МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ ЧАСТИЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ И СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА В ЭТИХ ЛОГИК

Оксана Шкильняк

***Аннотация**: Исследованы программно-ориентированные логические формализмы – транзиционные композиционно-номинативные модальные логики частичных эквитонных предикатов. Описаны семантические модели и языки чистых первопорядковых транзиционных модальных логик. Для таких логик построены исчисления секвенциального типа, доказаны корректность и полнота этих исчислений.*

***Ключевые слова**: модальная логика, предикат, логический вывод, секвенциальное исчисление.*

***ACM классификация ключевых слов**: F.3.1 Specifying and Verifying and Reasoning about Programs; F.4.1 Mathematical Logic – Proof theory*

Вступление

Для описания и моделирования разнообразных аспектов деятельности человека с большим успехом используются модальные логики, в первую очередь темпоральные и эпистемические. Аппарат темпоральных логик успешно применяется для моделирования динамических систем, спецификации и верификации программ (см., напр., [Logic 2008]). На базе этих логик построен ряд систем и языков спецификаций (Temporal Logic, TLA+, TLS, StateCharts, GIL, CSP и др.). Эпистемические логики используются для описания интеллектуальных информационных систем, экспертных систем, баз данных и баз знаний.

Традиционные модальные логики базируются на классической логике тотальных конечно-арных предикатов. Однако классическая логика имеет существенные ограничения, что затрудняет ее использование в информатике и программировании. Она недостаточно учитывает неполноту, частичность, структурированность информации о предметной области. Это мотивирует необходимость построения новых, программно-ориентированных логических формализмов модального типа. Такими являются композиционно-номинативные модальные логики (КНМЛ) частичных предикатов. КНМЛ строятся базе предложенного М.С. Никитченко композиционно-номинативного подхода, они синтезируют возможности традиционных модальных логик и композиционно-номинативных логик частичных квазиарных предикатов [Нікітченко, 2008]. Важнейшим классом КНМЛ являются транзиционные модальные логики (ТМЛ), они отражают аспект изменения и развития предметных областей, описывая переходы от одного состояния мира к другому. В рамках ТМЛ естественным образом можно рассматривать традиционные модальные логики. Подклассами ТМЛ являются мультимодальные (ММЛ) и темпоральные (ТмМЛ) композиционно-номинативные логики. Частными случаями ММЛ являются эпистемические КНМЛ (ЭМЛ) и общие ТМЛ (ОТМЛ). Различные классы ОТМЛ, ТмМЛ и ММЛ изучались в [Шкільняк, 2009], [Shkilniak, 2009], [Нікітченко, 2011], [Шкільняк, 2012].

Целью данной работы является исследование семантических свойств чистых первопорядковых ТМЛ эквитонных предикатов и построение для этих логик исчислений секвенциального типа. Такие исчисления формализуют отношения логического следствия для множеств специфицированных состояниями формул. Для предложенных исчислений доказаны теоремы корректности и полноты.

Понятия, которые здесь не определены, понимаем в смысле работ [Нікітченко, 2008; Нікітченко, 2011].

Композиционно-номинативные модальные системы

Для облегчения чтения укажем вначале основные понятия и определения.

Будем писать $f(d)\downarrow$, если значение $f(d)$ определено, и $f(d)\uparrow$, если $f(d)$ не определено.

Для первопорядковых КНЛ предикаты задаются на именных множествах – множествах пар, первая компонента которых – имя, а вторая – его значение. Формально V-именное множество (V-ИМ) над A – это однозначная функция вида $\delta : V \to A$. Здесь V и A – множества предметных имен и предметных значений. V-ИМ представляем в виде $[v_1 \mapsto a_1, ..., v_n \mapsto a_n, ...]$, где $v_i \in V$, $a_i \in A$. Класс всех V-ИМ над A обозначим ${}^V\!A$.

Для ИМ вводим функцию $asn : {}^V\!A \to 2^V$ таким образом: $asn(\delta) = \{v \in V \mid v \mapsto a \in \delta$ для некоторого $a \in A\}$.

Введем операцию наложения $d_1 \nabla d_2 = d_2 \cup \{v \mapsto a \in d_1 \mid v \notin asn(d_2)\}$.

Операцию реноминации $r^{v_1,...,v_n}_{x_1,...,x_n} : {}^V\!A \to {}^V\!A$ зададим так: $r^{v_1,...,v_n}_{x_1,...,x_n}(d) = d \nabla [v_1 \mapsto d(x_1),...,v_n \mapsto d(x_n)]$.

Запись вида $y_1,…, y_n$ сокращенно запишем как $\bar{y}$. Тогда реноминации сокращенно обозначим в виде $r^{\bar{v}}_{\bar{x}}$.

V-квазиарным предикатом на множестве A назовем однозначную частичную функцию вида $P : {}^V\!A \to \{T, F\}$. Здесь $\{T, F\}$ – множество истинностных значений.

Областью истинности и областью ложности V-квазиарного предиката P на A назовем множества

$\boldsymbol{T}(P) = \{d \in {}^V\!A \mid P(d) = T\}$ и $\boldsymbol{F}(P) = \{d \in {}^V\!A \mid P(d) = F\}$.

V-квазиарный предикат P *частично истинный*, если для произвольных $d \in {}^V\!A$ имеем $P(d) = T$ или $P(d)\uparrow$.

V-квазиарный предикат P *эквитонный*, если из условия $P(d)\downarrow$ и $d \subseteq d'$ следует $P(d')\downarrow = P(d)$.

Имя $x \in V$ *несущественно* для эквитонного предиката P, если для произвольных $d \in {}^V\!A$ и $a, b \in A$ из условия $P(d \nabla x \mapsto a)\downarrow$ и $P(d \nabla x \mapsto b)\downarrow$ следует $P(d \nabla x \mapsto a) = P(d \nabla x \mapsto b)$.

Понятие *композиционно-номинативной модальной системы* (КНМС) является центральным понятием КНМЛ. КНМС – это объект вида $M = (Cms, Fm, Jm)$, где Cms – композиционная модальная система (КМС), Fm –множество формул языка КНМЛ, Jm – отображение интерпретации формул на состояниях.

КМС задают семантические аспекты мира, это семантические модели реляционного типа. КМС имеют вид $Cms = (S, R, Pr, C)$, где S – множество состояний мира, R – множество отношений на S вида $\rho \subseteq S \times S^n$, Pr – множество предикатов на состояниях мира, C – множество композиций на Pr. Такое C определяется базовыми модальными композициями и базовыми общелогическими композициями соответствующего уровня. Для чистых первопорядковых логик базовые общелогические композиции – это $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, $\exists x$.

Логические связки $\neg$, $\vee$ и композиция реноминации $\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$ задаются следующим образом:

$\boldsymbol{T}(\neg P) = \boldsymbol{F}(P)$; $\boldsymbol{F}(\neg P) = \boldsymbol{T}(P)$;

$\boldsymbol{T}(P \vee Q) = \boldsymbol{T}(P) \cup \boldsymbol{T}(Q)$; $\boldsymbol{F}(P \vee Q) = \boldsymbol{F}(P) \cap \boldsymbol{F}(Q)$;

$\boldsymbol{T}(\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(P)) = r^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\boldsymbol{T}(P))$; $\boldsymbol{F}(\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(P)) = r^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\boldsymbol{F}(P))$.

Для первопорядковых КНМЛ конкретизируем S как множество алгебр (алгебраических систем) данных вида $\alpha = (A_\alpha, Pr_\alpha)$, где Pr_α – множество эквитонных частичных предикатов вида ${}^V\!A_\alpha \to \{T, F\}$. Тогда

$A=\bigcup_{\alpha\in S} A_\alpha$ – множество всех базовых данных мира, $Pr=\bigcup_{\alpha\in S} Pr_\alpha$ – множество предикатов всех состояний мира.

Назовем т*ранзиционной модальной системой* (ТМС) КНМС, в которой R состоит из отношений вида $\rho\subseteq S\times S$. Трактуем ρ как отношения перехода (достижимости) на состояниях.

ТМС с базовыми модальными композициями $\{К_i \mid i\in I\}$ и $R=\{\rhd_i \mid i\in I\}$, где каждому $\rhd_i$ сопоставлено $К_i$, назовем *мультимодальными* (ММС). ТМС с единственной базовой модальной композицией $\Box$ (необходимо), в которых $R=\{\rhd\}$, назовем *общими* (ОТМС). ТМС, в которых $R=\{\rhd\}$, а базовые модальные композиции – это $\Box_\uparrow$ (всегда будет) и $\Box_\downarrow$ (всегда было), назовем *темпоральными* (ТмМС).

Для ОТМС и ТмМС также можно задать дуальные модальные композиции $\Diamond$ (возможно), $\Diamond_\uparrow$ (когда-то будет), $\Diamond_\downarrow$ (когда-то было): $\Diamond P$, $\Diamond_\uparrow P$, $\Diamond_\downarrow P$ означают $\neg\Box\neg P$, $\neg\Box_\uparrow\neg P$, $\neg\Box_\downarrow\neg P$ соответственно.

В зависимости от свойств отношений перехода можно определять различные классы ТМС. Традиционно рассматривают случаи рефлексивности, симметричности или транзитивности этих отношений. Если в ММС все $\rhd_i$ рефлексивные, то в названии ММС запишем символ R; если все $\rhd_i$ транзитивные, то запишем T; если все $\rhd_i$ симметричные, запишем S. Таким образом, получим следующие чистые типы ММС:

R-ММС, *T*-ММС, *S*-ММС, *RT*-ММС, *RS*-ММС, *TS*-ММС, *RTS*-ММС.

Аналогично получаем соответствующие классы ТмМС и ОТМС:

R-ОТМС, *T*-ОТМС, *S*-ОТМС, *RT*-ОТМС, *RS*-ОТМС, *TS*-ЗОТМС, *RTS*-ОТМС;

R-ТмМС, *T*-ТмМС, *S*-ТмМС, *RT*-ТмМС, *RS*-ТмМС, *TS*-ТмМС, *RTS*-ТмМС.

Для ММС возможны и более сложные, смешанные типы.

Например, $\rhd_1$ симметрично, $\rhd_2$ транзитивно и рефлексивно, $\rhd_2$ рефлексивно и т.п.

ММС с конечными множествами однотипних отношений перехода назовем э*пистемическими.* Они являются семантическими моделями эпистемических КНМЛ.

Языки чистых первопорядковых ТМС. Алфавит языка составляют: множество V предметных имен (переменных); множество Ps предикатных символов (ПС); символы базовых композиций $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$; множество Ms символов базовых модальных композиций (модальная сигнатура).

Множество Fm формул языка определяется индуктивно:

FA) каждый $p\in Ps$ – (атомарная) формула;

FL) пусть $\Phi,\Psi\in Fm$; тогда $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$, $\exists x\Phi\in Fm$;

FM) пусть $\Phi\in Fm$, $⌘\in Ms$; тогда $⌘\Phi\in Fm$.

В случае ММС имеем $Ms=\{К_i \mid i\in I\}$, тогда п. FM принимает вид:

FK) пусть $\Phi\in Fm$, $К_i\in Ms$; тогда $К_i\Phi\in Fm$.

Для ОТМС $Ms=\{\Box\}$, тогда п. FM принимает соответствующий вид:

FG) пусть $\Phi\in Fm$, тогда $\Box\Phi\in Fm$.

Для ТмМС имеем $Ms=\{\Box_\uparrow, \Box_\downarrow\}$, п. *FM* примет вид:

FT) пусть $\Phi\in Fm$; тогда $\Box_\uparrow\Phi$, $\Box_\downarrow\Phi\in Fm$.

Зададим отображение $Im : Ps \times S \rightarrow Pr$ интерпретации атомарных формул на состояниях, при этом $Im\text{т}(p, \alpha) \in Pr_\alpha$. Такое Im продолжим до отображения интерпретации $Jm : Fm \times S \rightarrow Pr$. При этом $Jm(\Phi, \alpha) \in Pr_\alpha$.

IA) $Jm(p, \alpha) = Im(p, \alpha)$ для всех $p \in Ps$;

IL) $Jm(\neg, \alpha) = \neg(Jm(\Phi, \alpha))$; $Jm(\vee\Phi\Psi, \alpha) = \vee(Jm(\Phi, \alpha), Jm(\Psi, \alpha))$; $Jm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \alpha) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Jm(\Phi, \alpha))$;

$$Jm(\exists x\Phi, \alpha)(d) = \begin{cases} T, \text{ если } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x \mapsto a) = T \text{ для некоторого } a \in A_\alpha, \\ F, \text{ если } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x \mapsto a) = F \text{ для всех } a \in A_\alpha, \\ \text{неопределено в остальных случаях.} \end{cases}$$

В случае ММС добавим следующий пункт:

$$\text{IK) } Jm(\mathrm{K}_i\Phi, \alpha)(d) = \begin{cases} T, \text{ если } Jm(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всех } \delta \in S:\ \alpha \rhd_i \delta, \\ F, \text{ если существует } \delta \in S:\ \alpha \rhd_i \delta \text{ и } Jm(\Phi,\delta)(d) = F, \\ \text{неопределено в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если для α не существует такого β, что $\alpha \rhd_i \beta$, то $Jm(\mathrm{K}_i\Phi, \alpha)(d)\uparrow$ для каждого $d \in {}^VA_\alpha$.

В случае ТмМС добавляем пункт:

$$\text{IT) } Jm(\Box_\uparrow\Phi, \alpha)(\mathrm{d}) = \begin{cases} T, \text{ если } Jm(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всех } \delta \in S:\ \alpha \rhd \delta, \\ F, \text{ если существует } \delta \in S:\ \alpha \rhd \delta \text{ и } Jm(\Phi,\delta)(d) = F, \\ \text{неопределено в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$Jm(\Box_\downarrow\Phi, \alpha)(\mathrm{d}) = \begin{cases} T, \text{ если } Jm(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всех } \delta \in S:\ \delta \rhd \alpha, \\ F, \text{ если существует } \delta \in S:\ \delta \rhd \alpha \text{ и } Jm(\Phi,\delta)(d) = F, \\ \text{неопределено в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если для α не существует такого β, что $\alpha \rhd \beta$, то $Jm(\Box_\uparrow\Phi, \alpha)(d)\uparrow$ для каждого $d \in {}^VA_\alpha$; если для α не существует такого β, что $\beta \rhd \alpha$, то $Jm(\Box_\downarrow\Phi, \alpha)(d)\uparrow$ для каждого $d \in {}^VA_\alpha$.

Тип ТМС определяется ее модальной сигнатурой *Ms*, однотипностью отношений из *R* для каждого $⌘ \in Ms$ и сигнатурой синтетической несущественности [Нікітченко, 2008].

Предикат $Jm(\Phi, \alpha)$ – значение формулы Φ в α – обозначим Φ_α.

Φ *истинна в ТМС M* (обозначим $M \models \Phi$), если предикат Φ_α частично истинный для каждого $\alpha \in S$. Φ *истинна* (обозначим $\models \Phi$), если $M \models \Phi$ для всех ТМС *M* одного типа.

ТМС сокращенно обозначаем в виде (*S*, *R*, *A*, *Jm*).

Можно выделить [Шкільняк, 2009] ТМС с *сильным* условием определенности на состояниях, названные *St*-ТМС, и ТМС с *общим* условием определенности на состояниях, названные *Gn*-ТМС. Модальные композиции *St*-ТМС не сохраняют [Шкільняк, 2009] эквитонность предикатов, что может нарушить информационную монотонность. В то же время модальные композиции *Gn*-ТМС условие эквитонности сохраняют.

Теорема 1. $\models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}⌘\Phi \leftrightarrow ⌘R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$ для каждого $⌘ \in \mathrm{Ms}$.

Итак, модальные композиции можно проносить через реноминации. В то же время взаимодействие модальных композиций и кванторов более сложно.

Теорема 2. $\models \exists x⌘\Phi \rightarrow ⌘\exists x\Phi$ и $\models ⌘\forall x\Phi \rightarrow \forall x⌘\Phi$ для каждого $⌘ \in \mathrm{Ms}$.

В то же время [Шкільняк, 2009] имеем $|\!\neq \forall x\square\Phi \to \square\forall x\Phi$ и $|\!\neq \square\exists x\Phi \to \exists x\square\Phi$.

Формула $\forall x\square\Phi\to\square\forall x\Phi$ известна как формула Баркан. Формула $\square\forall x\Phi\to\forall x\square\Phi$ – это ее конверсия, она опровергается на некоторых реляционных моделях традиционной модальной логики, но в то же время (теорема 2) эта формула истинна в каждой общей ТМС. Однако противоречия здесь нет, потому что в таких моделях неопределенность трактуется как ложь, а мы рассматриваем частичные предикаты.

Отношение логического следствия для множеств формул. Рассмотрим отношение логического следствия для множеств специфицированных состояниями формул. Такие формулы имеют вид Φ^{α}, где Φ – формула, α – её спецификация (отметка), которую трактуем как имя состояния мира.

Пусть ***M*** – ТМС с множеством состояний *S*, Γ – множество специфицированных состояниями формул, в котором спецификации (имена состояний) составляют множество S.

Множество Γ *согласовано* с ТМС ***M***, если задана инъекция S в *S*.

Пусть Δ и Γ – множества специфицированных формул.

Δ - *логическое следствие* Γ в согласованной с ними ТМС ***M*** (обозначим $\Gamma\,|\!=_M \Delta$), если для всех $d\in {}^{V}\!A$ из условия $\Phi_{\alpha}(d_{\alpha}) = T$ для всех $\Phi^{\alpha}\in\Gamma$ следует невозможность $\Psi_{\beta}(d_{\beta}) = F$ для всех $\Psi^{\beta}\in\Delta$.

Далее в записи $\Gamma\,|\!=_M \Delta$ подразумеваем согласованность ***M*** с Γ и Δ.

Δ - логическое следствие Γ относительно ТМС определенного типа (обозначим $\Gamma\,|\!= \Delta$), если $\Gamma\,|\!=_M \Delta$ для всех ТМС ***M*** определенного типа.

Рассмотрим основные свойства отношения $|\!=_M$. Не связанные с модальностями свойства повторяют соответствующие свойства логического следствия для множеств формул логики эквитонных предикатов. Это свойства типа $\neg$, $\vee$, RT, ΦN, RR, R$\neg$, R$\vee$ (см., напр., [Шкільняк, 2012]), к которым добавляем:

C) если $\Gamma\cap\Delta\neq\varnothing$, то $\Gamma\,|\!=_M \Delta$;

U) пусть $\Gamma\subseteq\Upsilon$ и $\Delta\subseteq\Sigma$. Тогда $\Gamma\,|\!=_M \Delta \Rightarrow \Upsilon\,|\!=_M \Sigma$;

$\mathrm{R}\exists\mathrm{p}_{|-}$) $R_{y}^{x}(\exists x\Phi)^{\alpha}, \Gamma\,|\!=_M \Delta \Leftrightarrow \exists x\Phi^{\alpha}, \Gamma\,|\!=_M \Delta$;

$\mathrm{R}\exists\mathrm{p}_{-|}$) $\Gamma\,|\!=_M \Delta, R_{y}^{x}(\exists x\Phi)^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma\,|\!=_M \Delta, \exists x\Phi^{\alpha}$;

$\mathrm{R}\exists\mathrm{R}_{|-}$) $R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi)^{\alpha}, \Gamma\,|\!=_M \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)^{\alpha}, \Gamma\,|\!=_M \Delta$;

$\mathrm{R}\exists\mathrm{R}_{-|}$) $\Gamma\,|\!=_M \Delta, R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi)^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma\,|\!=_M \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)^{\alpha}$;

$\mathrm{R}\text{⌘}_{|-}$) $\Gamma, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\text{⌘}\Phi)^{\alpha}\,|\!=_M \Delta \Leftrightarrow \Gamma, \text{⌘}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^{\alpha}\,|\!=_M \Delta$, где $\text{⌘}\in Ms$;

$\mathrm{R}\text{⌘}_{-|}$) $\Gamma\,|\!=_M \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\text{⌘}\Phi)^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma\,|\!=_M \Delta, \text{⌘}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^{\alpha}$, где $\text{⌘}\in Ms$.

Свойства, связанные с элиминацией кванторов:

$\exists\mathrm{R}_{|-}$) $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)^{\alpha}, \Gamma\,|\!=_M \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)^{\alpha}, \Gamma\,|\!=_M \Delta$ (здесь $y\in V_T$, $y\notin nm(\Gamma, \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$);

$\exists_{|-}$) $\exists x\Phi^{\alpha}, \Gamma\,|\!=_M \Delta \Leftrightarrow R_{y}^{x}(\Phi)^{\alpha}, \Gamma\,|\!=_M \Delta$ (здесь $y\in V_T$ и $y\notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$);

$\exists\mathrm{R}_{-|}$) $\Gamma\,|\!=_M \Delta, R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)^{\alpha}, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma\,|\!=_M \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)^{\alpha}$;

$\exists_{-|}$) $\Gamma\,|\!=_M \Delta, R_{y}^{x}(\Phi)^{\alpha}, \exists x\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma\,|\!=_M \Delta, \exists x\Phi^{\alpha}$.

Рассмотрим свойства, связанные с элиминацией модальностей. В случае ММС имеем (здесь $\mathrm{K}_i \in Ms$):

$\mathrm{K}_{i\,|-}$) $\mathrm{K}_i\Phi^{\alpha}, \Gamma\,|\!=_M \Delta \Leftrightarrow \{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd_i \beta\}\cup\Gamma\,|\!=_M \Delta$;

$\mathrm{K}_{i\,-|}$) $\Gamma\,|\!=_M \Delta, \mathrm{K}_i\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma\,|\!=_M \Delta, \Phi^{\beta}$ для всех $\beta\in S$ таких, что $\alpha \rhd_i \beta$.

В случае ТмМС получаем:

$\Box_{\uparrow|-}$) $\Box_{\uparrow}\Phi^{\alpha}$, $\Gamma \models_M \Delta$ $\Leftrightarrow$ $\{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta\} \cup \Gamma \models_M \Delta$;

$\Box_{\uparrow-|}$) $\Gamma \models_M \Delta$, $\Box_{\uparrow}\Phi^{\alpha}$ $\Leftrightarrow$ $\Gamma \models_M \Delta$, Φ^{β} для всех $\beta \in S$ таких, что $\alpha \rhd \beta$;

$\Box_{\downarrow|-}$) $\Box_{\downarrow}\Phi^{\alpha}$, $\Gamma \models_M \Delta$ $\Leftrightarrow$ $\{\Phi^{\beta} \mid \beta \rhd \alpha\} \cup \Gamma \models_M \Delta$;

$\Box_{\downarrow-|}$) $\Gamma \models_M \Delta$, $\Box_{\downarrow}\Phi^{\alpha}$ $\Leftrightarrow$ $\Gamma \models_M \Delta$, Φ^{β} для всех $\beta \in S$ таких, что $\beta \rhd \alpha$.

Указанные свойства (кроме C и U) отношения |= логического следствия для множеств специфицированных состояниями формул индуцируют соответствующие секвенциальные формы исчисления ТМЛ, а свойство C задает условие замкнутости секвенции.

Секвенциальные исчисления первопорядковых транзиционных модальных логик

Построим исчисления секвенциального типа для чистых первопорядковых ТМЛ эквитонных предикатов (в частности, для ММЛ, ТмМЛ, ОТМЛ). Предложенные секвенциальные исчисления индуцированы реляционной семантикой этих логик.

В работе будем использовать форму записи секвенций в стиле аналитических таблиц (см. [Смирнова, 1996]). Секвенцию понимаем как множество специфицированных формул. Это значит, что каждая формула секвенции отмечена (специфицирована) слева словом вида $\alpha|-$ ($_{|-}$-спецификация) или $\alpha-|$ ($_{-|}$-спецификация), которое назовем спецификацией состояния. Здесь |– и –| – специальные символы, α – имя состояния в котором рассматривается специфицированная формула. Именуем состояния натуральными числами, начальное состояние обозначаем 0. Выделяя формулы с $_{|-}$-спецификациями и $_{-|}$-спецификациями, секвенции обозначаем в виде $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$.

Секвенции обогащаем построенными на данный момент вывода множествами состояний мира и отношений на состояниях. Секвенциальные формы должны учитывать возможность изменения носителей состояний, поэтому для каждого $\alpha \in S$ нужно указывать построенное на данный момент множество его базовых данных A_{α}. Пусть Σ – множество специфицированных формул, пусть $\alpha\{A_{\alpha}\}$, $\beta\{A_{\beta}\}$, … – построенные на данный момент состояния с множествами их базовых данных, M – схема модели мира, т.е. построенные на данный момент отношения достижимости, записанные для имен состояний, *St* – построенное на данный момент множество имен состояний.

Обогащенные секвенции записываем как Σ // $\alpha\{A_{\alpha}\}$, $\beta\{A_{\beta}\}$, … // M, сокращенно Σ // *St* // M.

Секвенция Σ *замкнута*, если существуют имя состояния α и формула Φ такие, что $_{\alpha|-}\Phi \in \Sigma$ и $_{\alpha-|}\Phi \in \Sigma$.

Если секвенция $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ замкнута, то $\Gamma \models \Delta$.

Вывод в секвенциальных исчислениях имеет вид дерева, вершины которого – секвенции. Такие деревья называют секвенциальными.

Правила вывода секвенциальных исчислений – *секвенциальные формы*, они являются синтаксическими аналогами соответствующих свойств отношения |=. Базовые формы записываем как $\dfrac{\Sigma}{\Omega}$ или $\dfrac{\Sigma \quad \Lambda}{\Omega}$.

Секвенциальное дерево *замкнуто*, если каждый его лист – замкнутая секвенция. Секвенция Σ *выводима*, или *имеет вывод*, если существует замкнутое секвенциальное дерево с корнем Σ – вывод секвенции Σ.

Опишем базовые секвенциальные формы исчислений чистых первопорядковых ММЛ эквитонных предикатов. Формы, аналогичные соответствующим формам исчислений логики эквитонных квазиарных предикатов [Нікітченко, 2008], не меняют схему модели мира, но формы $\vdash\exists$ и $\vdash\exists\mathrm{R}$ изменяют состояния.

$$\vdash\mathrm{RT}\ \frac{{}_{\alpha}{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//\mathrm{M}}{{}_{\alpha}{\vdash}R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(A),\Sigma\ //St//\mathrm{M}};\qquad \dashv\mathrm{RT}\ \frac{{}_{\alpha}{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//\mathrm{M}}{{}_{\alpha}{\dashv}R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(A),\Sigma\ //St//\mathrm{M}};$$

$$\vdash\Phi\mathrm{N}\ \frac{{}_{\alpha}{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//\mathrm{M}}{{}_{\alpha}{\vdash}R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(A),\Sigma\ //St//\mathrm{M}},\ \text{где } y\in\nu(A);\qquad \dashv\Phi\mathrm{N}\ \frac{{}_{\alpha}{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//\mathrm{M}}{{}_{\alpha}{\dashv}R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(A),\Sigma\ //St//\mathrm{M}},\ \text{где } y\in\nu(A);$$

$$\vdash\mathrm{R}\exists\mathrm{R}\ \frac{{}_{\alpha}{\vdash}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma\ //St//\mathrm{M}}{{}_{\alpha}{\vdash}R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists xA),\Sigma\ //St//\mathrm{M}},\ \text{где } x\notin\{\bar u\};\qquad \dashv\mathrm{R}\exists\mathrm{R}\ \frac{{}_{\alpha}{\dashv}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma\ //St//\mathrm{M}}{{}_{\alpha}{\dashv}R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists xA),\Sigma\ //St//\mathrm{M}},\ \text{где } x\notin\{\bar u\};$$

$$\vdash\mathrm{R}\exists\mathrm{p}\ \frac{{}_{\alpha}{\vdash}\exists xA,\Sigma\ //St//\mathrm{M}}{{}_{\alpha}{\vdash}R^{x}_{y}(\exists xA),\Sigma\ //St//\mathrm{M}};\qquad \dashv\mathrm{R}\exists\mathrm{p}\ \frac{{}_{\alpha}{\dashv}\exists xA,\Sigma\ //St//\mathrm{M}}{{}_{\alpha}{\dashv}R^{x}_{y}(\exists xA),\Sigma\ //St//\mathrm{M}};$$

Формы типов RT, ΦN, R∃R, R∃p назовем вспомогательными, остальные базовые формы – основные.

$$\vdash\mathrm{RR}\ \frac{{}_{\alpha}{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}\circ{}^{\bar w}_{\bar y}(\mathrm{A}),\Sigma\ //St//\mathrm{M}}{{}_{\alpha}{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\mathrm{A})),\Sigma\ //St//\mathrm{M}};\qquad \dashv\mathrm{RR}\ \frac{{}_{\alpha}{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}\circ{}^{\bar w}_{\bar y}(\mathrm{A}),\Sigma\ //St//\mathrm{M}}{{}_{\alpha}{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\mathrm{A})),\Sigma\ //St//\mathrm{M}};$$

$$\vdash\mathrm{R}\neg\ \frac{{}_{\alpha}{\vdash}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//\mathrm{M}}{{}_{\alpha}{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma\ //St//\mathrm{M}};\qquad \dashv\mathrm{R}\neg\ \frac{{}_{\alpha}{\dashv}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//\mathrm{M}}{{}_{\alpha}{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma\ //St//\mathrm{M}};$$

$$\vdash\mathrm{R}\vee\ \frac{{}_{\alpha}{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(A)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma\ //St//\mathrm{M}}{{}_{\alpha}{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma\ //St//\mathrm{M}};\qquad \dashv\mathrm{R}\vee\ \frac{{}_{\alpha}{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(A)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma\ //St//\mathrm{M}}{{}_{\alpha}{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma\ //St//\mathrm{M}};$$

$$\vdash\neg\ \frac{{}_{\alpha}{\dashv}A,\ \Sigma\ //St//\mathrm{M}}{{}_{\alpha}{\vdash}\neg A,\ \Sigma\ //St//\mathrm{M}};\qquad \dashv\neg\ \frac{{}_{\alpha}{\vdash}A,\ \Sigma\ //St//\mathrm{M}}{{}_{\alpha}{\dashv}\neg A,\ \Sigma\ //St//\mathrm{M}};$$

$$\vdash\vee\ \frac{{}_{\alpha}{\vdash}A,\ \Sigma\ //St//\mathrm{M}\qquad {}_{\alpha}{\vdash}B,\ \Sigma\ //St//\mathrm{M}}{{}_{\alpha}{\vdash}A\vee B,\ \Sigma\ //St//\mathrm{M}};\qquad \dashv\vee\ \frac{{}_{\alpha}{\dashv}A,\ {}_{\alpha}{\dashv}B,\ \Sigma\ //St//\ \mathrm{M}}{{}_{\alpha}{\dashv}A\vee B,\ \Sigma\ //St//\mathrm{M}};$$

$$\vdash\exists\ \frac{{}_{\alpha}{\vdash}R^{x}_{z}(A),\Sigma\ //St'//\mathrm{M}}{{}_{\alpha}{\vdash}\exists xA,\Sigma\ //St//\mathrm{M}};\qquad \dashv\exists\ \frac{{}_{\alpha}{\dashv}\exists xA,{}_{\alpha}{\dashv}R^{x}_{y}(A),\ \Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha}{\dashv}\exists xA,\ \Sigma\ //St//M};$$

$$\vdash\exists\mathrm{R}\ \frac{{}_{\alpha}{\vdash}R^{\bar u,x}_{\bar v,z}(A),\Sigma\ //St'//\mathrm{M}}{{}_{\alpha}{\vdash}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma\ //St//\mathrm{M}};\qquad \dashv\exists\mathrm{R}\ \frac{{}_{\alpha}{\dashv}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),{}_{\alpha}{\dashv}R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(A),\ \Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha}{\dashv}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\ \Sigma\ //St//M}.$$

Для $\vdash\exists$ и $\vdash\exists\mathrm{R}$ имя z тотально несущественное, при этом $z\notin nm(\Sigma, A)$ для $\vdash\exists$ и $z\notin nm(\Sigma, R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA))$ для $\vdash\exists\mathrm{R}$, а к носителю A_α состояния α добавляется новый элемент z.

Формы для пронесения реноминации через модальные операторы (здесь $⌘\in Ms$):

$$\vdash\mathrm{R}⌘\ \frac{{}_{\alpha}{\vdash}⌘R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//\mathrm{M}}{{}_{\alpha}{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(⌘A),\Sigma\ //St//\mathrm{M}};\qquad \dashv\mathrm{R}⌘\ \frac{{}_{\alpha}{\dashv}⌘R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//\mathrm{M}}{{}_{\alpha}{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(⌘A),\Sigma\ //St//\mathrm{M}}.$$

Секвенциальные формы элиминации модальных операторов $\vdash\mathrm{K}_i$ и $\dashv\mathrm{K}_i$ записываются по-разному в зависимости от свойств отношений перехода. Традиционно рассматривают случаи, когда эти отношения могут быть транзитивными, рефлексивными или симметричными.

Рассмотрим для примера формы $\vdash\mathrm{K}_i$ и $\dashv\mathrm{K}_i$ исчислений ММЛ для следующих трех случаев.

1. *Общий случай:* на $\rhd_i$ не наложены ограничения. Тогда имеем:

$$_{|-}\mathrm{K}_i \ \frac{_{\alpha|-}\mathrm{K}_i A,\ _{\beta|-}A, \Sigma \ // St // \mathrm{M}}{_{\alpha|-}\mathrm{K}_i A, \Sigma \ // St // \mathrm{M}}; \qquad _{-|}\mathrm{K}_i \ \frac{_{\beta|-}A, \Sigma \ // St' // \mathrm{M} \cup \{\alpha \rhd_i \beta\}}{_{\alpha-|}\mathrm{K}_i A, \Sigma \ // St // \mathrm{M}}.$$

Форма $_{|-}\mathrm{K}_i$ применяется к $_{\alpha|-}\mathrm{K}_i A$ для всех имеющихся в данный момент (согласно схеме модели мира M) состояний β таких, что $\alpha \rhd_i \beta$. Если таких состояний нет, то вводим новое состояние β, полагаем $A_\beta = A_\alpha$, затем добавляем $\alpha \rhd_i \beta$ к схеме модели мира M.

Для формы $_{-|}\mathrm{K}_i$ вводим новое состояние β, к схеме модели мира M добавляем $\alpha \rhd_i \beta$ и задаем $A_\beta = A_\alpha$.

2. *Отношение $\rhd_i$ транзитивное и рефлексивное.* Тогда имеем:

$$_{|-}\mathrm{K}_i \ \frac{_{\alpha|-}\mathrm{K}_i A,\ _{\beta|-}A,\ _{\beta|-}\mathrm{K}_i A, \ \Sigma \ // \ St \ // \ \mathrm{M}}{_{\alpha|-}\mathrm{K}_i A, \Sigma \ // \ St \ // \ \mathrm{M}}; \qquad _{-|}\mathrm{K}_i \ \frac{_{\beta|-}A, \Sigma \ // St' // \mathrm{M} \cup \{\alpha \rhd_i \beta\}}{_{\alpha-|}\mathrm{K}_i A, \Sigma \ // St // \mathrm{M}}.$$

Форма $_{|-}\mathrm{K}_i$ применяется к $_{\alpha|-}\mathrm{K}_i A$ для всех имеющихся в данный момент (согласно схеме M) состояний β таких, что $\alpha \rhd_i \beta$. Заметим, что формула $_{\beta|-}\mathrm{K}_i A$ необходима в силу транзитивности $\rhd_i$. В силу рефлексивности $\rhd_i$ при первом применении формы $_{|-}\mathrm{K}_i$ посылка имеет вид $_{\alpha|-}\mathrm{K}_i A,\ _{\alpha|-}A,\ \Sigma \ // \ St \ // \ \mathrm{M}$.

Для формы $_{-|}\mathrm{K}_i$ вводим новое состояние β, к *M* добавляем $\alpha \rhd_i \beta$, задаем $A_\beta = A_\alpha$.

3. *Отношение $\rhd_i$ транзитивное, рефлексивное и симметричное.* Тогда имеем:

$$_{|-}\mathrm{K}_i \ \frac{_{\alpha|-}\mathrm{K}_i A,\ _{\beta|-}A,\ _{\beta|-}\mathrm{K}_i A, \ \Sigma \ // \ St \ // \ \mathrm{M}}{_{\alpha|-}\mathrm{K}_i A, \Sigma \ // \ St \ // \ \mathrm{M}}; \qquad _{-|}\mathrm{K}_i \ \frac{_{\beta|-}A, \Sigma \ // St' // \mathrm{M} \cup \{\alpha \rhd_i \beta, \beta \rhd_i \alpha\}}{_{\alpha-|}\mathrm{K}_i A, \Sigma \ // St // \mathrm{M}}.$$

Форма $_{|-}\mathrm{K}_i$ применяется к $_{\alpha|-}\mathrm{K}_i A$ для всех имеющихся в данный момент (согласно схеме M) состояний β таких, что $\alpha \rhd_i \beta$ или $\beta \rhd_i \alpha$. Формула $_{\beta|-}\mathrm{K}_i A$ необходима в силу транзитивности $\rhd_i$. В силу рефлексивности $\rhd_i$ при первом применении формы $_{|-}\mathrm{K}_i$ посылка имеет вид $_{\alpha|-}\mathrm{K}_i A,\ _{\alpha|-}A,\ \Sigma \ // \ St \ // \ \mathrm{M}$.

Для формы $_{-|}\mathrm{K}_i$ вводим новое состояние β, к *M* добавляем $\alpha \rhd_i \beta$ и $\beta \rhd_i \alpha$, задаем $A_\beta = A_\alpha$.

Базовые секвенциальные формы для случаев ТмМЛ и ОТМЛ задаются аналогично (см. [Шкільняк, 2009]). Для ТмМЛ операторы $\Box_\uparrow$ и $\Box_\downarrow$ при симметричности $\rhd$ действуют идентично, поэтому при условии такой симметричности темпоральные исчисления идентичны соответствующим исчислениям ОТМЛ.

Принимая во внимание свойства отношения |=, имеем:

Теорема 3. Пусть $\dfrac{_{|-}\Lambda_{-|}\mathrm{K} \ // \ St' \ // \ \mathrm{M}'}{_{|-}\Gamma_{-|}\Delta \ // \ St \ // \ \mathrm{M}}$ и $\dfrac{_{|-}\Lambda_{-|}\mathrm{K} \ // \ St \ // \ \mathrm{M} \quad _{|-}\mathrm{X}_{-|}\mathrm{Z} \ // \ St \ // \ \mathrm{M}}{_{|-}\Gamma_{-|}\Delta \ // \ St \ // \ \mathrm{M}}$ – базовые секвенциальные формы. Тогда имеем:

1) $\Lambda \models \mathrm{K} \Rightarrow \Gamma \models \Delta$; $\Lambda \models \mathrm{K}$ и $\mathrm{X} \models \mathrm{Z} \Rightarrow \Gamma \models \Delta$; 2) $\Gamma \not\models \Delta \Rightarrow \Lambda \not\models \mathrm{K}$; $\Gamma \not\models \Delta \Rightarrow \Lambda \not\models \mathrm{K}$ или $\mathrm{X} \not\models \mathrm{Z}$.

Корректность и полнота секвенциальных исчислений

Процедура построения вывода секвенции в исчислении ТМЛ в целом аналогична соответствующей процедуре для секвенциальных исчислений логик квазиарных предикатов [Нікітченко, 2008]. Рассмотрим её особенности на примере построения вывода (секвенциального дерева) секвенции ${}_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ в исчислении ММЛ.

Построение дерева ведем одновременно с построением схемы модели мира. Эта схема обновляется в результате применения ${}_{-|}K_r$-форм (в некоторых случаях ${}_{|-}K_r$-форм), которые прибавляют новые состояния. Построение дерева разбито на этапы. Перед началом построения зафиксируем бесконечный список *TN* "новых" тотально несущественных имен, не встречающихся в начальной секвенции. Каждое применение формы производится к конечному множеству доступных на данный момент формул. Перед применением основной формы в случае необходимости применяем нужное количество раз формы типов RT, ΦN, R$\exists$R, R$\exists$p. На каждом этапе построения сначала выполняем все ${}_{|-}\exists$-формы и ${}_{|-}\exists$R-формы, при этом берем новый $y\in TN$ в соответствующем состоянии, затем – оставшиеся основные формы, кроме элиминации модальностей. Формы ${}_{-|}\exists$ и ${}_{|-}\exists$R применяем многократно для всех имен доступных формул данной секвенции и ее потомков. Далее выполняем ${}_{-|}K_r$-формы, а после них многократно (согласно схемы модели мира) ${}_{|-}K_r$-формы.

Процедура построения завершена положительно, если получили замкнутое дерево. Если же получено конечное незамкнутое дерево либо процедура не может завершиться, то в дереве существует конечный или бесконечный незамкнутый путь $\wp$. Каждая из формул секвенции ${}_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ встретится на $\wp$ и станет доступной.

Теорема 4 (корректности). Пусть секвенция ${}_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ выводима. Тогда $\Gamma\,|\!=\Delta$.

Пусть ${}_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ выводима, тогда для нее можно построить замкнутое секвенциальное дерево. Все его листья – замкнутые секвенции, поэтому для каждого такого листа ${}_{|-}X_{-|}Z$ имеем $X\,|\!=Z$. От листьев дерева к его корню движемся с помощью секвенциальных форм. Согласно теореме 3, отношение |= сохраняется при переходе от посылок к следствиям форм. Поэтому для каждой вершины секвенциального дерева ${}_{|-}\Lambda_{-|}K$ имеем $\Lambda|\!=K$. В частности, для секвенции ${}_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ – корня дерева – тоже имеем $\Gamma\,|\!=\Delta$.

Для доказательства полноты секвенциальных исчислений ТМЛ используем метод систем модельных множеств [Семантика, 1981].

Система модельных множеств – это пара ($\{H_\alpha\,|\,\alpha\in S\}$, M), где H_α – модельное множество состояния α, M – схема моделей мира, заданная множеством отношений *R* на *S*. Множества H_α определяются условием корректности (индуцируется условием замкнутости секвенции) и условиями перехода (индуцируются выполнением соответствующих форм).

Множество H_α специфицированных формул из $W_\alpha = nm(H_\alpha)$ – модельное множество состояния α, если выполняются условие корректности MC и условия перехода M$\neg$, M$\vee$, MN, MT, MR$\exists$R, MR$\exists$p, MRR, MR$\neg$, MR$\vee$, M$\exists$, M$\exists$R, MRK, MK.

MC) Для каждой Φ лишь одна из специфицированных формул ${}_{\alpha|-}\Phi$ или ${}_{\alpha-|}\Phi$ может принадлежать H_α.

M$\neg$) Если ${}_{\alpha|-}\neg\Phi\in H_\alpha$, то ${}_{\alpha-|}\Phi\in H_\alpha$; если ${}_{\alpha-|}\neg\Phi\in H_\alpha$, то ${}_{\alpha|-}\Phi\in H_\alpha$.

M$\vee$) Если ${}_{\alpha|-}\Phi\vee\Psi\in H_\alpha$, то ${}_{\alpha|-}\Phi\in H_\alpha$ или ${}_{\alpha|-}\Psi\in H_\alpha$; если ${}_{\alpha-|}\Phi\vee\Psi\in H_\alpha$, то ${}_{\alpha-|}\Phi\in H_\alpha$ и ${}_{\alpha-|}\Psi\in H_\alpha$.

MN) Пусть $y\in\mu(\Phi)$; если ${}_{\alpha|-}R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)\in H_\alpha$, то ${}_{\alpha|-}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in H_\alpha$; если ${}_{\alpha-|}R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)\in H_\alpha$, то ${}_{\alpha-|}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in H_\alpha$.

MT) Если ${}_{\alpha|-}R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)\in H_\alpha$, то ${}_{\alpha|-}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in H_\alpha$; если ${}_{\alpha-|}R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)\in H_\alpha$, то ${}_{\alpha-|}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in H_\alpha$.

MR$\exists$R) Если ${}_{\alpha|-}R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi)\in H_\alpha$, то ${}_{\alpha|-}R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)\in H_\alpha$; если ${}_{\alpha-|}R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi)\in H_\alpha$, то ${}_{\alpha-|}R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)\in H_\alpha$.

MR$\exists$p) Если ${}_{\alpha|-}R^{x}_{y}(\exists x\Phi)\in H_\alpha$, то ${}_{\alpha|-}\exists x\Phi\in H_\alpha$; если ${}_{\alpha-|}R^{x}_{y}(\exists x\Phi)\in H_\alpha$, то ${}_{\alpha-|}\exists x\Phi\in H_\alpha$.

MRR) Если ${}_{\alpha|-}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \in H_\alpha$, то ${}_{\alpha|-}R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi) \in H_\alpha$; если ${}_{\alpha-|}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \in H_\alpha$, то ${}_{\alpha-|}R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi) \in H_\alpha$.

MR¬) Если ${}_{\alpha|-}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \in H_\alpha$, то ${}_{\alpha|-}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H_\alpha$; если ${}_{\alpha-|}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \in H_\alpha$, то ${}_{\alpha-|}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H_\alpha$.

MR∨) Если ${}_{\alpha|-}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \in H_\alpha$, то ${}_{\alpha|-}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi) \in H_\alpha$;

если ${}_{\alpha-|}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \in H_\alpha$, то ${}_{\alpha-|}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi) \in H_\alpha$.

M∃) Если ${}_{\alpha|-}\exists x\Phi \in H_\alpha$, то существует $y \in W_\alpha$: ${}_{\alpha|-}R_y^x(\Phi) \in H_\alpha$;

если ${}_{\alpha-|}\exists x\Phi \in H_\alpha$, то для всех $y \in W_\alpha$ имеем ${}_{\alpha-|}R_y^x(\Phi) \in H_\alpha$.

M∃R) Если ${}_{\alpha|-}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in H_\alpha$, то существует $y \in W$ такое, что ${}_{\alpha|-}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi) \in H_\alpha$;

если ${}_{\alpha-|}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in H_\alpha$, то для всех $y \in W$ имеем ${}_{\alpha-|}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi) \in H_\alpha$ (здесь $x \notin \{\bar{u}\}$).

MRK) Если ${}_{\alpha|-}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(K_i\Phi) \in H_\alpha$, то ${}_{\alpha|-}K_i R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H_\alpha$; если ${}_{\alpha-|}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(K_i\Phi) \in H_\alpha$, то ${}_{\alpha-|}K_i R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H_\alpha$ ($K_i \in Ms$).

MK) Если ${}_{\alpha|-}K_i\Phi \in H_\alpha$, то ${}_{\beta|-}\Phi \in H_\beta$ для всех $\beta \in S$: $\alpha \rhd_i \beta$;

если ${}_{\alpha-|}K_i\Phi \in H_\alpha$, то ${}_{\beta-|}\Phi \in H_\beta$ для некоторого $\beta \in S$: $\alpha \rhd_i \beta$ ($K_i \in Ms$).

Теорема 5. Пусть $\wp$ – незамкнутый путь в секвенциальном дереве, H_α – множество всех специфицированных ${}_{\alpha|-}$ или ${}_{\alpha-|}$ формул секвенций пути $\wp$, где $\alpha \in S$, M – объединение всех схем моделей мира секвенций пути $\wp$. Тогда $\mathrm{H}_M = (\{H_\alpha \mid \alpha \in S\}, \mathrm{M})$ – система модельных множеств.

Для перехода от нижней вершины пути к верхней используется одна из базисных секвенциальных форм. Переходы согласно этих форм соответствуют пунктам определения системы модельных множеств. Каждая непримитивная формула на пути $\wp$ рано или поздно будет разложена согласно соответствующей секвенциальной форме. Все секвенции пути $\wp$ незамкнуты, поэтому выполняется пункт MC определения системы модельных множеств.

Теорема 6. Пусть H_M – система модельных множеств, пусть $W = nm(\mathrm{H}_M)$. Тогда существуют ММС $\boldsymbol{M} = (S, R, A, Im)$ и инъективная функция $\delta \in {}^V A$, где $|A| = |W|$ и $asn(\delta) = W$, такие:

1) ${}_{\alpha|-}\Phi \in H_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha(\delta) = T$; 2) ${}_{\alpha-|}\Phi \in H_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha(\delta) = F$.

Доказательство проводим индукцией по сложности формулы согласно построению системы модельных множеств. Возьмем некоторое множество A такое, что $|A| = |W|$, и некоторую инъективную функцию $\delta \in {}^V A$ из $asn(\delta) = W$. Такая δ – биекция W на A. Пусть $W_\alpha = nm(\boldsymbol{H}_\alpha)$, тогда $A_\alpha = \delta(W_\alpha)$, δ_α – биекция W_α на A_α.

Сначала определим значения базовых предикатов на δ и на ИМ вида $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)$.

Если ${}_{\alpha|-}p \in H_\alpha$, то зададим $p_\alpha(\delta) = T$; если ${}_{\alpha-|}p \in H_\alpha$, то зададим $p_\alpha(\delta) = F$.

Если ${}_{\alpha|-}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in H_\alpha$, то зададим $p_\alpha(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) = T$; если ${}_{\alpha-|}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in H_\alpha$, то зададим $p_\alpha(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) = F$.

В остальных случаях значение $p_\alpha(d)$ задаем произвольным образом, учитывая эквитонность и ограничения несущественности имен: для всех $d, h \in A_\alpha^{W_\alpha}$ таких, что $d||\text{-}\mu(p) = h||\text{-}\mu(p)$, имеем $p_\alpha(d) = p_\alpha(h)$. Заданные таким образрм значения базовых предикатов продолжим по эквитонности, учитывая условия несущественности имен, на соответствующие $h \in {}^W A$. Понятно, что значения базовых предикатов заданы однозначно, причем учтена несущественность для p_α имен $y \in \mu(p)$.

Для элементарных формул (вида $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)$ или атомарных) утверждение теоремы следует из определения значений базовых предикатов. Шаг индукции доказывается обычным образом. Укажем здесь доказательство для пунктов М∃ и МК.

Пусть $_{\alpha|-}\exists x\Phi\in H_\alpha$. В силу определения H_M существует $y\in W_\alpha$ такое, что $_{\alpha|-}R_y^x(\Phi)\in H_\alpha$. По предположению индукции $(R_y^x(\Phi))_\alpha(\delta)=T$. Отсюда $\Phi_\alpha(\delta\nabla x\mapsto\delta(y))=T$. Но $\delta(y)\in A_\alpha$ согласно $y\in W_\alpha$, поэтому для $a=\delta(y)\in A_\alpha$ имеем $\Phi_\alpha(\delta\nabla x\mapsto a)=T$, откуда $(\exists x\Phi)_\alpha(\delta)=T$.

Пусть $_{\alpha-|}\exists x\Phi\in H_\alpha$. В силу определения H_M тогда $_{\alpha-|}R_y^x(\Phi)\in H_\alpha$ для всех $y\in W_\alpha$. По предположению $(R_y^x(\Phi))_\alpha(\delta)=F$ для всех $y\in W_\alpha$. Отсюда $\Phi_\alpha(\delta\nabla x\mapsto\delta(y))=F$ для всех $y\in W_\alpha$. Но каждое $b\in A_\alpha$ имеет вид $b=\delta(y)$ для некоторого $y\in W_\alpha$, ведь δ определяет биекцию $\delta_\alpha : W_\alpha\to A_\alpha$. Отсюда $\Phi_\alpha(\delta\nabla x\mapsto b)=F$ для всех $b\in A_\alpha$, откуда $(\exists x\Phi)_\alpha(\delta)=F$.

Пусть $_{\alpha|-}\mathrm{K}_i\Phi\in H_\alpha$, где $\mathrm{K}_i\in Ms$. По определению H_M имеем $_{\beta|-}\Phi\in H_\beta$ для всех β таких, что $\alpha\rhd_i\beta$. По предположению индукции тогда $\Phi_\beta(\delta)=T$ для всех β таких, что $\alpha\rhd_i\beta$. По определению K_i имеем $(\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(\delta)=T$.

Пусть $_{\alpha-|}\mathrm{K}_i\Phi\in H_\alpha$, где $\mathrm{K}_i\in Ms$. По определению H_M имеем $_{\beta-|}\Phi\in H_\beta$ для некоторого β такого, что $\alpha\rhd_i\beta$. По предположению индукции $\Phi_\beta(\delta)=F$. Отсюда в силу определения K_i имеем $(\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(\delta)=F$.

На основании теорем 5 и 6 получаем теорему полноты.

Теорема 7 (полноты). Пусть $\Gamma\models\Delta$. Тогда секвенция $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ выводима.

Предположим обратное: $\Gamma\models\Delta$ (т.е. $\Gamma\models_M\Delta$ для каждой согласованной ММС ***M***) и секвенция $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ невыводима. Если $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ невыводима, то в секвенциальном дереве для $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ существует незамкнутый путь. В силу теоремы 5 тогда $\mathrm{H}_M=(\{H_\alpha\mid\alpha\in S\}, R)$ – система модельных множеств (здесь H_α – множество всех специфицированных $_{\alpha|-}$ или $_{\alpha-|}$ формул секвенций этого пути, R – множество отношений на S). В силу теоремы 6 существуют ММС $\boldsymbol{M}=(S, R, A, Im)$ и $\delta\in{}^VA$ такие, что $_{\alpha|-}\Phi\in H_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha(\delta)=T$ и $_{\alpha-|}\Phi\in H_\alpha\Rightarrow\Phi_\alpha(\delta)=F$. В частности, это верно для формул секвенции $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$. Поэтому для всех $\Phi^\alpha\in\Gamma$ имеем $\Phi_\alpha(\delta)=T$ и для всех $\Psi^\beta\in\Delta$ имеем $\Psi_\beta(\delta)=F$. Это отрицает $\Gamma\models_M\Delta$. Итак, предположение о невыводимости $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ неверно, что и доказывает теорему.

Заключение

В работе исследованы программно-ориентированные логические формализмы модального типа – транзиционные композиционно-номинативные модальные логики частичных эквитонных предикатов. Выделены важные подклассы таких логик – мультимодальные, темпоральные, эпистемические, общие транзиционные. Описаны семантические модели и языки чистых первопорядковых транзиционных модальных логик, рассмотрены основные семантические свойства, в частности, свойства отношения логического следствия для множеств специфицированных состояниями формул. Используя эти свойства, для таких логик предложены исчисления секвенциального типа. Характерной их особенностью является использование упрощенных форм элиминации модальностей и форм элиминации кванторов под реноминациями. Для построенных исчислений доказаны теоремы корректности и полноты.

Литература

[Logics, 2008] Logics of Specification Languages. EATCS Series, Monograph in Theoretical Computer Sciens. Eds. D. Bjorner and M.C. Henson. – Heidelberg: Springer, 2008. – 624 p.

[Shkilniak, 2009] Shkilniak O.S. Composition nominative modal and temporal logics // INFORMATICS 2009: international conference: proceedings. – Herl'any, Slovakia, 2009. – P.148–153.

[Нікітченко, 2008] Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Математична логіка та теорія алгоритмів. – К.: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.

[Нікітченко, 2011] Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. Побудова модальних логік темпорального та епістемічного типу на основі композиційно-номінативного підходу // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2011. – Вип. 3. – С. 204–211.

[Семантика, 1981] Семантика модальных и интенсиональных логик. – М.: Прогресс, 1981. –494 с.

[Смирнова, 1996] Смирнова Е.Д. Логика и философия. – М.: РОССПЕН, 1996. – 304 с.

[Шкільняк, 2009] Шкильняк О.С. Семантичні властивості композиційно-номінативних модальних логік // Пробл. програмування. – 2009. – № 4. – С. 11–23.

[Шкільняк, 2012] Шкільняк О.С. Секвенційні числення мультимодальних композиційно-номінативних логік // Вісник Київського ун-ту. Серія: кібернетика. – К., 2012. – Вип. 12. – С. 55–59.

Информация об авторе

О.С. Шкильняк *– кандидат физ.-мат. наук, ассистент Киевского национального университета имени Тараса Шевченко; e-mail: me.oksana@gmail.com*

Основные области научных исследований: формальные методы спецификации программ, модальные логики частичных предикатов, исчисления секвенциального типа