КОМПРОМИСС И КОНСЕНСУС В ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Альберт Воронин

Аннотация*: Рассматриваются два основных подхода к решению многокритериальных задач принятия решений и векторной оптимизации систем управления. Один из них состоит в формализации многокритериальных задач при заданных (фиксированных) ограничениях и ресурсных возможностях системы. Второй подход показывает, какие новые перспективы открываются перед разработчиками, если они имеют возможность в определенных пределах распоряжаться ресурсными запасами (ограничениями) многокритериальных систем.*

Ключевые слова*: схемы компромиссов, консенсус, ресурсы и ограничения, противоречивость критериев, принцип рациональной организации.*

ACM Classification Keywords*: H.1 Models and Principles – H.1.1 – Systems and Information Theory; H.4.2 – Types of Systems.*

Компромисс

В теории принятия многокритериальных решений рассматриваются два основных подхода к решению задач векторной оптимизации сложных систем. Первый состоит в формализации многокритериальных задач при *заданных* (фиксированных) ограничениях и ресурсных возможностях системы. Второй подход предполагает, что разработчики имеют возможность в определенных пределах *распоряжаться* ресурсными запасами (ограничениями) многокритериальных систем.

Для конструктивного решения многокритериальной задачи в рамках *первого* подхода в различных частных постановках осуществляется структуризация некоторых понятий. Для этого делаются дополнительные частные предположения, помогающие решить следующие проблемы векторной оптимизации:

– нормализация частных критериев;
– определение области решений, оптимальных по Парето;
– выбор схемы компромиссов;
– учет приоритета.

Для успешного выполнения поставленной цели при заданных условиях функционирования каждая система обладает определенными запасами и ресурсами (по прочности, термостойкости, количеству топлива и пр.), которые являются *ограниченными*. Собственно, это и служит физической причиной тех ограничений, которые фигурируют в задачах оптимизации, да и причиной включения тех или иных частных критериев в вектор эффективности. Для концепции первого подхода характерно то, что ограничения и ресурсные возможности системы *заданы и фиксированы.*

Трудности решения большинства проблем векторной оптимизации носят не вычислительный, а концептуальный характер (речь идет не о том, *как* найти оптимальное решение, а *что* следует под ним понимать). Поэтому разработка формального аппарата решения многокритериальных задач представляет собой одну из наиболее трудных проблем современной теории управления и принятия решений.

В отличие от других проблем векторной оптимизации, только задача определения области Парето является строго объективной и решается научно обоснованными методами без привлечения каких-либо эвристик. Однако область компромиссов представляет собой *множество* точек, из которых в большинстве случаев необходимо выбрать лишь *одну*, которая и является искомым многокритериальным решением.

Всякое сужение области эффективных решений, а тем более выбор единственного из них принципиально требует привлечения дополнительной субъективной информации от лица, принимающего решение (ЛПР), или группы людей (экспертов), которые участвуют в решении многокритериальной задачи. Причина в том, что эффективные точки несравнимы между собой формально. Эта дополнительная информация заключается в ответе на вопрос: сколькими единицами выигрыша по одному критерию можно, по мнению ЛПР, компенсировать неизбежный проигрыш единицы по другому (другим) в заданной ситуации? На основании этой дополнительной информации формулируется конкретная схема компромиссов для данной многокритериальной задачи и в итоге находится искомое решение.

Таким образом, при первом подходе определение многокритериального решения по своей природе компромиссно, ситуационно и принципиально основано на использовании субъективной информации. Получив эту информацию и выбрав схему компромиссов, можно перейти от общего векторного выражения к скалярной свертке частных критериев, что является основой для построения конструктивного аппарата решения многокритериальных задач. Если используется способ скалярной свертки, то математически модель решения задачи векторной оптимизации представляется в виде

$$x^* = \arg\min_{x\in X} Y\left[y_0\left(x\right)\right],$$

где $Y(y_0)$ – скалярная функция, имеющая смысл скалярной свертки вектора нормированных частных критериев, вид которой зависит от выбранной в данной ситуации схемы компромиссов.

На основании содержательного анализа функций полезности ЛПР в различных ситуациях предложена концепция нелинейной схемы компромиссов. Скалярная свертка представляется регрессионной моделью

$$Y\left(\alpha, y_0\right) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \left[1 - y_{0k}\left(x\right)\right]^{-1}; \alpha_k \ge 0, \sum_{k=1}^{s} \alpha_k = 1,$$

где α_k = const – коэффициенты регрессии. Таким образом, скалярная свертка критериев по нелинейной схеме компромиссов выражает содержательную регрессионную модель функции полезности ЛПР на всем диапазоне ситуаций принятия многокритериальных решений, а коэффициенты регрессии α отражают индивидуальные предпочтения конкретного ЛПР. Процедура определения коэффициентов α (настройка решающего правила) описана в работах автора.

Таким образом, компромиссно-оптимальное решение многокритериальной задачи в рассмотренном подходе мы можем получить в формализованной процедуре, применяя модель векторной оптимизации с учетом скалярной свертки по нелинейной схеме компромиссов.

Консенсус

Теперь рассмотрим случай, когда ограничения на частные критерии не фиксированы. Начнем с того, что решение любой векторной задачи оптимизации может быть только компромиссно-оптимальным. Каждая схема компромиссов является отражением вполне определенного полезного свойства, которым, по мысли разработчиков, должна обладать проектируемая многокритериальная система в заданной ситуации.

Так, эгалитарный принцип равномерности предполагает реализацию идеи наиболее равномерного изменения уровня каждого из частных критериев. В качестве примера укажем, что грамотно спроектированный механизм срабатывается равномерно и по окончании расчетного времени работы выходит из строя одновременно во всех своих звеньях.

Применение утилитарного принципа интегральной оптимальности говорит о том, что разработчики акцентируют внимание на экономичности суммарного расходования запасов и ресурсов проектируемой системы. Пример: упомянутый механизм должен служить как можно дольше.

Традиционная постановка задачи заставляет выбирать *одну*, адекватную заданным условиям, схему компромиссов, игнорируя полезные качества, содержащиеся в других принципах оптимальности.

Между тем, практика решения прикладных многокритериальных задач свидетельствует, что не всегда решения, полученные по разным схемам компромиссов, существенно различны. В лучших образцах многокритериальных систем они близки, а иногда практически совпадают. От чего это зависит и о чем это говорит?

Если решения, полученные по разным схемам компромиссов, совпадают (или достаточно близки), то это значит, что ресурсы и запасы проектируемой системы подобраны и использованы настолько удачно, что при заданных условиях функционирования система *одновременно* отвечает всем требованиям, заложенным в разных принципах оптимальности. Пример: рационально построенный механизм служит долго, а в конце срока эксплуатации оказывается, что все его детали изношены в одинаковой мере. Если же решения существенно различны, то запасы и ресурсы системы подобраны неправильно, они не сбалансированы для заданных условий функционирования и, следовательно, система организована нерационально.

Таким образом, признаком рационально организованной многокритериальной системы является совпадение (близость) решений, полученных по различным принципам оптимальности, а средством рациональной организации является подбор запасов и ресурсов, от которых зависят ограничения системы, определяющие допустимую область решений. Целесообразно не только пассивно констатировать, что данная система спроектирована нерационально (или рационально), а, когда и в какой мере это возможно, включать в постановку задачи целенаправленный подбор (организацию) запасов и ресурсов проектируемой многокритериальной системы.

Принцип рациональной организации

Рассмотрим такую процедуру проектирования, когда разработчики в определенных пределах могут изменять значения всех или некоторых запасов и ресурсов системы, гармонично подбирая адекватный заданным условиям комплекс ограничений и определяя тем самым адекватную допустимую область решений. Сходная постановка задачи анализируется и в рамках теории системной оптимизации. Сформулируем принцип рациональной организации в многокритериальных задачах управления:

> *в рационально организованной многокритериальной системе при заданных условиях функционирования ограниченные ресурсы и запасы подобраны так, что оптимизация вектора эффективности по различным схемам компромиссов приводит к совпадающим (или близким) решениям.*

Принцип рациональной организации универсален и представляет собой логическую основу для формализации решения многокритериальных задач разной природы. При совпадении решений проблема выбора схемы компромиссов отпадает, и соответствующий эвристический элемент из методики решения многокритериальной задачи исключается. В этом случае задача векторной оптимизации полностью и объективно сводится к скалярной.

Рассмотрим изложенную выше постановку многокритериальной задачи с той разницей, что ограничения *A* являются не заданными константами, а, наряду с аргументами *x*, независимыми переменными. В этом случае результат решения векторной задачи состоит в определении таких векторов $x^o \in X$ и A^o, при которых удовлетворяется принцип рациональной организации.

Можно утверждать, что если строго соблюдается принцип рациональной организации, то оптимальное решение x^o:

- принадлежит области Парето;
- одновременно удовлетворяет всем схемам компромиссов, приводящим к парето-оптимальным решениям;
- является единственным.

Отсюда следует, что математически строгая реализация принципа рациональной организации представляет собой не что иное, как *стягивание* путем рационального выбора вектора A^o всех паретовских решений к единственной точке x^o, которая и является искомым оптимальным решением поставленной многокритериальной задачи.

Пронормируем вектор эффективности вектором ограничений и получим вектор относительных критериев

$$y_0(x,A) = \left\{ y_k\left(x\right)/A_k \right\}_{k=1}^{s} = \left\{ y_{0k}\left(x,A\right) \right\}_{k=1}^{s}.$$

В предположении о выполнении условий выпуклости допустимого множества критериев, при которых справедливы леммы Карлина, представим выражение для области компромиссов в виде решения задачи параметрического программирования

$$X^K = \bigcup_{a \in X_a} \arg\min_{x \in X} \sum_{k=1}^{s} a_k y_{0k}\left(x\right), \qquad (1)$$

где $a = \left\{ a_k \right\}_{k=1}^{s}$ – формальный векторный параметр, определенный на множестве

$$X_a = \left\{ a \left| \sum_{k=1}^{s} a_k = 1, a_k \geq 0 \right. \right\}. \qquad (2)$$

Одним из следствий леммы Карлина является то, что, варьируя $a \in X_a$ можно получить любую схему компромиссов, приводящую к парето-оптимальным решениям. Так как при выполнении принципа рациональной организации все решения из множества X^K стягиваются в точку x^o, то выражение (1) преобразуется к виду

$$x^o = \bigcup_{a \in X_a} \arg\min_{x \in X} \sum_{k=1}^{s} a_k y_{0k}\left(x\right). \qquad (3)$$

Из условия единственности точки x^o следует требование инвариантности суммы $\sum_{k=1}^{s} a_k y_{0k}\left(x,A\right)$ в выражении (3) от параметров $a \in X_a$. Эта сумма не будет зависеть от указанных параметров только в том случае, когда

$$y_{01}(x, A) = y_{02}(x,A) = \ldots = y_{0s}(x, A) \qquad (4)$$

Действительно, если выполнено равенство относительных критериев $y_{01} = y_{02} = ... = y_{0s} = \mu$, то рассматриваемая сумма с учетом свойства (2) векторного параметра $\sum_{k=1}^{s} a_k = 1$ принимает вид

$$\sum_{k=1}^{s} a_k y_{0k} = \sum_{k=1}^{s} a_k \mu = \mu \sum_{k=1}^{s} a_k = \mu \cdot 1 = \mu$$

и не зависит от параметров $a \in X_a$.

С другой стороны, единственная точка x^o должна принадлежать области Парето с любым (произвольным) набором параметров a из множества X_a. Пользуясь произвольностью выбора этих параметров и исходя из свойства (2), установим

$$a_1 = a_2 = ... = a_s = 1/s.$$

Тогда выражение (3) будет выглядеть так:

$$x^o = \bigcup_{a_k = 1/s} \arg\min_{x \in X} \sum_{k=1}^{s} (1/s)\, y_{0k}(x, A) = \arg\min_{x \in X} (1/s) \sum_{k=1}^{s} y_{0k}(x, A). \quad (5)$$

Как известно, положение экстремума функции не изменяется от постоянного сомножителя, поэтому коэффициент $1/s$ можно сократить и

$$x^o = \arg\min_{x \in X} \sum_{k=1}^{s} y_{0k}(x, A). \quad (6)$$

Раскрывая выражение (4), получим систему уравнений

$$y_{0,j}(x, A) - y_{0,j+1}(x, A) = 0,\ j \in [1, s-1] \quad (7)$$

Условие (6) в предположении о том, что решение достигается внутри допустимой области аргументов, порождает систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{s} y_{0k}(x, A) = 0,\ i \in [1, n]. \quad (8)$$

Принцип рациональной организации требует, чтобы уравнения (7) и (8) составляли совместную и полную систему уравнений. Видно, однако, что эта система является неопределенной (не хватает одного уравнения). Это объясняется тем, что решение по принципу рациональной организации может быть получено при бесконечном числе сочетаний абсолютных величин ограничений. Поэтому необходимо доопределить задачу дополнительным условием. Таким условием может быть, например, равенство l-го относительного критерия (и автоматически всех относительных критериев) заданной конкретной величине:

$$y_{0l}(x, A) = \mu,\ l \in [1, s],\ 0 < \mu \le 1 \quad (9)$$

Кроме того, часто в приложениях одно ограничение бывает заданным

$$A_l = A_l^o,\ l \in [1, s] \quad (10)$$

и не подлежит изменениям. В этом случае величина μ не задается, а вместо условия (9) используется (10).

Таким образом, для решения многокритериальной задачи по принципу рациональной организации нужно решить систему уравнений (7)–(8)–(9) или (7)–(8)–(10). В результате получим n искомых компонент вектора решения x^o и s оптимальных составляющих вектора ограничений A^o. Изложенная простая и объективная методика может быть применена, если задача рациональной организации имеет точное решение в заданной области аргументов.

Среди решений, получаемых по принципу рациональной организации особое место занимает такое, при котором область компромиссов *вырождается в точку*. Вырождение области Парето X^K в единственную точку x^o представляется пересечением условий (7) и (8) при μ = 1. Полученное решение логично назвать к о н с е н с у с о м, так как оно сбалансировано по всем критериям, обеспечено ресурсными возможностями системы и непротиворечиво. Важно уяснить, что наличие области компромиссов всегда свидетельствует о присутствии противоречий в системе, а ее вырождение в точку устраняет почву для противоречий и позволяет считать решение x^o согласованным, консенсусным.

Принцип рациональной организации позволяет научно обосновать требования к обеспечению многокритериальной системы необходимыми запасами и ресурсами для ее нормального функционирования в заданных условиях.

Если условия изменяются, этот принцип показывает, как надо изменять ограничения запасов и ресурсов и (или) структуру и параметры системы.

И, наконец, принцип рациональной организации указывает, в какие условия следует поместить заданную систему, чтобы она проявила себя как рационально организованная.

Оценка противоречивости критериев

Понятие консенсуса дает возможность количественно оценить степень противоречивости критериев системы при произвольном задании ограничений. Для этого удобно перейти от пространства критериальных функций E^n к критериальному пространству R^s. Каждому решению $x \in X$ ставится в соответствие его векторная оценка в критериальном пространстве $\{y_1(x), ..., y_s(x)\} \in R^s$. Если решение x для данной альтернативы пробегает все множество X, то в критериальном пространстве R^s образуется множество $Y(X)$, которое в дальнейшем будем называть множеством векторных оценок. Множеству парето-оптимальных решений X^K в пространстве критериальных функций соответствует множество парето-оптимальных векторных оценок $Y^K = Y(X^K)$ в критериальном пространстве. Напомним, что два топологических пространства называются *гомеоморфными*, если существует взаимно однозначное непрерывное отображение одного из них на другое, для которого обратное отображение тоже непрерывно. Само отображение называется гомеоморфизмом.

По свойству гомеоморфизма, если в пространстве E^n область Парето стягивается в точку консенсуса: $X^K \to x^o$, то в пространстве R^s соответствующая область компромиссов также вырождается в точку консенсуса: $Y^K \to y^o$.

В теории многокритериальной оптимизации существует понятие идеального вектора y^{id} (утопической точки в критериальном пространстве). Для его определения при заданных условиях и ограничениях задача оптимизации решается s раз (по количеству частных критериев), причем каждый раз с одним (очередным) критерием, как если бы остальных не было вовсе:

$$x_1^* = \arg\min_{x \in X} y_1(x) \to y_1^{\mathrm{id}} = y_1(x_1^*); ...; x_s^* = \arg\min_{x \in X} y_s(x) \to y_s^{\mathrm{id}} = y_s(x_s^*) .$$

Чем более противоречивы частные критерии, тем больше такие решения отличаются друг от друга. Последовательность таких «однокритериальных» решений исходной многокритериальной задачи дает координаты идеального вектора $y^{\mathrm{id}} = \left\{ y_k^{\mathrm{id}} \right\}_{k=1}^{s}$.

В общем случае идеальный вектор недостижим, это фантом, чисто формальное решение (каждая координата показывает, каким замечательным был бы данный критерий, если бы не было необходимости учитывать остальные). И только в одном случае идеальная точка достигается реально – когда область

Парето Y^K вырождается в точку y^o. В этом единственном случае, когда противоречия между критериями исчезают, идеальный вектор y^{id} совпадает с консенсусным решением y^o.

Во всех остальных случаях утопическая точка y^{id} отличается от точки консенсуса y^o и расстояние между ними количественно выражает степень противоречивости критериев системы:

$$\rho = \sqrt{\sum_{k=1}^{s}\left(y_k^{\mathrm{id}} - y_k^{\mathrm{o}}\right)^2}.$$

МОДЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР. Изложенное проиллюстрируем простым модельным примером. Пусть некоторая система оценивается двумя критериями (рис. 1):

$$y_1 = x;$$

$$y_2 = (x-5)^2+2.$$

Начнем с варианта, когда заданы ограничения: $y_1 \le A_1 = 6.5$ и $y_2 \le A_2 = 6$. Требуется найти компромиссно-оптимальное решение $x^* \in X^K \subset X$ по нелинейной схеме компромиссов. Расчет показывает, что при заданных условиях

$$x^* = 4.08;\ y_1^* = 4.08;\ y_2^* = 2.85.$$

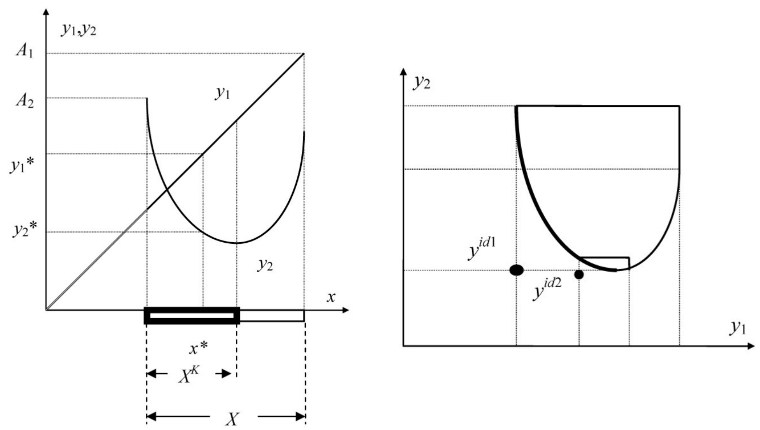

Рис. 1 **Рис.2**

Координаты идеального вектора (рис. 2):

$$y^{id1} = (y_1^{id1},\ y_2^{id1}) = (3;\ 2).$$

Теперь изменим задачу так, что ограничения A_1 и A_2 не фиксированы и могут подбираться из открытой области. Получим решение по принципу рациональной организации. Для этого составим систему уравнений (7)–(8)–(9)

$$x/A_1=[(x-5)^2+2]/A_2;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(x / A_1\right)+\left[\left(x-5\right)^2+2\right] / A_2\right\}=0;\ x/A_1 = \mu.$$

Решая эту систему при $\mu = 1$, получим консенсусное решение:

$$x^o = 4.78;\ y_1^o = A_1^o = 4.78;\ y_2^o =$$
$$= A_2^o = 2.05.$$

Если задать $\mu = 0.9$, то получится решение по принципу рациональной организации

$$x^o = 4.78;\ y_1^o = 4.78;\ y_2^o = 2.05;\ A_1^o = 5.26;\ A_2^o = 2.25.$$

Возникает идеальный вектор y^{id2}=(4.5; 2), т.е. появляется противоречивость, степень которой можно измерить по формуле

$$\rho_2 = \sqrt{(4.5-4.78)^2 + (2-2.05)^2} = 0.29.$$

Степень противоречивости многокритериальной системы при заданных исходных ограничениях, когда имеет место идеальный вектор y^{id1}, оценивается по формуле

$$\rho_1 = \sqrt{(3-4.78)^2 + (2-2.05)^2} = 1.78,$$

т.е. существенно больше, чем ρ_2.

Заключение

В заключение отметим, что рассмотрены два подхода к формализации решения многокритериальных задач. Один из них применяется при фиксированных значениях ограничений на частные критерии и состоит в том, что искомое компромиссно-оптимальное решение x^* получается как аргумент минимизации скалярной свертки критериев по нелинейной схеме компромиссов, зависящей от заданных ограничений A. Второй подход применяется когда ограничения A не заданы и имеется возможность рассматривать их как независимые переменные задачи. В этом случае решение x^o, A^o получается по принципу рациональной организации, а в пределе, когда область Парето вырождается в точку, получается решение x^o, A^o, выражающее консенсус частных критериев.

Оба подхода применялись при решении конкретных задач векторной оптимизации космических систем управления. Так, концепция нелинейной схемы компромиссов использовалась при разработке закона управления глиссадным спуском воздушно-космического корабля «Буран»; при создании регрессионной модели экспертных оценок «надежность-стоимость» в задачах страхования объектов космической деятельности; при разработке эргатических систем аэрокосмического назначения и др. Принцип рациональной организации позволяет наиболее эффективно решать технико-экономические задачи выполнения космических проектов, так как дает возможность гармонично согласовывать ресурсные (финансовые, технические, эргономические и др.) возможности систем при проектировании и реализации проектов в условиях жестких требований.

Благодарности

*Статья частично финансирована из проекта **ITHEA XXI** Института Информационных теорий и приложений FOI ITHEA и Консорциума FOI Bulgaria (www.ithea.org, www.foibg.com).*

Сведения об авторе

Воронин Альберт Николаевич *– профессор, доктор технических наук, профессор кафедры компьютерных информационных технологий Национального авиационного университета, проспект Комарова, 1, Киев-58, 03058 Украина; e-mail: alnv@voliacable.com*