СЕМАНТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ЧИСТЫХ КОМПОЗИЦИОННО-НОМИНАТИВНЫХ ЛОГИК ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Николай Никитченко, Степан Шкильняк

Аннотация: *Исследованы чистые первопорядковые композиционно-номинативные логики частичных однозначных предикатов. Введено расширение логики специальными предикатами, которые определяют наличие значений для переменных. На этой основе для таких логик построены исчисления секвенциального типа. Для этих исчислений доказаны теоремы корректности и полноты.*

Ключевые слова: *логика, предикат, логическое следствие, вывод, секвенциальное исчисление.*

ACM классификация ключевых слов: *F.3.1 Specifying and Verifying and Reasoning about Programs; F.4.1 Mathematical Logic – Proof theory*

Вступление

Расширение сферы применения математической логики в информатике и программировании привело к созданию множества разнообразных логических систем (см., напр., [Handbook, 1994–2000]). В их основе, как правило, лежит классическая логика предикатов. Но такая логика имеет принципиальные ограничения, что существенно усложняет ее применение. В первую очередь следует отметить то, что для программирования характерным является использование частичных неоднозначных отображений над сложными данными, а классическая логика базируется на традиционных математических структурах однозначных тотальных конечно-арных отображений. Ограничения классической логики предикатов делают актуальной проблему разработки новых логических формализмов на общей для логики и программирования основе. Такой естественной основой является композиционно-номинативний подход [Никитченко, 1999] к построению моделей программ и ориентированных на них логик. На его базе разработано много разнообразных логических систем, находящихся на разных уровнях абстрактности и общности (см. [Нікітченко, 2008], [Шкільняк, 2010]. [Нікітченко, 2011], [Шкільняк, 2012]). Программно-ориентированные логические формализмы, построенные на основе композиционно-номинативного подхода, названы композиционно-номинативными логиками (КНЛ). Причиной их возникновения стала необходимость усиления возможностей классической логики для решения новых задач информатики и програмирования. КНЛ базируются на общих классах частичных отображений, заданных на произвольных наборах именованных значений. Такие отображения названы квазиарными.

Целью данной работы является исследование чистых КНЛ первого порядка и формализация вывода в этих логиках путем построения специальных исчислений секвенциального типа. Описаны языки и семантические модели таких логик, исследованы их семантические свойства, в частности, свойства отношения логического следствия для множеств формул. Предложенные исчисления базируются на идее расширения логики специальными предикатами, определяющими наличие значений для предметных имен (переменных). Для построенных исчислений доказаны теоремы корректности и полноты.

Понятия, которые здесь не определены, понимаем в смысле работ [Нікітченко, 2008], [Нікітченко, 2011].

Языки и семантические модели композиционно-номинативных логик

Под предикатом на множестве D будем понимать произвольную функцию вида $P : D \to \{T, F\}$, где $\{T, F\}$ – множество истинностных значений. В данной работе рассматриваем частичные однозначные предикаты.

Областью истинности и областью ложности однозначного предиката P на D назовем множества

$$\boldsymbol{T}(P) = \{d \in D \mid P(d) = T\} \text{ и } \boldsymbol{F}(P) = \{d \in D \mid P(d) = F\}.$$

Предикат P назовем неопровержимым, или частично истинным, если $\boldsymbol{F}(P) = \varnothing$;

Предикат P назовем выполннимым, если $\boldsymbol{T}(P) \neq \varnothing$.

Согласно композиционно-номинативному подходу, построение КНЛ начинаем с гранично-абстрактных уровней, постепенно их конкретизируя.

На *пропозициональном* уровне предикаты имеют вид $P : D \to \{T, F\}$, где D – совокупность абстрактных данных. Композиции пропозиционального уровня называют логическими связками, наиболее распространенными из них являются отрицание $\neg$, дизъюнкция $\vee$, конъюнкция **&**, импликация $\to$, эквиваленция $\leftrightarrow$.

На *номинативных* уровнях сложные данные строятся из более простых на основе отношений именования (номинативных отношений), такие данные названы номинатами. Основным из номинативных является уровень однозначных номинатов (именных множеств), на нем далее выделяем реноминативный и первопорядковые уровни. Определяющей особенностью первопорядковых уровней является наличие мощных композиций квантификации. Базовый первопорядковый уровень – кванторный, его можно назвать по аналогии с классической логикой уровнем чистых КНЛ первого порядка (ЧКНЛ).

Именными множествами называют множества пар "имя-значение". Формальное определение такое.

V-именное множество (V-ИМ) над A – это произвольная однозначная функция вида $\delta : V \to A$. Здесь V и A – множества предметных имен и предметных значений. Класс всех V-ИМ над A обозначаем ${}^{V}\!A$.

V-ИМ представляем в виде $[v_1 \mapsto a_1,\ldots,v_n \mapsto a_n,\ldots]$, где $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

Вводим функцию $asn : {}^{V}\!A \to 2^V$ определения означенных имен: $asn(\delta) = \{v \in V \mid v \mapsto a \in \delta$ для некоторого $a \in A\}$.

Определяем $\delta \| X = \{v \mapsto a \in \delta \mid v \in X \subseteq V\}$. Вместо $\delta \| (V \setminus X)$ пишем $\delta \|_{-X}$.

Операцию наложения вводим так: $\delta_1 \nabla \delta_2 = \delta_2 \cup (\delta_1 \| (V \setminus asn(\delta_2)))$.

Операцию реноминации $r^{v_1,\ldots,v_n}_{x_1,\ldots,x_n} : {}^{V}\!A \to {}^{V}\!A$ зададим так: $r^{v_1,\ldots,v_n}_{x_1,\ldots,x_n}(\delta) = [v_1 \mapsto \delta(x_1),\ldots,v_n \mapsto \delta(x_n)] \cup (\delta \| (V \setminus \{v_1,\ldots,v_n\}))$.

Для реноминации также используем сокращенное обозначение $r^{\bar{v}}_{\bar{x}}$.

Функцию вида $P : {}^{V}\!A \to \{T, F\}$ называют V-квазиарным предикатом на A.

Класс V-квазиарных предикатов на A обозначаем Pr^A.

Имя $x \in V$ (строго) несущественно для $P \in Pr^A$, если $P(d \nabla x \mapsto a) = P(d \|_{-x})$ для каждых $d \in {}^{V}\!A$ и $a \in A$.

Базовыми композициями ЧКНЛ есть пропозициональные связки $\neg$ и $\vee$, реноминации $\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, кванторы $\exists \boldsymbol{x}$. Они задаются, используя области истинности и ложности соответствующих предикатов, таким образом:

$$\boldsymbol{T}(\neg P) = \boldsymbol{F}(P);\ \ \boldsymbol{F}(\neg P) = \boldsymbol{T}(P);$$

$$\boldsymbol{T}(P \vee Q) = \boldsymbol{T}(P) \cup \boldsymbol{T}(Q);\ \ \boldsymbol{F}(P \vee Q) = \boldsymbol{F}(P) \cap \boldsymbol{F}(Q);$$

$$\boldsymbol{T}(\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(P)) = r^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\boldsymbol{T}(P));\ \ \boldsymbol{F}(\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(P)) = r^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\boldsymbol{F}(P));$$

$$\boldsymbol{T}(\exists \boldsymbol{x} P) = \{d \in {}^{V}\!A \mid P(d \nabla x \mapsto a) = T \text{ для некоторого } a \in A\};\ \ \boldsymbol{F}(\exists \boldsymbol{x} P) = \{d \in {}^{V}\!A \mid P(d \nabla x \mapsto a) = F \text{ для всех } a \in A\}.$$

Композиции $\rightarrow$, **&**, $\leftrightarrow$, $\forall\boldsymbol{x}$ – производные, они выражаются через базовые композиции $\neg$, $\vee$, $\exists\boldsymbol{x}$ так:

$P\rightarrow Q = \neg P\vee Q$; $P\&Q = \neg(\neg P\vee\neg Q)$; $P\leftrightarrow Q = (P\&Q)\vee(\neg Q\&\neg P)$; $\forall\boldsymbol{x}P = \neg\exists\boldsymbol{x}\neg P$.

Семантическими моделями ЧКНЛ являются композиционные системы квазиарных предикатов кванторного уровня $({}^VA, Pr^A, \boldsymbol{C})$, где $\boldsymbol{C}$ задается базовыми композициями $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists\boldsymbol{x}$. Термы соответствующей композиционной алгебры $(Pr^A, \boldsymbol{C})$ трактуем как формулы языка ЧКНЛ. Алфавит языка: символы базовых композиций, множество Ps предикатных символов (ПС), множество V предметных имен (переменных).

Множество Ps образует сигнатуру языка. Множество Fr формул языка ЧКНЛ задается индуктивно:

1) каждый $p\in Ps$ – формула, такие формулы назовем *атомарными*;

2) если Φ и Ψ – формулы, то $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$, $\exists x\Phi$ – формулы.

Формулу вида $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ будем называть *R-формулой*.

Будем обозначать $nm(\Phi)$ множество всех предметных имен, фигурирующих в формуле Φ.

Отображение интерпретации формул $J: Fr\rightarrow Pr^A$ определяется с помощью тотального однозначного отображения $I: Ps\rightarrow Pr^A$, которое сопоставляет символам из Ps базовые предикаты.

1) $J(p) = I(p)$ для каждого $p\in Ps$;

2) $J(\neg\Phi) = \neg(J(\Phi))$, $J(\vee\Phi\Psi) = \vee(J(\Phi), J(\Psi))$, $J(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(J(\Phi))$, $J(\exists x\Phi) = \exists\boldsymbol{x}(J(\Phi))$.

Отображение $I: Ps\rightarrow Pr$ связывает алгебру данных (A, Pr) с языком ЧКНЛ. Получаем алгебраическую систему (АС) с приданной сигнатурой – объект вида $((A, Pr^A), I)$, обозначаемую (A, I). Такая АС задает композиционную систему $({}^VA, Pr^A, C)$, поэтому АС с приданной сигнатурой являются интегрированными семантическими моделями, связывающими язык логики с алгебрами данных. Назовем их моделями языка (МЯ).

Предикат $J(\Phi)$ – значение формулы Φ при интерпретации на модели языка $\boldsymbol{A} = (A, I)$, – обозначаем Φ_A.

Имя $x\in V$ несущественно для формулы Φ, если для каждой МЯ $\boldsymbol{A}$ некоторого класса моделей имя x несущественно для Φ_A.

Формула Φ истинна в МЯ $\boldsymbol{A}$, или неопровержима в $\boldsymbol{A}$ (обозн. $\boldsymbol{A}\models\Phi$), если Φ_A неопровержим.

Формула Φ всюду истинна, или неопровержима (обозн. $\models\Phi$), если $\boldsymbol{A}\models\Phi$ для каждой МЯ $\boldsymbol{A}$.

Формула Φ – следствие формулы Ψ в МЯ $\boldsymbol{A}$ (обозн. $\Phi\,{}_A\!\models\Psi$), если $\boldsymbol{T}(\Phi_A)\cap\boldsymbol{F}(\Psi_A) = \varnothing$.

Понятно, что $\Phi\,{}_A\!\models\Psi \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\models\Phi$.

Формула Φ – логическое следствие формулы Ψ (обозн. $\Phi\models\Psi$), если $\Phi\,{}_A\!\models\Psi$ для каждой МЯ $\boldsymbol{A}$.

Формулы Φ и Ψ логически эквивалентны (обозн. $\Phi\sim\Psi$), если $\Phi\models\Psi$ и $\Psi\models\Phi$.

Формулы Φ и Ψ строго эквивалентны в МЯ $\boldsymbol{A}$ (обозн. $\Phi\,{}_A\!\sim_{TF}\Psi$), если $\boldsymbol{T}(\Phi_A) = \boldsymbol{T}(\Psi_A)$ и $\boldsymbol{F}(\Phi_A) = \boldsymbol{F}(\Psi_A)$.

Формулы Φ и Ψ логически строго эквивалентны (обозн. $\Phi\sim_{TF}\Psi$), если $\Phi\,{}_{\boldsymbol{A}}\!\sim_{TF}\Psi$ для каждой МЯ $\boldsymbol{A}$.

Основой эквивалентных преобразований формул является теорема семантической эквивалентности.

Теорема 1. Пусть Φ' получена с формулы Φ заменой некоторых вхождений формул $\Phi_1,..., \Phi_n$ на $\Psi_1,..., \Psi_n$ соответственно. Если $\Phi_1\sim_*\Psi_1$, ..., $\Phi_n\sim_*\Psi_n$, то $\Phi\sim_*\Phi'$ (здесь $\sim_*$ – это $\sim$ или $\sim_{TF}$).

Для каждого $p\in Ps$ множество синтетически (строго) несущественных предметных имен зададим с помощью тотальной функции $\nu: Ps\rightarrow 2^V$, которая затем продолжается до $\nu: Fr\rightarrow 2^V$ таким образом:

$\nu(\neg\Phi) = \nu(\Phi)$;

$\nu(\vee\Phi\Psi) = \nu(\Phi)\cap\nu(\Psi)$;

$\nu(\exists x\Phi) = \nu(\Phi)\cup\{x\}$;

$\nu(R^{v_1,...,v_n}_{x_1,...,x_n}\Phi) = (\nu(\Phi)\cup\{v_1,...,v_n\})\cap(V\setminus\{x_i \mid v_i\notin\nu(\Phi), i\in\{1,\ldots,n\}\})$.

Для ЧКНЛ постулируем бесконечность множества $V_T = \bigcap_{p\in Ps}\nu(p)$ тотально несущественных имен.

Формула *примитивная*, если она атомарная либо имеет вид $R^{\bar v}_{\bar x}p$, причем отсутствуют тождественные переименования и $\bar{v}$ не содержит несущественных для p имен.

Основные свойства формул, связанные с пропозициональными композициями, аналогичны свойствам соответствующих классических логических связок. Это следующие свойства:

– коммутативность $\vee$, **&** и $\leftrightarrow$;
– ассоциативность $\vee$ и **&**;
– дистрибутивность $\vee$ относительно **&** и **&** относительно $\vee$;
– идемпотентность $\vee$ и **&**;
– законы контрапозиции, снятия двойного отрицания, де Моргана.

Укажем свойства формул, связанные с композицией реноминации.

RT) $R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi) \sim_{TF} R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)$. В частности, $R^{z}_{z}(\Phi) \sim_{TF} \Phi$.

R$\neg$) $R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi) \sim_{TF} \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)$.

R$\vee$) $R^{\bar v}_{\bar x}(P\vee Q) \sim_{TF} R^{\bar v}_{\bar x}(P) \vee R^{\bar v}_{\bar x}(Q)$.

Подобным образом записываем свойства R&, R$\rightarrow$, R$\leftrightarrow$.

RR) $R^{\bar v}_{\bar x}\,(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)) \sim_{TF} R^{\bar v}_{\bar x} \circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)$.

RN) Пусть имя y несущественно для Φ. Тогда $R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi) \sim_{TF} R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)$.

NR) $\exists y\, R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi) \sim_{TF} R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi)$ и $\forall y\, R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi) \sim_{TF} R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi)$ при $y\notin\{z,\bar x\}$ – несущественность верхних имен реноминаций. В частности, при $y\neq z$ имеем $\exists y R^{y}_{z}(\Phi) \sim_{TF} R^{y}_{z}(\Phi)$ и $\forall y R^{y}_{z}(\Phi) \sim_{TF} R^{y}_{z}(\Phi)$.

R$\exists$R) $R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists x\Phi) \sim_{TF} R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi)$ – свертка по квантифицированному имени (здесь $x\notin\{\bar u\}$).

В частности, имеем $R^{x}_{y}(\exists x\Phi) \sim_{TF} \exists x\Phi$.

R$\exists$B) $R^{\bar v}_{\bar u}(\exists x\Phi) \sim_{TF} \exists x R^{\bar v}_{\bar u}(\Phi)$ при $x\notin\{\bar v,\bar u\}$ – ограниченная R$\exists$-дистрибутивность.

Аналогичные свойства R$\forall$R и R$\forall$B можно записать для $\forall x$.

Наличие несущественных имен позволяет делать переименования.

RNm) Пусть $y\in V$ несущественно для формулы Φ. Тогда $\exists x\Phi \sim_{TF} \exists y R^{x}_{y}(\Phi)$ и $\forall x\Phi \sim_{TF} \forall y R^{x}_{y}(\Phi)$.

Основные свойства, связанные с композициями квантификации:

Q1) $\exists x\exists y\Phi \sim_{TF} \exists y\exists x\Phi$ и $\forall x\forall y\Phi \sim_{TF} \forall y\forall x\Phi$;

Q2) $\neg\forall x\Phi \sim_{TF} \exists x\neg\Phi$ и $\neg\exists x\Phi \sim_{TF} \forall x\neg\Phi$;

Q3) $\exists x\Phi \sim_{TF} \forall x\exists x\Phi$, $\exists x\Phi \sim_{TF} \exists x\exists x\Phi$; $\forall x\Phi \sim_{TF} \forall x\forall x\Phi$, $\forall x\Phi \sim_{TF} \exists x\forall x\Phi$;

Q4) $\exists x\Phi\vee\exists x\Psi \sim_{TF} \exists x(\Phi\vee\Psi)$ и $\forall x\Phi\&\forall x\Psi \sim_{TF} \forall x(\Phi\&\Psi)$;

Q5) $\exists x(\Phi\&\Psi) \models \exists x\Phi\&\exists x\Psi$ и $\forall x\Phi\vee\forall x\Psi \models \forall x(\Phi\vee\Psi)$;

Q6) $\exists y\forall x\Phi \models \forall x\exists y\Phi$; в то же время $\forall x\exists y\Phi \not\models \exists y\forall x\Phi$;

Q7) $\forall x\Phi \models \exists x\Phi$; в то же время $\Phi \not\models \forall x\Phi$, $\exists x\Phi \not\models \Phi$;

Q8) $|= \forall x\,(\forall x\Phi\to\Phi)$ и $|= \exists x\,(\forall x\Phi\to\Phi)$; $|= \forall x\,(\Phi\to\exists x\Phi)$ и $|= \exists x\,(\Phi\to\exists x\Phi)$;

Свойства Q1–Q8 аналогичны соответствующим свойствам классической логики.

Для логики квазиарных предикатов значение предиката $P(d)$ может быть разным в зависимости от того, входит или не входит в d компонента с определенным предметным именем. Поэтому в общем случае логики квазиарных предикатов некоторые важные законы классической логики уже неверны.

Пример 1. Существуют МЯ ***A*** и формулы Φ, ψ такие: $\Phi\,{}_A|\neq \exists x\Phi$ и $\forall x\psi\,{}_A|\neq \psi$.

Интерпретируем ПС p на МЯ ***A*** так: $p_A(d)=\begin{cases} T, \text{ если } x\in asn(d),\\ F, \text{ если } x\notin asn(d).\end{cases}$

Пусть ψ – это ПС p, Φ – это $\neg p$. Тогда $\boldsymbol{T}(\forall x\psi_A) = \boldsymbol{T}(\forall x\,p_A) = {}^VA$, $\varnothing\subset \boldsymbol{F}(p_A)$; $\boldsymbol{F}(\exists x\Phi_A) = \boldsymbol{F}(\exists x\neg p_A) = {}^VA$, $\varnothing\subset \boldsymbol{T}(\Phi_A) = \boldsymbol{T}(\neg p_A)$. Отсюда $\boldsymbol{T}(\forall x\psi_A)\cap \boldsymbol{F}(\psi_A)\neq\varnothing$, $\boldsymbol{T}(\Phi_A)\cap \boldsymbol{F}(\exists x\Phi_A)\neq\varnothing$. Отсюда $\Phi\,{}_A|\neq \exists x\Phi$ и $\forall x\psi\,{}_A|\neq\psi$.

Пример 2. Существуют МЯ ***A*** и формула Φ: $\Phi\,{}_A|= \forall x\Phi$ и $\exists x\Phi\,{}_A|\neq\Phi$.

Пусть Φ – это формула $\forall x\,p\to p$ для ПС p. Интерпретируем ПС p на МЯ ***A*** так, как в примере 1. Тогда имеем: $\varnothing\subset \boldsymbol{T}(p_A)\subset {}^VA$, $\varnothing\subset \boldsymbol{F}(p_A)\subset {}^VA$, $\boldsymbol{T}(\forall x\,p_A) = {}^VA$, $\boldsymbol{F}(\forall x\,p_A) = \varnothing$, $\boldsymbol{T}(\exists x(\forall x\,p\to p)_A) = {}^VA$, $\boldsymbol{F}(\exists x(\forall x\,p\to p)_A) = \varnothing$, $\boldsymbol{T}(\forall x(\forall x\,p\to p)_A) = {}^VA$, $\boldsymbol{F}(\forall x(\forall x\,p\to p)_A) = \varnothing$, $\varnothing\subset \boldsymbol{T}((\forall x\,p\to p)_A)\subset {}^VA$, $\varnothing\subset \boldsymbol{F}((\forall x\,p\to p)_A)\subset {}^VA$. Отсюда $\Phi\,{}_A|= \forall x\Phi$ и $\exists x\Phi\,{}_A|\neq\Phi$.

Таким образом, в общем случае логики квазиарных предикатов имеем свойства:

Q9) не всегда верны $|= \Phi\to\exists x\Phi$ и $|=\forall x\Phi\to\Phi$;

Q10) для некоторых формул Φ возможно: $|= \Phi\to\forall x\Phi$ и неверно $|= \exists x\Phi\to\Phi$.

Итак, при интерпретациях формул целесообразно явно указывать означенные и неозначенные имена. Для этого вводим специальные 0-арные композиции – параметризованные по предметным именам предикаты εz, определяющие наличие значения для $z\in V$, т.е. наличие в данных компоненты с этим z.

Предикаты-индикаторы εz наличия в $d\in{}^VA$ значения для предметных имен $z\in V$ определяются так:

$\varepsilon z(d) = T$, если $d(z)\uparrow$; $\varepsilon z(d) = F$, если $d(z)\downarrow$.

Дадим определение предиката εz через его области истинности и ложности.

$\boldsymbol{F}(\varepsilon z_A) = \{d\mid d(z)\downarrow\} = \{d\in{}^VA\mid z\in asn(d)\}$; $\boldsymbol{T}(\varepsilon z_A) = \{d\mid d(z)\uparrow\} = \{d\in{}^VA\mid z\notin asn(d)\}$.

Теорема 2. $\boldsymbol{T}(R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(P))\cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y)\subseteq \boldsymbol{T}(R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xP))$ и $\boldsymbol{F}(R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xP))\cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y)\subseteq \boldsymbol{F}(R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(P))$.

Доказательство. Пусть $d\in \boldsymbol{T}(R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(P))\cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y)$, тогда $d(y)\downarrow$ и $R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(P)(d) = T$, откуда $d(y)\downarrow a$ для некоторого $a\in A$ и $P\,(d\nabla\bar u\mapsto d(\bar v)\nabla x\mapsto d(y)) = T$. Итак, $P\,(d\nabla\bar u\mapsto d(\bar v)\nabla x\mapsto a) = T$ для некоторого $a\in A$, откуда $(\exists xP)(r_{\bar v}^{\bar u}(d)) = T$, поэтому $R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xP)(d) = T$, что дает $d\in \boldsymbol{T}(R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xP))$. Итак, $\boldsymbol{T}(R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(P))\cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y)\subseteq \boldsymbol{T}(R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xP)$.

Пусть $d\in \boldsymbol{F}(R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(P))\cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y)$, тогда $d(y)\downarrow$ и $R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xP)(d) = F$. Из последнего имеем $(\exists xP)\,(d\nabla\bar u\mapsto d(\bar v)) = F$, поэтому $P\,(d\nabla\bar u\mapsto d(\bar v)\nabla x\mapsto b) = F$ для всех $b\in A$. В силу $d(y)\downarrow$ имеем $d(y)\downarrow a$ для некоторого $a\in A$, тогда $P\,(d\nabla\bar u\mapsto d(\bar v)\nabla x\mapsto d(y)) = F$, откуда $R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(P)(d) = F$, $d\in \boldsymbol{F}(R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(P))$. Итак, $\boldsymbol{F}R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xP)\cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y)\subseteq \boldsymbol{F}(R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(P))$.

Как отдельный случай теоремы 2 имеем: $\boldsymbol{T}(R_y^x(P))\cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y)\subseteq \boldsymbol{T}(\exists xP)$ и $\boldsymbol{F}(\exists xP)\cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y)\subseteq \boldsymbol{F}(R_y^x(P))$.

Заметим, что без использования предикатов-индикаторов εz теорема 2 уже неверна.

Пример 3. Соотношения $\boldsymbol{T}(R_y^x(P))\subseteq \boldsymbol{T}(\exists x(P))$ и $\boldsymbol{F}(\exists x(P))\subseteq \boldsymbol{F}(R_y^x(P))$ верны не всегда.

Для опровержения возьмем в качестве P предикат $\neg p_A$ примера 1.

Отношение логического следствия для множеств формул

Пусть $\Gamma, \Delta \subseteq Fr$. Δ – логическое следствие Γ в МЯ ***A*** (обозн. $\Gamma\,_A|\!= \Delta$), если $\bigcap\limits_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_A) \cap \bigcap\limits_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_A) = \varnothing$.

Δ – логическое следствие Γ (обозн. $\Gamma \models \Delta$), если $\Gamma\,_A|\!= \Delta$ для каждой МЯ ***A***.

Теорема 3 (замены эквивалентных). Пусть $\Phi \sim_{TF} \Psi$. Тогда $\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models \Delta$ и $\Gamma \models \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Psi$.

Укажем основные свойства отношения $\models$.

C) Если $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$, то $\Gamma \models \Delta$.

U) Пусть $\Gamma \subseteq \Lambda$ и $\Delta \subseteq \Sigma$, тогда $\Gamma \models \Delta \Rightarrow \Lambda \models \Sigma$.

$\neg_{\vdash}$) $\neg\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi$;

$\neg_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$.

$\vee_{\vdash}$) $\Phi\vee\Psi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$ и $\Psi, \Gamma \models \Delta$;

$\vee_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, \Phi\vee\Psi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi, \Psi$.

RT$_{\vdash}$) $R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

RT$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$.

ΦN$_{\vdash}$) $R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

ΦN$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$.

RR$_{\vdash}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

RR$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)$.

R$\neg_{\vdash}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

R$\neg_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$.

R$\vee_{\vdash}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi), \Gamma \models \Delta$;

R$\vee_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)$.

R$\exists$R$_{\vdash}$) $R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta$;

R$\exists$R$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$.

R$\exists$p$_{\vdash}$) $R^{x}_{y}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists x\Phi, \models \Delta$;

R$\exists$p$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{x}_{y}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \models \Delta, \exists x\Phi$.

Укажем свойства, связанные с элиминацией кванторов.

$\exists$R$_{\vdash}$) $R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon z$ (при условии $x \notin \{\bar{u}\}$, $z \in V_T$ и $z \notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi))$).

$\exists_{\vdash}$) $\exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{x}_{z}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon z$ (при условии $z \in V_T$ и $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$.

$\exists$Rf$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi), \varepsilon z$ (при условии $x \notin \{\bar{u}\}$, $z \in V_T$, $z \notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi))$).

$\exists$f$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, R^{x}_{z}(\Phi), \varepsilon z$ (при условии $z \in V_T$ и $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$).

$\exists$Rv$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \varepsilon y \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi), \varepsilon y$ (при условии $x \notin \{\bar{u}\}$).

$\exists$v$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, \varepsilon y \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, R^{x}_{y}(\Phi), \varepsilon y$.

$\exists$Rd$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \varepsilon y, \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$ и $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi), \varepsilon y$ (при условии $x \notin \{\bar{u}\}$).

$\exists$d$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \varepsilon y, \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi$ и $\Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, R^{x}_{y}(\Phi), \varepsilon y$.

Секвенциальные исчисления чистых КНЛ первого порядка

Исчисления секвенциального типа для ЧКНЛ строим на основе свойств отношения логического следствия для множеств формул. *Секвенцией* назовем множество формул, специфицированных (отмеченных) специальными символами $\vdash$ и $\dashv$, не входящими в алфавит языка. Формулы секвенции, отмеченные символом $\vdash$, назовем *T*-формулами, а формулы, отмеченные символом $\dashv$, – *F*-формулами Секвенции обозначаем $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$, или, не детализируя, как Σ. Секвенциальные исчисления строим так: $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ имеет вывод $\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta$.

Аксиомами секвенциального исчисления есть замкнутые секвенции. Замкнутость $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ значит, что $\Gamma \models \Delta$.

Базовое условие замкнутости: секвенция Ξ замкнута, если существует формула Φ такая, что $_{\vdash}\Phi \in \Xi$ и $_{\dashv}\Phi \in \Xi$.

Введем дополнительное условие замкнутости секвенции – *unv*-замкнутость (*unv* – сокращение *unvalued*).

Для секвенции $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ введем множества *val*($\vdash\Gamma\dashv\Delta$) = $\{x\in V \mid \varepsilon x\in\Delta\}$ означенных и *unv*($\vdash\Gamma\dashv\Delta$) = $\{x\in V \mid \varepsilon x\in\Gamma\}$ неозначенных переменных, или множества *val*-переменных и *unv*-переменных. При интерпретатациях предметные имена (переменные) множества *val*($\vdash\Gamma\dashv\Delta$) трактуем как означенные, а имена множества *unv*($\vdash\Gamma\dashv\Delta$) – как неозначенные.

Пусть $Un = unv(\vdash\Gamma\dashv\Delta)$. Пусть *R*-формула $R^{r_1,\ldots r_k,x_1,\ldots x_n,u_1,\ldots u_m}_{s_1,\ldots s_k,y_1,\ldots y_n,v_1,\ldots v_m}\Phi$ такая: $\{r_1,\ldots, r_k, s,\ldots, s_k, y_1,\ldots, y_n\}\subseteq Un$, $\{x_1,\ldots, x_n\}\cap Un=\varnothing$, $\{v_1,\ldots, v_m\}\cap Un=\varnothing$.

Un-*unv*-форма формулы $R^{r_1,\ldots r_k,x_1,\ldots x_n,u_1,\ldots u_m}_{s_1,\ldots s_k,y_1,\ldots y_n,v_1,\ldots v_m}\Phi$ – это выражение вида $R^{x_1,\ldots x_n,u_1,\ldots,u_m}_{\varepsilon,\ldots,\varepsilon,\,v_1,\ldots,v_m}\Phi$, где специальный символ ε обозначает неопределенное значение.

R-формулы Φ и Ψ назовем *unv-эквивалентными* относительно множества *unv*-переменных *Un*, или *Un-unv-эквивалентными*, если Φ и Ψ имеют одинаковые *Un*-*unv*-формы.

Если *R*-формулы Φ и Ψ *Un*-*unv*-эквивалентны, то для каждых МЯ ***A*** и $d\in{}^{V}\!A$, имеем:

$\varepsilon u_A(d) = T$ для всех $u\in Un \;\Rightarrow\; \Phi_A(d) = \Psi_A(d)$.

Секвенцию $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ назовем *unv-замкнутой*, если существует пара *Un*-*unv*-эквивалентных *R*-формул Φ и Ψ таких, что $\Phi\in\Gamma$ и $\Psi\in\Delta$ (здесь $Un = unv(\vdash\Gamma\dashv\Delta)$).

Теорема 4. Если секвенция $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ *unv*-замкнута, то $\Gamma \models \Delta$.

Доказательство. Пусть секвенция $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ *unv*-замкнута. Тогда она имеет вид $\{\vdash\varepsilon u\}_{u\in Un}, \vdash\Phi, \vdash\Sigma, \dashv\Upsilon, \dashv\Psi$, где *R*-формулы Φ и Ψ *Un*-*unv*-эквивалентны. Зафиксируем произвольные МЯ $\boldsymbol{A} = (A, I)$ и $d\in{}^{V}\!A$. Возможны два случая. Пусть $\varepsilon u_A(d) = T$ для всех $u\in Un$; в силу *Un*-*unv*-эквивалентности *R*-формул Φ и Ψ имеем $\Phi_A(d) = \Psi_A(d)$ для всех $d\in{}^{V}\!A$, поэтому невозможно $d\in T(\Phi_A)\cap F(\Psi_A)$. Пусть теперь $\varepsilon u_A(d) = F$ для некоторой $u\in Un$, тогда невозможно $d\in T(\{\varepsilon u_A\}_{u\in Un})$. Итак, $T(\{\varepsilon u_A\}_{u\in Un})\cap T(\Phi_A)\cap T(\Sigma_A)\cap F(\Upsilon_A)\cap F(\Psi_A) = \varnothing$, откуда $\{\varepsilon u\}_{u\in Un}, \Phi, \Sigma \models_A \Upsilon, \Psi$, то есть $\Gamma \models_A \Delta$. Отсюда $\Gamma \models \Delta$.

Правила вывода секвенциальных исчислений – секвенциальные формы. Они являются синтаксическими аналогами семантических свойств отношения |=. Базовые формы записываем как $\dfrac{\Sigma}{\Omega}$ или $\dfrac{\Sigma \quad \Lambda}{\Omega}$.

Выводы в секвенциальных исчислениях имеют вид дерева, вершины которого – секвенции.

Секвенциальное дерево *замкнуто*, если каждый его лист – замкнутая секвенция.

Секвенция Σ *выводима*, если существует замкнутое секвенциальное дерево с корнем Σ.

Такое дерево назовем *выводом* секвенции Σ.

На основе свойств отношения |= для множеств формул вводим такие базовые секвенциальные формы:

$\vdash$RT $\dfrac{\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{\vdash R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(A),\Sigma}$; $\dashv$RT $\dfrac{\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{\dashv R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(A),\Sigma}$;

$\vdash\Phi$N $\dfrac{\vdash R^{\bar v}_{\bar u}(A),\Sigma}{\vdash R^{y,\bar v}_{z,\bar u}(A),\Sigma}$, где $y\in\nu(A)$; $\dashv\Phi$N $\dfrac{\dashv R^{\bar v}_{\bar u}(A),\Sigma}{\dashv R^{y,\bar v}_{z,\bar u}(A),\Sigma}$, где $y\in\nu(A)$;

$\vdash$R$\exists$R $\dfrac{\vdash R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma}{\vdash R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists xA),\Sigma}$, где $x\notin\{\bar u\}$; $\dashv$R$\exists$R $\dfrac{\dashv R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma}{\dashv R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists xA),\Sigma}$, где $x\notin\{\bar u\}$;

$\vdash$R$\exists$p $\dfrac{\vdash \exists xA,\Sigma}{\vdash R^{x}_{y}(\exists xA),\Sigma}$; $\dashv$R$\exists$p $\dfrac{\dashv \exists xA,\Sigma}{\dashv R^{x}_{y}(\exists xA),\Sigma}$.

Формы типов RT, ΦN, R∃R, R∃p назовем вспомогательными, остальные базовые формы – основные.

$$\vdash\text{RR}\ \frac{\vdash R_{\bar x}^{\bar v}\circ_{\bar y}^{\bar w}(A),\Sigma}{\vdash R_{\bar x}^{\bar v}(R_{\bar y}^{\bar w}(A)),\Sigma};\qquad \dashv\text{RR}\ \frac{\dashv R_{\bar x}^{\bar v}\circ_{\bar y}^{\bar w}(A),\Sigma}{\dashv R_{\bar x}^{\bar v}(R_{\bar y}^{\bar w}(A)),\Sigma};$$

$$\vdash\text{R}\neg\ \frac{\vdash \neg R_{\bar x}^{\bar v}(A),\Sigma}{\vdash R_{\bar x}^{\bar v}(\neg A),\Sigma};\qquad \dashv\text{R}\neg\ \frac{\dashv \neg R_{\bar x}^{\bar v}(A),\Sigma}{\dashv R_{\bar x}^{\bar v}(\neg A),\Sigma};$$

$$\vdash\text{R}\vee\ \frac{\vdash R_{\bar x}^{\bar v}(A)\vee R_{\bar x}^{\bar v}(B),\Sigma}{\vdash R_{\bar x}^{\bar v}(A\vee B),\Sigma};\qquad \dashv\text{R}\vee\ \frac{\dashv R_{\bar x}^{\bar v}(A)\vee R_{\bar x}^{\bar v}(B),\Sigma}{\dashv R_{\bar x}^{\bar v}(A\vee B),\Sigma};$$

$$\vdash\neg\ \frac{\dashv A,\Sigma}{\vdash \neg A,\Sigma};\qquad \dashv\neg\ \frac{\vdash A,\Sigma}{\dashv \neg A,\Sigma};$$

$$\vdash\vee\ \frac{\vdash A,\Sigma \qquad \vdash B,\Sigma}{\vdash A\vee B,\Sigma};\qquad \dashv\vee\ \frac{\dashv A,\dashv B,\Sigma}{\dashv A\vee B,\Sigma};$$

Мы вводим две разновидности форм для элиминации кванторов: элиминации квантора под реноминацией (∃R-формы) и элиминации внешнего квантора (∃-формы).

$$\vdash\exists\ \frac{\vdash R_z^x(A),\dashv\varepsilon z,\Sigma}{\vdash \exists xA,\Sigma};\qquad \vdash\exists\text{R}\ \frac{\vdash R_{\bar v,z}^{\bar u,x}(A),\dashv\varepsilon z,\Sigma}{\vdash R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma};$$

$$\dashv\exists\text{f}\ \frac{\dashv \exists xA,\dashv R_z^x(A),\dashv\varepsilon z,\Sigma}{\dashv \exists xA,\Sigma};\qquad \dashv\exists\text{Rf}\ \frac{\dashv R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\dashv R_{\bar v,z}^{\bar u,x}(A),\dashv\varepsilon z,\Sigma}{\dashv R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma}.$$

Для $\vdash\exists$ и $\dashv\exists$f условие: $z\in V_T$, $z\notin nm(\Sigma,\exists xA)$; для $\vdash\exists$R и $\dashv\exists$Rf условие: $x\notin\{\bar u\}$, $z\in V_T$, $z\notin nm(\Sigma, R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA))$.

Для $\dashv\exists$f и $\dashv\exists$Rf дополнительное условие: Σ не содержит специальных символов вида $\dashv\varepsilon z$.

$$\dashv\exists\text{v}\ \frac{\dashv \exists xA,\dashv R_y^x(A),\dashv\varepsilon y,\Sigma}{\dashv \exists xA,\dashv\varepsilon y,\Sigma};\qquad \dashv\exists\text{Rv}\ \frac{\dashv R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\dashv R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(A),\dashv\varepsilon y,\Sigma}{\dashv R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\dashv\varepsilon y,\Sigma}.$$

$$\dashv\exists\text{d}\ \frac{\vdash\varepsilon y,\dashv\exists xA,\Sigma \qquad \dashv \exists xA,\dashv R_y^x(A),\dashv\varepsilon y,\Sigma}{\dashv \exists xA,\Sigma};\qquad \dashv\exists\text{Rd}\ \frac{\vdash\varepsilon y,\dashv R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma \qquad \dashv R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\dashv R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(A),\dashv\varepsilon y,\Sigma}{\dashv R_{\bar v}^{\bar u}(\exists xA),\Sigma}.$$

Для $\dashv\exists$Rv и $\dashv\exists$Rd условие: $x\notin\{\bar u\}$. Для $\dashv\exists$d и $\dashv\exists$Rd дополнительное условие: εy не входит в состав Σ.

Секвенциальные формы $\dashv\exists$f и $\dashv\exists$Rf назовем формами типа ∃f (∃-first), формы $\dashv\exists$v и $\dashv\exists$Rv назовем формами типа ∃v (∃-valued), 2-посылочные формы $\dashv\exists$d и $\dashv\exists$Rd – формами типа ∃d (∃-distributed).

Формы $\vdash\exists$R и $\vdash\exists$ назовем $\exists_T$-формами, формы $\dashv\exists$f, $\dashv\exists$Rf, $\dashv\exists$v, $\dashv\exists$Rv, $\dashv\exists$d, $\dashv\exists$Rd – $\exists_F$-формами.

Секвенциальные исчисления логик квазиарных предикатов с вышеуказанными базовыми секвенциальными формами назовем *QSC-исчислениями.*

На основании свойств отношения |= получаем определяющее свойство базовых секвенциальних форм:

Теорема 5. Пусть $\dfrac{\vdash\Lambda\dashv\mathrm{K}}{\vdash\Gamma\dashv\Delta}$ и $\dfrac{\vdash\Lambda\dashv\mathrm{K}\quad \vdash\mathrm{X}\dashv\mathrm{Z}}{\vdash\Gamma\dashv\Delta}$ – базовые секвенциальные формы. Тогда:

1) $\Lambda\,|{=}\,\mathrm{K}\Rightarrow\Gamma\,|{=}\,\Delta$; $\Lambda\,|{=}\,\mathrm{K}$ и $\mathrm{X}\,|{=}\,\mathrm{Z}\Rightarrow\Gamma\,|{=}\,\Delta$; 2) $\Gamma\,|{\neq}\,\Delta\Rightarrow\Lambda\,|{\neq}\,\mathrm{K}$; $\Gamma\,|{\neq}\,\Delta\Rightarrow\Lambda\,|{\neq}\,\mathrm{K}$ или $\mathrm{X}\,|{\neq}\,\mathrm{Z}$.

Опишем процедуру построения секвенциального дерева для заданной секвенции Σ.

Значение предиката *P*(*d*) может быть разным в зависимости от того, входит или не входит в *d* компонента с определенным именем. В процедуре построения секвенциального дерева эта особенность проявляется при формировании $\exists_F$-формами частных случаев (примеров) для *F*-формул вида $\exists x\Phi$ и $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$: примеры могут иметь только вид $R_y^x(\Phi)$ и $R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)$, где имя *y* – означено. При построении вывода выделение означенных и неозначенных имен делаем с помощью специальных ПС вида εy. Для секвенции Σ вхождение $\models\varepsilon y$ в Σ трактуем как неозначенность *y*, а вхождение $\dashv\varepsilon y$ в Σ – как означенность *y*. Заметим, что в наших исчислениях специальные ПС εx являются вспомогательным инструментом построения выводов, они фигурируют как отдельные атомарные формулы и не входят в состав других формул секвенции.

Для выводов конечных секвенций введем понятие финальной секвенции. Незамкнутую вершину-секвенцию Ω вывода (секвенциального дерева) секвенции Σ назовем финальной, если к ней уже неприменима ни одна секвенциальная форма, либо если каждое применение секвенциальной формы к Ω не вводит новых формул, т.е. формул, отличных от формул секвенций на пути от Σ к Ω. Последнее означает стабилизацию на данном пути, т.е. ситуацию повторения незамкнутой секвенции.

Процедура построения дерева для секвенции Σ начинается с корня дерева. Такую процедуру разбиваем на этапы. Каждое применение секвенциальной формы производим к конечному множеству доступных на данный момент формул. В начале каждого этапа выполняется шаг доступа. Это означает, что к списку доступных формул добавляем по одной формуле списка *T*-формул и списка *F*-формул. Если в секвенции недоступных *T*-формул либо *F*-формул нет (соответствующий список исчерпан), то на дальнейших шагах доступа прибавляем по одной формуле неисчерпанного списка. В начале построения дерева доступна лишь пара первых формул списков (либо единственная *T*-формула либо *F*-формула, если один со списков пуст). Перед построением дерева для секвенции Σ зафиксируем некоторый бесконечный список *TN* "новых" тотально несущественных имен такой, что имена из *TN* не встречаются в формулах секвенции Σ.

В начале этапа и после выполнения каждой формы проверяем секвенции-вершины на замкнутость (берем во внимание только доступные формулы секвенций). Замкнутые секвенции – это листы секвенциального дерева, при появлении замкнутой секвенции к ней уже неприменима ни одна форма, и процесс построения дерева на этом пути обрывается. Если все листы замкнуты, то процедура завершена позитивно, мы получили замкнутое секвенциальное дерево. Если нет, то в случае вывода конечной секвенции проверяем, будет ли хоть один из листов финальной секвенцией. Появление финальной секвенции говорит о негативном завершении процедуры построения дерева и о наличии в нем пути (от корня к данной финальной секвенции), все вершины которого незамкнуты, – незамкнутого пути.

Если процедура не завершена, то для каждого незамкнутого листа ξ делаем следующий шаг доступа, после чего достраиваем конечное поддерево с вершиной ξ следующим образом.

(1) активизируем все доступные (кроме примитивных) формулы секвенции ξ;

(2) применяем к каждой активной формуле основную секвенциальную форму (так, как это описано ниже).

В процессе применения основных секвенциальных форм удаляем, при их наличии, тождественные переименования и пары имен реноминаций по несущественным или квантифицированным верхним именам, применяя вспомогательные формы типов RT, ΦN, R$\exists$R, R$\exists$p. После применения основной формы полученные формулы на данном этапе пассивны. К таким формулам на данном этапе основные секвенциальные формы уже не применяются. Повторы формул в секвенциях удаляем.

Сначала выполняем (если можно) все $\exists_T$-формы. При каждом таком применении берем со списка *TN* новое тотально несущественное *z* как первое незадействованное на даном пути от корня к данной вершине. Затем к оставшимся активным формулам применяем соответствующую форму типа RR, R$\neg$, R$\vee$, $\neg$, $\vee$. Далее выполняем $\exists_F$-формы. Если в момент применения $\exists_F$-формы к *F*-формуле секвенции ξ имеем $val(\xi)=\varnothing$, то применяем соответствующую форму типа $\exists$f; если $val(\xi)\neq\varnothing$, то применяем соответствующую форму типа ∃v, что делаем для каждого $z\in val(\xi)$. Пусть после такого применения формы типа ∃f или ∃v получена секвенция η. Затем к этой *F*-формуле многократно, для каждого $y\in nm(\eta)\setminus(val(\eta)\cup unv(\eta))$, применяем соответствующую форму типа ∃d, достраивая конечное поддерево с вершиной η.

При построении секвенциального дерева возможны такие случаи:

1) процедура завершена позитивно, имеем конечное замкнутое дерево;

2) процедура завершена негативно, имеем конечное незамкнутое дерево;

3) процедура не завершается, имеем бесконечное секвенциальное дерево. По известной лемме Кенига [Клини, 1973] бесконечное дерево с конечным разветвлением имеет хотя бы один бесконечный путь.

В случаях 2) и 3) в дереве существует незамкнутый путь $\wp$, все его вершины – незамкнутые секвенции. Каждая формула секвенции Σ встретится на пути $\wp$ и станет доступной.

Корректность и полнота *QSC*-исчислений

Пусть секвенция Σ выводима, тогда для нее построено замкнутое секвенциальное дерево. Из приведенной выше процедуры построения секвенциального дерева следует, что для каждой его вершины $|\!-\Lambda_{-}\!|\mathrm{K}$ имеем: $\Lambda_A|\!=\mathrm{K}$ для каждой МЯ $\boldsymbol{A}$. Для листьев дерева это следует из определений замкнутой и *unv*-замкнутой секвенций. Сохранение секвенциальными формами отношения логического следствия (от посылок до заключения) следует из теоремы 5. Таким образом, для построенного *QSC*-исчисления верна

Теорема 6 (корректности). Пусть секвенция $|\!-\Gamma_{-}\!|\Delta$ выводима. Тогда $\Gamma\,|\!=\Delta$.

Теорема полноты *QSC*-исчислений опирается на теорему о существовании контрмодели для множества формул незамкнутого пути.

Теорема 7. Пусть $\wp$ – незамкнутый путь в секвенциальном дереве, *H* – множество всех специфицированных формул секвенций этого пути. Тогда существуют МЯ $\boldsymbol{A}=(A, I)$ и $\delta\in{}^{V}\!A$ такие:

1) $|\!-\Phi\in H\Rightarrow\Phi_A(\delta)=T$; 2) $_{-}\!|\Phi\in H\Rightarrow\Phi_A(\delta)=F$.

Пару ($\boldsymbol{A}$, δ) назовем *контрмоделью* секвенции Σ, для которой построено такое секвенциальное дерево.

Множества $W=\{y\in nm(H)\,|\,_{-}\!|\varepsilon y\in H\}$ и $Un=\{y\in nm(H)\,|\,|\!-\varepsilon y\in H\}$ назовем соответственно множеством означенных имен и множеством неозначенных имен множества *H*.

Доказательство. Применение секвенциальных форм к секвенциям пути $\wp$ осуществляется до тех пор, пока это возможно, поэтому каждая непримитивная формула, которая встречается на пути $\wp$, рано или поздно будет разложена или упрощена согласно соответствующей секвенциальной форме.

Все секвенции пути $\wp$ незамкнуты, поэтому для них не выполняется как базовое условие замкнутости, так и условие *unv*-замкнутости. Поэтому для множества *H* гарантировано выполняются следующие условия:

НС) Для каждой примитивной формулы Φ невозможно одновременно $|\!-\Phi\in H$ и $_{-}\!|\Phi\in H$;

НСU) Не существует примитивных *Un*-*unv*-эквивалентных $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}A$ и $R_{\bar{y}}^{\bar{u}}A$ таких: $|\!-R_{\bar{x}}^{\bar{v}}A\in H$ и $_{-}\!|R_{\bar{y}}^{\bar{u}}A\in H$.

НС и НСU – это условия корректности множества специфицированных формул *H*.

Переходы от низшей вершины пути $\wp$ к высшей выполняются, следуя секвенциальным формам *QSC*-исчисления. Отсюда получаем, что для *H* выполняются такие условия.

HRT) Если $|\!-R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)\in H$, то $|\!-R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in H$; если $_{-}\!|R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)\in H$, то $_{-}\!|R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in H$.

HΦN) Если $|\!-R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)\in H$ и $y\in\nu(\Phi)$, то $|\!-R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in H$; если $_{-}\!|R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)\in H$ $y\in\nu(\Phi)$, то $_{-}\!|R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in H$.

HR∃R) Если $|\!-R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi)\in H$, то $|\!-R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)\in H$; если $_{-}\!|R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi)\in H$, то $_{-}\!|R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)\in H$.

HR∃p) Если ${}_{\vdash}R^{x}_{y}(\exists x\Phi)\in H,$ то ${}_{\vdash}\exists x\Phi\in H$; если ${}_{\dashv}R^{x}_{y}(\exists x\Phi)\in H,$ то ${}_{\dashv}\exists x\Phi\in H$.

HRR) Если ${}_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi))\in H,$ то ${}_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)\in H;$ если ${}_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi))\in H,$ то ${}_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)\in H.$

HR¬) Если ${}_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi)\in H,$ то ${}_{\vdash}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)\in H;$ если ${}_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi)\in H,$ то ${}_{\dashv}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)\in H.$

HR∨) Если ${}_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi\vee\Psi)\in H,$ то ${}_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi)\in H;$ если ${}_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi\vee\Psi)\in H,$ то ${}_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi)\in H.$

H¬) Если ${}_{\vdash}\neg\Phi\in H$, то ${}_{\dashv}\Phi\in H$; если ${}_{\dashv}\neg\Phi\in H$, то ${}_{\vdash}\Phi\in H$.

H∨) Если ${}_{\vdash}\Phi\vee\Psi\in H$, то ${}_{\vdash}\Phi\in H$ или ${}_{\vdash}\Psi\in H$; если ${}_{\dashv}\Phi\vee\Psi\in H$, то ${}_{\dashv}\Phi\in H$ и ${}_{\dashv}\Psi\in H$.

H∃) Если ${}_{\vdash}\exists x\Phi\in H$, то существует $y\in W$: ${}_{\vdash}R^{x}_{y}(\Phi)\in H;$ если ${}_{\dashv}\exists x\Phi\in H$, то ${}_{\dashv}R^{x}_{y}(\Phi)\in H$ для всех $y\in W$.

H∃R) Если ${}_{\vdash}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi)\in H,$ то существует $y\in W$ такое, что ${}_{\vdash}R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\Phi)\in H;$

если ${}_{\dashv}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi)\in H,$ то для всех $y\in W$ имеем ${}_{\dashv}R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\Phi)\in H$ (здесь $x\notin\{\bar u\}$).

Множество специфицированных формул H, для которого выполняются вышеуказанные условия, назовем *модельным*, или *хинтикковским* множеством.

Перейдем теперь к построению контрмодели по множеству H. Для множества $W=\{y\in nm(H)\,|\,{}_{\dashv}\varepsilon y\in H\}$ возьмем некоторое множество A такое, что $|A| = |W|$. Фактически такое A дублирует множество всех означенных предметных имен, фигурирующих в H. Возьмем некоторую инъективную $\delta\in{}^{V}\!A$ с $asn(\delta) = W$.

Зададим значение базовых предикатов на δ и на ИМ вида $r^{\bar v}_{\bar x}(\delta)$.

Если ${}_{\vdash}\varepsilon y\in H$, то $\varepsilon y_A(\delta) = T$, что и означает $y\notin asn(\delta)$; если ${}_{\dashv}\varepsilon y\in H$, то $\varepsilon y_A(\delta) = F$, что и означает $y\in asn(\delta)$.
Если ${}_{\vdash}p\in H$, то зададим $p_A(\delta) = T$; если ${}_{\dashv}p\in H$, то зададим $p_A(\delta) = F$.
Если ${}_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(p)\in H,$ то зададим $p_A(r^{\bar v}_{\bar x}(\delta))=T;$ если ${}_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(p)\in H,$ то зададим $p_A(r^{\bar v}_{\bar x}(\delta))=F.$

В оставшихся случаях значения базовых предикатов задаем произвольно, учитывая ограничения несущественности: для всех d, $h\in{}^{V}\!A$ таких, что $d\,||\text{-}\nu(p) = h\,||\text{-}\nu(p)$, необходимо $p_A(d) = p_A(h)$. Это гарантирует, что имена $y\in\nu(p)$ несущественны для p_A. Итак, значения базовых предикатов определены корректно.

Далее доказываем индукцией по сложности формулы согласно условиям определения модельного множества H. Для атомарных формул и формул вида $R^{\bar v}_{\bar x}(p)$ утверждения теоремы следуют из определения значений базовых предикатов. Для примера докажем шаг индукции для пп. H∨ и H∃R.

Пусть ${}_{\vdash}\Phi\vee\Psi\in H$, в силу H∨ тогда ${}_{\vdash}\Phi\in H$ или ${}_{\vdash}\Psi\in H$. По предположению индукции $\Phi_A(\delta) = T$ или $\Psi_A(\delta) = T$, откуда $(\Phi\vee\Psi)_A(\delta) = T$. Пусть ${}_{\dashv}\Phi\vee\Psi\in H$, в силу H∨ тогда ${}_{\dashv}\Phi\in H$ и ${}_{\dashv}\Psi\in H$. По предположению индукции $\Phi_A(\delta) = F$ и $\Psi_A(\delta) = F$, откуда $(\Phi\vee\Psi)_A(\delta) = F$.

Пусть ${}_{\vdash}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi)\in H.$ В силу H∃R существует $y\in W$ такое, что ${}_{\vdash}R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\Phi)\in H.$ По предположению индукции $(R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\Phi))_A(\delta)=T.$ Отсюда $\Phi_A(\delta\nabla\bar u\mapsto\delta(\bar v)\nabla x\mapsto\delta(y))=T.$ Но $\delta(y)\downarrow$ в силу $\delta\in{}^{W}\!A$ и $y\in W$, поэтому для $a=\delta(y)$ имеем $\Phi_A(\delta\nabla\bar u\mapsto\delta(\bar v)\nabla x\mapsto a)=T,$ откуда $(\exists x\Phi)_A(r^{\bar u}_{\bar v}(\delta)=T,$ поэтому $(R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi))_A(\delta)=T.$

Пусть ${}_{\dashv}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi)\in H.$ В силу H∃R для всех $y\in W$ имеем ${}_{\dashv}R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\Phi)\in H.$ По предположению индукции для всех $y\in W$ имеем $(R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\Phi))_A(\delta)=F.$ Отсюда $\Phi_A(\delta\nabla\bar u\mapsto\delta(\bar v)\nabla x\mapsto\delta(y))=F$ для всех $y\in W$. В силу $\delta\in{}^{W}\!A$ имеем $\delta(y)\downarrow$ для всех $y\in W$. Но δ – биекция $W\to A$, поэтому каждое $b\in A$ имеет вид $b = \delta(y)$ для некоторого $y\in W$. Итак, $\Phi_A = F$ для всех $b\in A$, поэтому $(\exists x\Phi)_A(r^{\bar u}_{\bar v}(\delta)=F$ для всех $b\in A$, откуда $(R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi))_A(\delta)=F.$

На основании теоремы 7 получаем теорему полноты для *QSC*-исчислений.

Теорема 8 (полноты). Пусть $\Gamma|=\Delta$. Тогда секвенция $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ выводима.

Доказательство. Предположим обратное: $\Gamma|=\Delta$ и $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ невыводима. Если $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ невыводима, то секвенциальное дерево δ для $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ незамкнуто. Итак, в δ имеется незамкнутый путь $\wp$. Пусть H – множество всех специфицированных формул секвенций пути $\wp$. Такое H – модельное. По теореме 7 существует контрмодель ($\boldsymbol{A}$, δ), т.е. МЯ $\boldsymbol{A} = (A, I)$ и $\delta\in{}^{V}\!A$ такие: $_{\vdash}\Phi\in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$ и $_{\dashv}\Psi\in H \Rightarrow \Psi_A(\delta) = F$. В силу $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta\subseteq H$ тогда для всех $\Phi\in\Gamma$ имеем $\Phi_A(\delta) = T$ и для всех $\Psi\in\Delta$ имеем $\Psi_A(\delta) = F$. Это противоречит $\Gamma|=\Delta$.

Заключение

В роботе исследованы новые классы программно-ориентированных логических формализмов – чистые первопорядковые композиционно-номинативные логики частичных однозначных квазиарных предикатов. Описаны языки и семантические модели таких логик, указаны основные семантические свойства, в частности, свойства отношения логического следствия для множеств формул. Предложены расширения логики специальными 0-арными композициями – предикатами-индикаторами, которые определяют наличие значения для переменных. На этой основе для чистых первопорядковых логик частичных предикатов построены исчисления секвенциального типа, для этих исчислений доказаны теоремы корректности и полноты. Для доказательства полноты использован метод модельных множеств.

The paper is published with partial support by the project ITHEA XXI of the ITHEA ISS (www.ithea.org) and the ADUIS (www.aduis.com.ua).

Литература

[Handbook, 1994–2000] Handbook of Logic in Computer Science: In 5 vol. / [Eds. Abramsky S., Gabbay D. and Maibaum T.S.E.]. – Oxford: Clarendon Press, 1994–2000.

[Клини, 1973] Клини С. Математическая логика. – М., 1973. – 480 с.

[Никитченко, 1999] Никитченко Н.С. Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы // Пробл. программирования. – 1999, № 1. – С. 16–31.

[Нікітченко, 2008] Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Математична логіка та теорія алгоритмів. – К.: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.

[Нікітченко, 2011] Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Першопорядкові композиційно-номінативні логіки // Вісник Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2011. – Вип. 4. – С. 176–185.

[Шкільняк, 2010] Шкильняк С.С. Логики квазиарных предикатов первого порядка // Кибернетика и сист. анализ. – 2010. – № 6. – С. 32–49.

[Шкільняк, 2012] Шкильняк С.С. Секвенційні числення композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів // Пробл. програмування. – 2012. – № 2–3. – С. 33–43.

Информация об авторах

Н.С. Никитченко *– доктор физ.-мат. наук, зав. кафедрой Киевского национального университета имени Тараса Шевченко; e-mail: nikitchenko@unicyb.kiev.ua*

Основные области научных исследований: формальные модели программирования и методы разработки программ, логика предикатов на разных уровнях абстракции, абстрактная вычислимость

С.С. Шкильняк *– доктор физ.-мат. наук, профессор Киевского национального университета имени Тараса Шевченко; e-mail: sssh@unicyb.kiev.ua*

Основные области научных исследований: программно-ориентированные логические формализмы, логики с нетрадиционными семантиками, исчисления секвенциального типа