АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К СУЖЕНИЮ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО: ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ

Владимир Ногин

***Аннотация**: Обсуждаются вычислительные аспекты аксиоматического подхода к решению проблемы сужения множества Парето на основе определённой числовой информации об отношении предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР). Этот подход развивается автором, начиная с 1983 г. Его применение предполагает принятие определённых четырёх аксиом «разумного» поведения ЛПР в процессе принятия решений. Предполагается, что в дополнение к указанным аксиомам известны некоторые сведения об отношении предпочтения ЛПР («кванты» информации). На основе этих сведений можно сократить множество Парето и, тем самым, облегчить последующий выбор выбираемых (наилучших) решений. Прослеживается эволюция развития аксиоматического подхода и формулируется алгоритм учёта произвольного конечного набора «квантов» информации об отношении предпочтения ЛПР. Работа алгоритма проиллюстрирована примером.*

***Ключевые слова:** множество Парето, многокритериальный выбор, сужение множества Парето*

***ACM Classification Keywords:** F.4.3 – Decision problems*

Введение

В 1983 г. автор выступил с докладом на одной из Всесоюзных конференций по принятию решений [Ногин, 1983]. С этого момента начинается развитие подхода, основанного на использовании определённой числовой информации об отношении предпочтения ЛПР и предназначенного для удаления из числа возможных тех решений, которые заведомо не могут быть выбранными (наилучшими). Указанная информация состоит из конечного набора пар несравнимых по отношению Парето векторов, относительно которых ЛПР может определённо сказать, какой именно вектор пары предпочтительнее другого вектора. Впоследствии подобного рода информация была названа автором набором «квантов» информации об отношении предпочтения, а сам подход получил наименование аксиоматического, поскольку в его основе лежит принятие нескольких аксиом «разумного» поведения ЛПР, ограничивающих класс рассматриваемых бинарных отношений предпочтения ЛПР. В книге [Ногин, 1986] автором было введено словосочетание проблема сужения множества Парето и подробно развит аксиоматический подход для решения этой проблемы в случае двух критериев. В работе [Noghin, 1990] рассмотрение было продолжено в общем случае произвольного конечного числа критериев. Существенное развитие данный подход получил в работе [Noghin, 1996], где впервые в самом широком классе многокритериальных задач (в которых на векторную функцию и допустимое множество не накладывается никаких ограничений) было установлено, что любое множество выбираемых решений содержится в «новом» множестве Парето, которое можно построить с использованием «нового» векторного критерия, число компонент которого не менее размерности «старого» критерия. Тем самым, для искомого множества выбираемых решений (векторов) была построена оценка сверху в виде указанного «нового» множества Парето. Эта оценка в существенной степени зависит как конкретного вида «кванта» используемой информации, так и имеющихся в наличии векторного критерия и множества допустимых решений. В крайних случаях эта оценка может состоять как из одноэлементного множества (тогда окончательный выбор определён однозначно), так и совпадать с исходным множеством Парето (т.е. не приводить к его сужению). Впоследствии автором и его учениками был получен целый ряд результатов подобного типа. С их помощью можно осуществлять сужение множества Парето с использованием того или иного набора «квантов» информации. Место рассматриваемого аксиоматического подхода в числе прочих, предназначенных для сужения множества Парето, а также его взаимосвязь с ними, была проанализирована в [Ногин, 2006]. На данный момент можно констатировать, что в принципе аксиоматический подход получил своё окончательное завершение, поскольку недавно [Ногин, Басков, 2011; Ногин, 2013] появились алгоритмы, с помощью которых можно построить «новый» векторный критерий при наличии любого конечного непротиворечивого набора «квантов» информации.

Далее рассматриваются основные этапы эволюции аксиоматического подхода с точки зрения вычислительных аспектов, связанных с построением «новых» векторных критериев, на основе которых можно построить оценку сверху для произвольного множества выбираемых решений.

Задача многокритериального выбора. Аксиомы разумного выбора

Последующее рассмотрение связано с задачей многокритериального выбора, включающей произвольный числовой векторный критерий f и произвольное непустое множество возможных (допустимых) решений (вариантов) X. Множество выбираемых решений (векторов) будем обозначать $C(X)\,(C(Y))$. Эти множества являются решением задачи многокритериального выбора и подлежат нахождению. Кроме того, в данной задаче присутствует бинарное отношение предпочтения $\succ$, которое является продолжением на всё критериальное пространство R^m отношения предпочтения ЛПР, заданного на множестве $Y = f(X)$. Это отношение на практике обычно неизвестно, однако считается, что оно удовлетворяет следующим четырём аксиомам.

Аксиома 1. *Для любой пары векторов* $y', y'' \in Y$, *удовлетворяющих соотношению* $y' \succ y''$, *выполнено* $y'' \notin C(Y)$.

Аксиома 2. *Отношение* $\succ$ *является транзитивным.*

Аксиома 3. *Каждый из критериев* $f_1, f_2, ..., f_m$ *согласован с отношением предпочтения* $\succ$ *в том смысле, что для каждого i и любых двух векторов* $y', y'' \in R^m$, *таких, что*

$$y' = (y'_1, ..., y'_{i-1}, y'_i, y'_{i+1}, ..., y'_m),\ y'' = (y'_1, ..., y'_{i-1}, y''_i, y'_{i+1}, ..., y'_m), \qquad y'_i > y''_i,$$

верно $y' \succ y''$.

Аксиома 4. *Отношение предпочтения* $\succ$ *является инвариантным относительно линейного положительного преобразования, т.е. для любых* $\alpha > 0, c \in R^m$ *из соотношения* $y' \succ y''$ *следует справедливость* $\alpha y' + c \succ \alpha y'' + c$ *для всех векторов* $y', y'' \in Y$.

Первая аксиома представляет собой некоторое уточнение понятия множества выбираемых решений. Остальные аксиомы среди всех возможных выделяют определённый достаточно широкий класс бинарных отношений. В целом, приведённая аксиоматика отражает такое поведение ЛПР в процессе принятия решений, которое вполне можно охарактеризовать, как «разумное». Заметим, что в сформулированных аксиомах на множество возможных вариантов X и векторный критерий f никаких ограничений не накладывается.

Сужение множества Парето на основе «квантов» информации

Приведём определение, лежащее в основе рассматриваемого аксиоматического подхода.

Определение 1. Пусть имеется некоторая пара парето-оптимальных векторов y', y'', не связанных друг с другом отношением $\geq$, т.е. существуют такие два непустых подмножества номеров критериев $A, B \subset I = \{1,2,...,m\}$, что

$$y'_i > y''_i, \quad y'_i - y''_i = w_i > 0 \quad \forall i \in A, \quad y''_j > y'_j, \quad y''_j - y'_j = w_j > 0 \quad \forall j \in B$$
$$y'_s = y''_s, \qquad \forall s \in I \setminus (A \cup B).$$

В этом случае, если выполнено $y' \succ y''$, то говорят, что задан *«квант» информации* об отношении предпочтения с параметрами $w_i \ (\forall i \in A), w_j \ (\forall j \in B)$.

Очевидно, наличие данного «кванта» в силу Аксиомы 1 даёт возможность сократить множество Парето на один элемент y''. Такое сужение множества Парето, как правило, не облегчает процесса выбора. Однако, благодаря Аксиомам 1−4, действительное сужение множества Парето оказывается более значительным. А именно имеет место следующее утверждение.

Теорема 1 (Ногин, 2005). *В предположении выполнения Аксиом* 1– 4 *для любого множества выбираемых вариантов* C(X), *справедливы включения*

$$C(X) \subset P_g(X) \subset P_f(X), \tag{1}$$

причём «новый» векторный критерий g *формируется из функций* f_i *для всех* $i \in I \setminus B$ *и* $g_{ij} = w_j f_i + w_i f_j$ *для всех* $i \in A, \ j \in B$.

Таким образом, для учёта «кванта» информации, следует пересчитать исходный векторный критерий по указанной формуле, а затем построить новое множество Парето $P_g(X)$. Это множество и будет оценкой сверху для искомого множества $C(X)$, которая является более точной, чем $P_f(X)$.

Определение 2. Пусть имеется два «кванта» информации с множествами A_1, B_1 и A_2, B_2. Если все эти множества попарно не пересекаются, то данная информация называется *взаимно независимой*. В противном случае она – *взаимно зависима*.

Это определение легко распространяется на случай любого конечно набора «квантов» информации.

В случае взаимно независимой информации для её использования в целях сужения множества Парето можно применять Теорему 1 столько раз, сколько потребуется. Однако если информация в виде конечного набора квантов информации является взаимно зависимой, то указанный способ непригоден. В каждом подобном случае необходимо отдельное исследование.

В монографии [Ногин, 2005] содержится целый ряд утверждений, в которых указываются формулы пересчёта исходного векторного критерия f для учёта некоторых простейших наборов «квантов» взаимно зависимой информации.

В статье [Климова, Ногин 2006] изучается ситуация, когда имеется набор из двух «квантов» взаимно зависимой информации с множествами A_1, B_1 и A_2, B_2, причем $A_1 \cap B_2 \neq \varnothing$ и $A_2 \cap B_1 \neq \varnothing$, а остальные возможные попарные пересечения - пустые. Установлены условия, когда этот набор является непротиворечивым, а также выписан «новый» векторный критерий g , при котором имеют место включения (1). Прикладная многокритериальная задача, в которой для сужения множества Парето используется указанный набор «квантов», рассматривается в работе [Климова, 2007].

В работах [Захаров, 2011; Захаров 2012] исследован вопрос непротиворечивости и учёта так называемой *замкнутой информации* об отношении предпочтения. Простейшим примером такого рода информации служит ситуация, когда имеется набор из трёх «квантов», причём $A_1 = B_3 = \{i\}, B_1 = A_2 = \{j\}, B_2 = A_3 = \{k\}$. Для нового векторного критерия g , при котором имеет место (1), Захаровым А.О. получены соответствующие формулы. Кроме того, разработанный подход был распространён на общий случай непротиворечивой замкнутой информации, когда групп критериев любое конечное число, причём сами это группы содержат более одного элемента.

В [Ногин, 2009; Ногин, 2010] аналогичные вопросы исследованы для набора так называемой информации точечно-множественного, а также множественно-точечного типа.

Невозможно получить конечные формулы для пересчёта векторного критерия с целью учёта произвольного конечного набора непротиворечивых «квантов» информации и построения нового множества Парето $P_g(X)$, являющегося в силу (1) более точной оценкой сверху для неизвестного множества выбираемых вариантов, чем исходное множества Парето. Однако удалось разработать алгоритмы подобного пересчёта. Эта задача была решена в [Ногин, Басков, 2011; Ногин, 2013].

Алгоритмы построения критерия g в случае произвольного конечного набора «квантов»

В [Ногин, 2005] было указано, что благодаря инвариантности отношения предпочтения задание «квантов» информации об отношении предпочтения ЛПР равносильно указанию набора векторов $u^1,...,u^k \in R^m$, обладающих тем свойством, что среди компонент каждого вектора имеется хотя бы одна положительная и по крайней мере одна отрицательная компоненты, причём $u^i \succ \mathbf{0}$, $i = 1,...,k$. Там же была сформулирована задача выпуклого анализа, состоящая в разработке алгоритма, позволяющего строить внутренние нормали к (m-1)-мерным граням выпуклого телесного конуса, порождённого векторами $u^1,...,u^k$ совместно с единичными векторам пространства R^m . Собственно, решение этой задачи выпуклого анализа и даёт возможность сформировать новый векторный критерий g , с помощью которого определяется множество $P_g(X)$ и, таким образом, учитывать конечный набор «квантов» информации в процессе выбора.

Одним из алгоритмов отыскания указанных выше внутренних нормалей может служить алгоритм Моцкина-Бургера [Черников, 1968], предназначенный для построения общего решения конечной системы линейных неравенств. Мы его здесь обсуждать не будем.

Автором был разработан геометрический подход к построению внутренних нормалей конечнопорождённого телесного конуса. На вход этого алгоритма подаётся конечный набор векторов $a^1,...,a^k$, порождающих телесный выпуклый конус, а на выходе (в памяти) образуется набор $b^1,...,b^n$, с помощью которого выписывается новый векторный критерий, множество Парето относительно которого будет представлять собой сужение исходного множества Парето на основе произвольного конечного набора «квантов» информации.

Шаг 1 (открытие цикла по перебору векторов). Открыть цикл по переменной *i* от 1 до C_k^{m-1} генерирования всех возможных поднаборов из $m-1$ векторов набора $a^1,...,a^k$.

Шаг 2 (проверка на линейную независимость). Если текущий *i*-й поднабор $a^{i1},...,a^{i(m-1)}$, выбранный из $a^1,...,a^k$, линейно зависим, то увеличить номер *i* на единицу и вернуться к началу шага 2. Когда увеличение номера *i* невозможно, т.е. $i = C_k^{m-1}$, необходимо перейти к шагу 5. В противном случае, т.е. когда указанный поднабор линейно независим, выполнить шаг 3.

Шаг 3 (построение ортогонального вектора). Образовать из вектор-столбцов поднабора $a^{i1},...,a^{i(m-1)}$ квадратную матрицу *D* *n*-го порядка, приписав к указанным столбцам справа любой вектор из множества $I_i = \{a^1,...,a^k\} \setminus \{a^{i1},...,a^{i(m-1)}\}$, образующий вместе с $a^{i1},...,a^{i(m-1)}$ линейно независимую систему. Найти последний столбец обратной матрицы матрицы $(D^T)^{-1}$, где *T* – символ транспонирования. Найденный вектор-столбец (обозначим его y^i) следует запомнить.

Шаг 4 (проверка вектора y^i на принадлежность искомому множеству $b^1,...,b^n$). Вычислить скалярные произведения $\langle a^j, y^i \rangle$ для всех векторов $a^j \in I_i$. Если хотя бы одно такое скалярное произведение окажется отрицательным, то удалить из памяти вектор y^i. Увеличить номер *i* на единицу и перейти на шаг 2 (когда такое увеличение невозможно, – выполнить шаг 5).

З а м е ч а н и е. Для сокращения перебора и исключения записи в памяти одинаковых (с точностью до положительного множителя) искомых векторов для каждого записанного в память y^i, на шаге 4 следует запоминать соответствующий ему набор Y_i из всех векторов $a^1,...,a^k$, ортогональных вектору y^i (т.е. тех a^j, для которых $\langle a^j, y^i \rangle = 0$). А на шаге 2 всякий раз в случае, когда текущий поднабор $a^{i1},...,a^{i(m-1)}$ оказывается подмножеством хотя бы одного образованного ранее множества Y_i, пропускать такой поднабор, сразу увеличивая номер *i* на единицу.

Шаг 5 (формирование нового векторного критерия). В результате выполнения полного цикла по переменной *i* в памяти будут записаны вектор-столбцы, которые в ходе выполнения алгоритма записывались в память как y^i. Обозначим все эти векторы через $b^1,...,b^n$. Необходимо построить векторный критерий по формуле $g(x) = (\langle b^1, f(x)\rangle,...,\langle b^n, f(x)\rangle)$.

Нижеследующая теорема указывает способ применения описанного алгоритма.

Теорема 2 (Ногин, 2013). *Пусть выполнены Аксиомы 1 - 4 и задан непротиворечивый набор «квантов» информации в форме векторов* $u^1,...,u^k$, для которых выполнено $u^i \succ_Y \mathbf{0}$, $i = 1,...,k$. *Тогда для любого множества выбираемых вариантов C*(*X*) *выполняются включения* (1), *где векторный критерий g*(*x*) (*n* ≥ *m*), *построен в результате применения описанного выше алгоритма к набору*, *состоящему из векторов* $u^1,...,u^k$ *, задающих «кванты» информации, вместе с m единичными ортами пространства* R^m.

Согласно теореме, применяя алгоритм, следует построить новый векторный критерий *g*, множество Парето относительно которого даст оценку сверху (1) для неизвестного множества выбираемых вариантов *C*(*X*) с учётом выявленного набора «квантов» информации.

Хотя приведённый выше алгоритм является чисто переборным, что ведёт в общем случае к довольно большому объёму вычислительной работы, тем не менее, как показывает нижеследующий пример, в случае относительно небольшого числа критериев и «квантов», им можно воспользоваться «вручную», т.е. без привлечения компьютера.

Иллюстративный пример

Пусть $m=3,\ k=2$, $u^1=(-2,3,1)\succ 0$, $u^2=(4,-1,1)\succ 0$. Применим описанный алгоритм для формирования нового векторного критерия. В соответствии с теоремой 2 на вход алгоритма следует подать набор из пяти векторов $\{e^1, e^2, e^3, u^1, y^2\}$, где $e^1=(1,0,0), e^2=(0,1,0), e^3=(0,0,1)$. Длина цикла алгоритма будет равна $C_5^2=10$.

Рассмотрим первый поднабор из двух векторов $\{e^1, e^2\}$. Очевидно, ортогональным к этим векторам является вектор $\{e^3\}$, причем $\langle e^3, u^1\rangle = \langle e^3, u^2\rangle$ = $\langle e^3, e^3\rangle = 1 > 0$. Следовательно, на основании утверждения вектор $y^1=e^3$ следует запомнить.

Перейдём ко второму поднабору $\{e^1, e^3\}$. Вектор e^2 ортогонален обоим векторам рассматриваемого поднабора, но $\langle e^2, u^1\rangle = 3 > 0$ и $\langle e^2, u^2\rangle = -1 < 0$. Это означает, что вектор e^2 запоминать не следует.

Теперь рассмотрим $\{e^2, e^3\}$. Здесь для ортогонального вектора e^1 выполняется $\langle e^1, u^1\rangle = -2 < 0$, $\langle e^1, u^2\rangle = 4 > 0$. Поэтому данный вектор тоже должен быть пропущен.

Для набора $\{e^1, u^1\}$ в качестве ортогонального вектора можно взять, например, $(0,1,-3)$. Поскольку $\langle (0,1,-3), e^2\rangle = 1 > 0$, $\langle (0,1,-3), u^2\rangle = -4 < 0$, данный вектор также пропускаем.

Для набора $\{e^2, u^1\}$ можно выбрать вектор $y^2=(1,0,2)$, который следует запомнить. Далее аналогично, нетрудно проверить, что для набора $\{e^3, u^1\}$ можно запомнить, например, вектор $y^3=(3,2,0)$, для набора $\{e^1, u^2\}$ – вектор $y^4=(0,1,1)$, для набора $\{e^2, u^2\}$ ортогональный вектор следует пропустить, для набора $\{e^3, u^2\}$ – запомнить вектор $y^4=(1,4,0)$ и, наконец, после рассмотрения набора $\{u^1, u^2\}$ можно запомнить вектор $y^5=(-4,-6,10)$.

В итоге найдены пять векторов $y^1,\dots,y^5$. Им отвечает новый векторный критерий g с компонентами $g_1(x)=f_3(x)$, $g_2(x)=f_1(x)+2f_2(x)$, $g_3(x)=3f_1(x)+2f_2(x)$, $g_4(x)=f_2(x)+f_3(x)$, $g_5(x)=-4f_1(x)-6f_2(x)+10f_3(x)$. Согласно сформулированной выше теореме, множество Парето относительно этого 5-мерного критерия будет являться более точной оценкой для неизвестного множества выбираемых векторов (вариантов), чем исходное множество Парето.

Чтобы получить конкретный результат, выберем в качестве Y, например, следующее конечное множество $Y=\{y^1, y^2, y^3, y^4\}$, где

$$y^1=(1,\ 4.5,\ 2) \qquad y^2=(2,\ 3,\ 1) \qquad y^3=(3,\ 2,\ 1.5) \qquad y^4=(5,\ 1.5,\ 2)$$

Нетрудно видеть, что все эти векторы парето-оптимальны. Простые вычисления показывают, что $g(Y)=\{(2,5,17.5,6.5,-11),(1,4,12,4,-16),(1.5,7,13,3.5,-9),(2,9,19,3.5,-9)\}$. В этом множестве второй и третий векторы не являются парето-оптимальными. Следовательно,

$\hat{P}(Y) = f(P_g(X)) = \{y^1, y^4\}$, т.е. после использования имеющейся информации множество Парето сократилось в 2 раза.

Заключение

В работе рассмотрены вычислительные аспекты аксиоматического подхода к решению проблемы сужения множества Парето на основе числовой информации об отношении предпочтения ЛПР в виде так называемых «квантов». К настоящему времени получены формулы, по которым легко пересчитать векторный критерий, если имеется набор определённых «квантов». Установлено, что множество Парето относительно этого критерия является оценкой сверху для неизвестного множества выбираемых вариантов, более точной, чем исходное множество Парето. В общем случае наличия произвольного конечного набора «квантов» информации конечные формул получить не удаётся, однако можно воспользоваться специальными алгоритмами. Один из таких алгоритмов связан с именами Моцкина и Бургера, второй разработан автором. Приведено описание второго алгоритма и рассмотрен иллюстративный пример его работы.

Благодарность

Автор выражает признательность ITHEA International Scientific Society и Российскому Фонду Фундаментальных Исследований (проект № 11-07-00449) за финансовую поддержку.

Литература

1. Захаров А.О. Сужение множества Парето на основе взаимно зависимой информации замкнутого типа // Искусственный интеллект и принятие решений. 2011. № 1. С. 95-109.

2. Захаров А.О. Сужение множества Парето на основе замкнутой информации о нечётком отношении предпочтения лица, принимающего решения// Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2012. Вып. 3. С. 33-47.

3. Климова О.Н., Ногин В.Д. Учёт взаимно зависимой информации об относительной важности критериев в процессе принятия решений// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46, № 7. С. 2179-2191.

4. Климова О.Н. Задача выбора оптимального химического состава судостроительной стали\\ Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 6. С. 66-70.

5. Ногин В.Д. Оценки для множества оптимальных решений в условиях отношения предпочтения, инвариантного относительно линейного положительного преобразования// Тезисы докладов на IV Всесоюзном семинаре по исследованию операций и системному анализу «Принятие решений в условиях многокритериальности и неопределённости», М.− Батуми: 1983. С. 37.

6. Ногин В.Д. и др. Основы теории оптимизации. М.: Высшая школа, 1986.

7. Noghin V.D. Estimation of the set of nondominated solutions// Numerical Functional Analysis and Applications. 1991. V. 12, No 5&6, P. 507-515.

8. Noghin V.D. Relative importance of criteria: a quantitative approach// J. Multi-Criteria Decision Analysis. 1997. No 6, P. 355-363.

9. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход (2-е изд., исправленное и дополненное). М.: Физматлит. 2005.

10. Ногин В.Д. Проблема сужения множества Парето: подходы к решению//Искусственный интеллект и принятие решений. 2008. № 1. С. 98-112.

11. Ногин В.Д. Сужение множества Парето на основе информации о предпочтениях ЛПР точечно-множественного типа // Искусственный интеллект и принятие решений. 2009. № 5, С. 1-16.

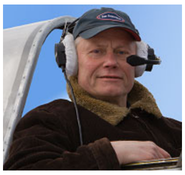
12. Ногин В.Д. Сужение множества Парето на основе информации о предпочтениях ЛПР множественно-точечного типа // Искусственный интеллект и принятие решений, 2010, № 2, С. 54-63.

13. Ногин В.Д., Басков О.В. Сужение множества Парето на основе учёта произвольного конечного набора числовой информации об отношении предпочтения// Доклады Академии Наук РФ (информатика). 2011. Т. 438, № 4, С. 1-4.

14. Ногин В.Д. Алгоритм сужения множества Парето на основе произвольного конечного набора «квантов» числовой информации//Искусственный интеллект и принятие решений. 2013, №1 (в печати).

15. Черников С.Н. Линейные неравенства. М.: Наука, 1968.

Информация об авторе



***Владимир Ногин** – профессор Санкт-Петербургского государственного университета, Санкт-Петербург, 198504, Петродворец, Университетский пр. 35, Россия; e-mail: noghin@gmail.com, web-page: http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/nogin/*

***Основная область научных интересов**: принятие решений при многих критериях, многокритериальная оптимизация*