличие модели сходимости по возможности является лишь достаточным условием для того, чтобы, каждая модель сходимости являлась моделью сходимости с необходимостью 1).

Пример 1. Система конечномерных распределений последовательности, которая не имеет модели сходимости по возможности, и при этом все ее модели являются моделями сходимости с необходимостью 1.

Положим $M = \{0,1\}$ с дискретной метрикой и

$$Q_+(\{(y_1,..,y_n)\}) = \begin{cases} 1, & y_1 + .. + y_n \le 1, \\ 0, & y_1 + .. + y_n > 1. \end{cases}$$

Тогда в каждой расходящейся последовательности (y_n) имеется более 1 единицы и, следовательно, $\lim_{n\to\infty} Q_+(\{(y_1,..,y_n)\}) = 0$. По лемме 2, каждая модель Q_+ является моделью сходимости с необходимостью 1.

Пусть последовательность нечетких персептивных элементов ξ_n имеет распределение Q_+. Тогда для каждого $n \ge 1$, $P\{\sup_p d(\xi_{n+p}, \xi_n) \ge 1\} \ge Q_+(\{0^n 1\}) = 1$, поэтому $P\{\sup_p d(\xi_{n+p}, \xi_n) \ge 1\} \to 1$ при $n \to \infty$ и, следовательно, последовательность ξ_n не является фундаментальной по возможности. Поскольку пространство M полное, то ξ_n не является сходящейся по возможности. Следовательно, Q_+ не имеет модели сходимости по возможности.

Лемма 3. Пусть Q_+ – система конечномерных распределений последовательности. Она имеет модель сходимости с необходимостью 1 тогда и только тогда, когда для каждого $\delta > 0$, $k \in N$ и элементов $y_1,..,y_k \in M$ существует сходящаяся последовательность $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} Q_+\{(y_1,..,y_n)\} + \delta > Q_+\{(y_1,..,y_k)\}.$$

Доказательство. Применим лемму 1 к случаю, когда $X = M^{\omega}$, $\mathbf{A} = BT_M^0$, D – множество расходящихся последовательностей. Меру возможности P положим равной $Inf(Q_+)$. Тогда $P^*\{(y_1, y_2..)\} = \lim_{n\to\infty} Q_+\{(y_1,..,y_n)\}$, и условием существования модели сходимости с необходимостью 1 для Q_+ является условие $\forall A \in \mathbf{A}$ $P^*(A \setminus D) = P(A)$, то есть каждого $k \in N$ и элементов $y_1,..,y_k \in M$, $\sup\{\lim_{n\to\infty}\{(y_1,..,y_n)\} \mid (y_{k+1}, y_{k+2},..)$ сходящаяся последовательность$\} = Q_+\{(y_1,..,y_k)\}$. Отсюда получаем условие леммы.

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть Q_+ – система конечномерных распределений последовательности. Тогда она имеет модель расходимости с необходимостью 1 тогда и только тогда, когда для каждого $\delta > 0$, $k \in N$ и элементов $y_1,..,y_k \in M$ существует расходящаяся последовательность $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} Q_+\{(y_1,..,y_n)\} + \delta > Q_+\{(y_1,..,y_k)\}.$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы.

Следующий пример показывает, что условия лемм 3 и 4 не являются взаимно исключающими.

Пример 2. Система конечномерных распределений последовательности, которая имеет модель сходимости с необходимостью 1 и модель расходимости с необходимостью 1.

Определим систему Q_+ таким образом, что $Q_+(\{(y_1,\dots,y_n)\})=1$ для каждого $n\geq 1$ и $y_1,..,y_n\in M$. Тогда Q_+ является системой конечномерных распределений последовательности. Поскольку для произвольной последовательности y_n и индекса k выполняется

$$\lim_{n\to\infty} Q_+(\{(y_1,\dots,y_n)\}) = Q_+\{(y_1,\dots,y_k)\},$$

то по леммам 3 и 4, Q_+ имеет как модель сходимости с необходимостью 1, так и модель расходимости с необходимостью 1.

Применим полученные выше результаты для того, чтобы определить, имеет ли место теоретико-возможностный аналог закона больших чисел.

Определение 9. Две последовательности нечётких персептивных элементов $\xi_n : X\to R$ и $\xi'_n : X'\to R$, заданные на пространствах возможностей $(X,2^X,P)$ и $(X',2^{X'},P')$ называются эквивалентными по конечномерным распределениям, если для любых $n\geq 1$, $y_1,\dots,y_n\in R$ выполняется

$$P\{\xi_1=y_1,\dots,\xi_n=y_n\} = P'\{\xi'_1=y_1,\dots,\xi'_n=y_n\}$$

Теорема 1. Пусть ξ_n – последовательность независимых одинаково распределенных нечетких персептивных элементов на пространстве возможностей $(X,2^X,P)$. Тогда:

1) существует пространство возможностей $(X',2^{X'},P')$ и последовательность нечетких персептивных элементов ξ'_n на нем, эквивалентная по конечномерным распределениям последовательности ξ_n такая, что последовательность $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi'_i$ сходится с необходимостью 1;

2) если распределение f_ξ персептивного элемента ξ_1 не вырождено, то существует пространство возможностей $(X'',2^{X''},P'')$ и последовательность нечетких персептивных элементов ξ''_n на нем, эквивалентная по конечномерным распределениям последовательности ξ_n такая, что последовательность $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi'_i$ расходится с положительной необходимостью.

Доказательство.

1) Положим Q_+ – система конечномерных распределений последовательности $\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$.

a) Воспользуемся леммой 3. Пусть выбрано произвольное $\delta > 0$, $k \in N$ и элементы $z_1,\dots,z_k \in M$. Поскольку $\sup_y f_\xi(y) = 1$, то существует y^* , для которого $f_\xi(y^*) > 1-\delta$.

Положим $z_{j+1} = \frac{y^* + jz_j}{j+1}$ при $j \ge k$.

b) При $n > k$, $Q_+\{(z_1,\dots,z_n)\} = P\{\xi_i = y_i, i = 1,\dots,n\}$, где $z_i = \frac{1}{i}\sum_{j\le i} y_j \; \forall i = 1,\dots,n$.

Поэтому $y_i = iz_i - (i-1)z_{i-1}$. Учитывая независимость ξ_n и определение элементов $z_{j+1}, j \ge k$, получаем:

$$Q_+\{(z_1,\dots,z_n)\} = f_\xi(z_1) \wedge f_\xi(2z_2 - z_1) \wedge \dots \wedge f_\xi(nz_n - z_{n-1}) =$$

$$= Q_+\{(z_1,\dots,z_k)\} \wedge f_\xi(y^*) \wedge \dots \wedge f_\xi(y^*) .$$

Из последнего равенства следует, что

$$\lim_{n\to\infty} Q_+\{(z_1,\dots,z_n)\} \ge Q_+\{(z_1,\dots,z_k)\} \wedge (1-\delta) \text{, и}$$

$$\lim_{n\to\infty} Q_+\{(z_1,\dots,z_n)\} + \delta \ge Q_+\{(z_1,\dots,z_k)\} .$$

Кроме того, $z_{j+1} - y^* = \frac{y^* + jz_j}{j+1} - y^* = \frac{j(z_j - y^*)}{j+1}$ при $j \ge k$, поэтому

$$\left|z_n - y^*\right| = \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\dots\frac{k}{k+1}\left|z_k - y^*\right| = \frac{k}{n}\left|z_k - y^*\right| \to 0 \text{ при } n \to \infty .$$

Из чего следует сходимость последовательности z_n. Поскольку $\delta > 0$ и $z_1,..,z_k \in M$ были выбраны произвольно, то по лемме 3, Q_+ имеет модель $((X',P'),\eta'_n)$ сходимости с необходимостью 1.

Положим $\xi'_n = n\eta'_n - (n-1)\eta'_{n-1}, n \geq 1$. Для произвольных y_i выполняется равенство:

$$P'\{\xi'_i = y_i, i = 1,\ldots,n\} = P'\{\eta'_i = z_i, i = 1,\ldots,n\} = P\{\eta_i = z_i, i = 1,\ldots,n\} = P\{\xi_i = y_i, i = 1,\ldots,n\},$$

где $z_i = \sum_{j=1}^{i} y_j, i = 1,\ldots,n$.

Поэтому последовательность ξ'_n эквивалентна по конечномерным распределениям последовательности ξ_n.

2) Поскольку распределение ξ_1 не вырождено, то существуют вещественные числа a,b, $a \neq b$, такие, что $f_{\xi_1}(a) > 0$ и $f_{\xi_1}(b) > 0$. Построим последовательность $y = \bigotimes_{k\geq 1}(a^{2^k} * b^{2^k}) \in R^{\omega}$, где $\otimes$ и $*$ обозначают конкатенацию элементов для образования слова или ω-слова. Положим $z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$. Тогда

$$Q_+(\{(z_1,\ldots,z_n)\}) \geq P\{\xi_i = y_i, i = 1,\ldots,n\} = \min_{i=1,\ldots,n} f_{\xi}(y_i) = f_{\xi}(a) \wedge f_{\xi}(b),$$

и соответственно, $\lim_{n\to\infty} Q_+(\{(z_1,\ldots,z_n)\}) \geq f_{\xi}(a) \wedge f_{\xi}(b) > 0$.

Положим $n = 2(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^s)$, $p = 2^{s+1}$. Тогда

$$\left|z_{n+p} - z_n\right| = \frac{1}{n+p}\left|\sum_{i=1}^{n+p} y_i - \frac{n+p}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right| = \frac{1}{n+p}\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} y_i - \frac{p}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right| =$$

$$= \frac{1}{n+p}\left|pa - \frac{p}{n}\frac{n}{2}(a+b)\right| = \frac{p}{n+p}\frac{|a-b|}{2} = \frac{2^{s+1}}{2(2^{s+1}-1)+2^{s+1}}\frac{|a-b|}{2} = \frac{1}{3-1/2^s}\frac{|a-b|}{2}.$$

Поэтому для каждого n, $\sup\limits_{p>0}\left|z_{n+p}-z_n\right| \geq \frac{|a-b|}{6}$ и, следовательно, последовательность z_n расходится. Тогда по лемме 2, не каждая модель Q_+ является моделью сходимости с необходимостью 1 и, следовательно, Q_+ имеет модель $((X'',P''),\eta''_n)$ расходимости с положительной необходимостью. Аналогично пункту 1, делаем вывод, что последовательность $\xi''_n = n\eta''_n - (n-1)\eta''_{n-1},\, n \geq 1$ эквивалентна по конечномерным распределениями последовательности ξ_n.

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $\xi_n : X \to \mathbf{R}$ – последовательность независимых одинаково распределенных нечетких персептивных элементов на одном пространстве возможностей. Тогда последовательность $\eta_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ сходится по возможности тогда и только тогда, когда распределение ξ_n вырождено.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что η_n сходится с необходимостью 1, но распределение ξ_n не вырождено. Тогда по критерию типа Коши для сходимости с необходимостью 1, выполняется соотношение

$$\forall c > 0 : \lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{m>n}\left|\eta_m - \eta_n\right| > c\right) = 0 .$$

Пусть $f(y)$ – функция распределения нечёткого персептивного элемента ξ_n. Поскольку распределение не вырождено, то выберем пару точек $y_1 \neq y_2$, для которых $f(y_i) > 0,\ i = 1,2$. Тогда при $m = 2n$, для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство:

$$P\left\{\left|\eta_m - \eta_n\right| \geq \left|y_1 - y_2\right| / 2\right\} \geq P\{\eta_n = y_1, \eta_m = (y_1 + y_2)/2\} \geq$$

$$\geq P\{\xi_1 = .. = \xi_n = y_1, \xi_{n+1} = .. = \xi_{2n} = y_2\} = \min\{f(y_1), f(y_2)\} > \varepsilon .$$

Положив $c = |y_1 - y_2| / 4$, получаем, что для каждого $n \geq 1$ существует $x_n \in X_\varepsilon$, для которого $\sup_{m>n} |\eta_m(x_n) - \eta_n(x_n)| > c$. Следовательно, $\underline{\lim}_{n\to\infty} P\left(\sup_{m>n} |\eta_m - \eta_n| > c\right) \geq \varepsilon$ – противоречие. Таким образом, распределение ξ_n вырождено.

Достаточность. Если $P\{\xi_n \in M\} = 0$, то утверждение очевидно. Пусть распределение ξ_n вырождено, $P_{\xi_n}(\{y\}) = 0$ и $\forall y \neq y_0, P_{\xi_n}(\{y_0\}) > 0$. Тогда нечёткие персептивные элементы ξ_n и η_n равны с необходимостью 1 константе y_0, поэтому $P\left(\sup_{m>n} |\eta_m - \eta_n| > c\right) = 0$ при $c > 0$.

Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 показывают, что для сходимости по возможности и для сходимости с необходимостью 1, теоретико-возможностный аналог закона больших чисел не выполняется.

Заключение

В статье получены критерии существования модели сходимости и расходимости с необходимостью 1 для систем конечномерных распределений последовательностей нечётких персептивных элементов (леммы 2-4). Кроме того, доказаны теоремы о не выполнении теоретико-возможностного аналога закона больших чисел для сходимости по возможности и сходимости с необходимостью 1.

Литература

[Boyel,1995] L.Boyel, G. de Cooman, E. E. Kerre. On the extension of P-consintent mappings // Proc. FAPT '95, Gent, 1995. – pp. 88 – 98

[Zadeh, 1978] L.A. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy Sets and Systems, 1978. Vol. 1, pp. 3-28.

[Wang, 1992] Z.Wang, G. J. Klir. Fuzzy Measure Theory. Plenum Press, New York, 1992.

[Бычков, 2007a] А.С. Бычков, К.С.Колесников. Построение (PN)-модели теории возможностей // Вестник Киевского университета, Серия: физико-математические науки, 2007. №1, с. 134-138.

[Бычков, 2007b] А.С. Бычков. Об одном развитии теории возможностей // Кибернетика и системный анализ, 2007. №5, с. 67-72.

[Дюбуа, 1990] Д.Дюбуа, А.Прад. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. — М.: Радио и связь, 1990. — 288 С.

[Пытьев, 2000] Ю.Пытьев. Возможность. Элементы теории и применение. УРСС,2000. —192 С.

[Пытьев, 2004] Ю.Пытьев. Неопределённые нечёткие модели и их применения // Интеллектуальные системы, 2004. Т. 8, вып. 1-4, с.147-310.

Authors' Information

Алексей Бычков *– к.ф.-м.н., заведующий кафедрой программирования и компьютерной техники факультета информационных технологий Киевского национального университета имени Тараса Шевченка; ул. Ломоносова 81А, 03022, Киев, Украина; e-mail: bos.knu@gmail.com*

Основная область научных интересов: исследование гибридных автоматов как моделей непрерывно-дискретных процессов; построение согласованной теории возможностей, нечетких персептивных величин и процессов; математические основы моделирования нечетких сложных систем; применение математических методов в биологии, медицине и экономике

Евгений Иванов *– к.ф.-м.н., ассистент кафедры программирования и компьютерной техники факультета информационных технологий Киевского национального университета имени Тараса Шевченка; ул. Ломоносова 81А, 03022, Киев, Украина; e-mail: ivanov.eugen@gmail.com*

Основная область научных интересов: семантика языков программирования; формальные методы; математическая теория систем; гибридные (дискретно-неперервыеі) системы

Ольга Супрун *– к.ф.-м.н., доцент кафедры программирования и компьютерной техники факультета информационных технологий Киевского национального университета имени Тараса Шевченка; ул. Ломоносова 81А, 03022, Киев, Украина; e-mail: o.n.suprun@gmail.com*

Основная область научных интересов: математическое моделирование и вычислительные методы; нечеткие величины и процессы; гибридные модели непрерывно-дискретных процессов

About convergence of fuzzy perceptive elements sequences, defined on different opportunities spaces

Alexei Bychkov, Eugene Ivanov, Olha Suprun

***Abstract**:* Criteria for the existence of a model of convergence and divergence with the need 1 for systems of finite-element sequences of fuzzy perceptive elements are obtained in this paper. Theorems about failing of the theoretic-possibility analogue of the law of large numbers for converge with the opportunities and the converge with need 1 are proven.

***Keywords**: theory of possibility, fuzzy logic, convergence of fuzzy perceptive elements.*