МЕТОД БАЗИСНЫХ МАТРИЦ И МАТРИЧНАЯ ИГРА В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ

Кудин В.И.

Аннотация. *В статье проанализированы связи метода базисных матриц для решения задачи линейного программирования (анализа линейных систем) и матричной игры в смешанных стратегиях. На основе анализа основных рекуррентных соотношений, которые связывают элементы метода базисных матриц в двух смежных базисных матрицах, были установлены соотношения для анализа (и нахождения решения) матричной игры в смешанных стратегиях. Получены условия несущественности чистых стратегий игроков и единственности решений. Разработан алгоритм анализа свойств матричной игры и нахождения решения на основе метода базисных матриц.*

Ключевые слова: *принятие решений, теория игр, линейная система, матричная игра, смешанная стратегия, базисная матрица.*

ACM Classification Keywords : *H.4.2 Information Systems Applications : Types of Systems : Decision Support.*

Введение

Одним из основных направлений теории принятия решений является построение моделей, как аналог конфликта, в частности, в виде игровых задач. В работах [Golshteyn, 1969], [Dantzig, 1966], [Dantzig, 1997] рассмотрены теоретические основы решения матричной игры в смешанных стратегиях, как двойственной пары задач линейного программирования. Решение этих задач определяют оптимальные стратегии заданной матричной игры. Параметры задач линейного программирования, которые отвечают заданной матричной игре, выбираются в процессе конструктивного доказательства основной теоремы теории игр. Известно, что возможно также построение матричной игры по заданной задаче линейного программирования. Введения одного из важнейших понятий теории игр - стратегии позволяет привести самые разнообразные развернутые игры к единственной стандартной форме, которая называется нормальной формой игры. Стратегия игры, согласно [Dantzig, 1966], определяется как система правил, которые однозначно определяют выбор поведения игрока на каждом ходе в зависимости от ситуации, которая сложилась в процессе игры. Игрок, который выбрал стратегию, может не участвовать в игре. За составленной им инструкцией игру может проводить нейтральное лицо. Каждая фиксированная стратегия, которую может избрать игрок, называется его чистой стратегией. Чистые стратегии не исчерпывают всех возможностей игроков. Оказывается, что есть ситуации, в которых игрокам целесообразно выбирать не чистую стратегию, а частоту, с которой следует использовать ту или другую чистую стратегию в игре. Пользуясь понятиям стратегии, можно любую игру рассматривать где : каждый игрок имеет один ход - выбор между стратегиями из некоторого множества. При этом игрок принимает решение, не имея информации о выборе другого игрока. При двух участниках игра в нормальной форме называется прямоугольной. Прямоугольная игра с конечным числом чистых стратегий называется матричной игрой.

В работе рассмотрены свойства метода базисных матриц [Kudin, 2007], как одного из методов анализа линейных систем (в частности, задачи линейного программирования [Golshteyn, 1963]), при решении матричной игры в смешанных стратегиях. Как оказывается, матричная игра в смешанных стратегиях, как двойственная пара задач линейного программирования с однотипными условиями имеет свои структурные особенности. Эти особенности "накладывают свой отпечаток" на элементы метода базисных матриц. Были установлены основные соотношения для элементов метода базисных матриц в двух смежных базисных матрицах при решении матричной игры со смешанными стратегиями.

Постановка задачи

Пусть первый игрок имеет m стратегий, а второй - n. При этом считается известным, что если первый игрок выберет - i -ю стратегию, а второй - j -ю, выигрыш первого (и следовательно проигрыш второго) равняется a_{ij} . Матрица $A=\left\{a_{ij}\right\}_{i=1,\,j=1}^{m,\,n}$ называется платежной матрицей или матрицей выигрыша.

Заметим, что формирование платежной матрицы при исследовании реальных конфликтных ситуаций является сложной задачей. Принципы для построения платежной матрицы лежат, вообще говоря, вне теории игр и "'привязываются" к определенному приложению, с которым связанная постановка задачи. Важной задачей теории игр является выработка принципов, которые определяют поведение игроков в каждой конкретной конфликтной ситуации.

Определение 1. Вектор $U=(u_1,u_2,...,u_m)$, каждая компонента которого указывает относительную частоту (вероятность), с которой соответствующая чистая стратегия используется в игре, называется смешанной стратегией первого игрока, а набор чисел $W=(w_1,w_2,...,w_n)$ - смешанные стратегии второго игрока. Ясно, что $u_i \geq 0,\ i=\overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m} u_i = 1$, $w_j \geq 0,\ j=\overline{1,n},\ \sum_{j=1}^{n} w_j = 1$.

Чистая стратегия определяется, как смешанная стратегия, в которой все составляющие, кроме одной, уровни нулю. В дальнейшем будем помечать чистые стратегии обоих противников в виде единичных векторов $e_i=(\overbrace{\underbrace{0,0,...,0,1}_{i},0,...,0}^{m})$ и $e_j=(\overbrace{\underbrace{0,0,...,0,1}_{j},0,...,0}^{n})$ соответственно [Golshteyn, 1969].

Определение 2. Оптимальная стратегия игрока - это стратегия, которая обеспечивает ему максимально возможный гарантированный средний выигрыш.

Любое изменение информации приводит к новой игре, для которой оптимальная линия поведения будет другой. Свойства оптимальных стратегий матричной игры вытекают из основных теоретических результатов линейного программирования.

Теорема 1. (Основная теорема теории игр [Golshteyn, 1969]). Каждая матричная игра с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях, то есть существуют такие стратегии и первого и второго игрока соответственно, что

$$M(U,W^0) \leq v = M(U^0,W^0) \leq M(U^0,W)$$

В процессе доказательства основной теоремы теории игр матричной игры с платежной матрицей $A=\left\|a_{ij}\right\|_{i=1,j=1}^{m,n}$ $(a_{ij}>0)$ поставлена в соответствие следующая пара двойственных задач линейного программирования типа (1)-(3) и (4)-(6), которые приведены ниже.

Прямая задача:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j , \qquad (1)$$

при условиях: $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n} \ . \qquad (3)$$

Или в матричном виде введем в рассмотрение задачу [1] линейного программирования вида :

$$\min Cx,$$

$$Ax \le B^T ,$$

$$x \ge 0 ,$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$, , $B = (b_1, b_2, ..., b_m)$. Считаем, что модель вида (1)−(3) имеет матрицу ограничений А в которой количество столбцов больше чем строк ("длинная").

Двойственная задача: $$\min \sum_{i=1}^{m} b_i u_i , \qquad (4)$$

при условиях:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 + \ldots + a_{m1}u_m \ge c_1; \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 + \ldots + a_{m2}u_m \ge c_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + a_{3n}u_3 + \ldots + a_{mn}u_m \ge c_n; \end{cases} \qquad (5) \qquad u_i \ge 0, \quad (i = \overline{1, m}) \qquad (6)$$

Двойственная к (1)−(3) может быть записана в виде:

$$\min Bu,$$

$$A^T u \ge C^T ,$$

$$u \ge 0 , \ (u = (u_1, u_2, ..., u_m)^T)$$

где $b_i = 1, \ \ i = \overline{1, m}, \ c_j = 1, \ j = \overline{1, n}$.

Задача (4)-(6) является двойственной к задаче (1)-(3), которую называют прямой.

Целью исследования является:

установление новых свойств матричной игры со смешанными стратегиями таких как: оптимальность решений (стратегий), состояний равновесия игры (седловых точек и их свойств), условия существенности чистых стратегий (и несущественности) на основе учета структурных особенностей прямой и двойственной задач (как матричной игры), а также элементов метода базисных матриц применительно к даной игровой задаче.

Основные положения метода базисных матриц (МБМ)

Метод базисных матриц [Kudin, 2007] может быть применен как к задаче (1)-(3), так и к задаче (4)-(6). Без ограничения общности, при изложении положений метода будем рассматривать задачу линейного программирования в виде (4)-(6), а именно:

$$\max Bu,$$
$$A^T u \le C^T,$$
$$u \ge 0 .$$

Для определенности, будем считать, что задача (1)−(3) имеет n>>m, матрица А ограничений которой “вытянута горизонтально”, ранг системы ровным m. Задача вида (4),(5) имеют n ограничений и m переменных, матрица ограничений (транспонированная) “вытянута вертикально”.

Определение 2. Подматрицу $A_б$ матрицы A^T, составленную из m линейно независимых нормалей $J_b = (i_1, i_2, ..., i_m)$ ограничений (5), будем называть базисной (БМ), а решение $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})$ соответствующей ей системы уравнений $A_б u_0 = C_\delta$, где $C_\delta = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})^T$ - подвектор С базисным (опорным) (БР). Две базисные матрицы с отличной одной строкой будем называть смежными, а соответствующие базисные решения смежными.

Пусть : β_{ij}, $i, j \in I = \{1, 2, ..., m\}$ - элементы базисной матрицы $A_б$; e_{ri} и $(A_б^{-1})_i$ - элементы та i -й столбец $A_б^{-1}$, обратной к $A_б$; $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, ..., \alpha_{rm})$ - вектор разложения вектора нормали $a_r u_1 \le c_r$ по строкам $A_б$, $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, ..., \alpha_{0m})$ вектор разложения нормали целевой функции (4) по строкам $A_б$; $\Delta_r = a_r u_0^T - c_r$ - невязка r -го ограничения (5), $J_б, J_Н$ - множества индексов, соответственно базисных и небазисных ограничений (5). Все определенные элементы при переходе к смежной $\overline{A}_б$, которая образуется с A_b заменой ее строки a_k на a_l, которая не входит в $A_б$, будем обозначать чертой сверху, например, $\overline{\beta}_{ij}$, $\overline{\alpha}_r$, $\overline{L}_i$, $\overline{\Delta}_k$, $\overline{e}_{ri}$, $(\overline{A}_b^{-1})_i$ $\overline{\alpha}_0$.

Введем в рассмотрение $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}$ - нормали ограничений $a_j u^T \le c_j, j \in J_б$, где $J_б = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ - индексы ограничений, нормали которых образовывают $A_{б,}$, a_l - вектор-нормаль, $\alpha_l = (\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, ..., \alpha_{lm})$, - вектор разложения a_l по строкам $A_б$ для $a_l u \le c_l$.

***Лемма 1**.* Необходимым и достаточным условием линейной независимости набора векторов $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{k-1}}, a_l, a_{i_{k+1}}, ..., a_{i_m}$ при замене вектора a_{i_k}, который является к -й строкой в $A_б$ вектором $A_б$ есть $\alpha_{lk} \ne 0$.

Теорема 2. [Kudin, 2007] Между коэффициентами разложения нормалей ограничений (5) и целевой функции (4) по строкам базисной матрицы, элементами обратных матриц, базисными решениями, невязками ограничений (5) и значениями целевой функции в двух смежных базисных решениях имеют место такие соотношения

$$\overline{\alpha}_{0k} = \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}},\ \overline{\alpha}_{0i} = \alpha_{0i} - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},$$

$$\overline{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}},\ \overline{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},\ \ r = \overline{1,n};\ i = \overline{1,m};\ i \ne k; \qquad (7)$$

$$\overline{e}_{rk}=\frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}},\ \overline{e}_{ri}=e_{ri}-\frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},\quad r=\overline{1,m};\ \ i=\overline{1,m};\ \ i\neq k; \tag{8}$$

$$\overline{u}_{0j}=u_{0j}-\frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l,\ j=\overline{1,m},\quad (\ \overline{u}_0=\overline{A}_\delta^{-1}\times C_\delta\ ) \tag{9}$$

$$\overline{\Delta}_k=-\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}},\ \ \overline{\Delta}_r=\Delta_r-\frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l,\ \ r=\overline{1,n};\ r\neq k\ ; \tag{10}$$

$$B\overline{u}_0^T=Bu_0^T-\frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \tag{11}$$

причем условием линейной независимости строк смежной базисной матрицы является $\alpha_{lk}\neq 0$, допустимости опорного базисного решения - $\alpha_{lk}<0$, а условием роста целевой функции - $\alpha_{0k}<0$.

Об особенностях элементов метода базисных матриц при исследовании матричной игры в смешанных стратегиях

Утверждение 1. Компоненты вектора разложения целевой функции задачи линейного программирования (двойственной задачи матричной игры) в ходе итераций метода базисных матриц вычисляются по формулам

$$\alpha_{0i}=\sum_{j=1}^{m}e_{ji},\ i=\overline{1,m}\,.$$

Утверждение 2. Компоненты вектора решений задачи линейного программирования (двойственной задачи матричной игры) в ходе итераций метода базисных матриц вычисляются по формулам

$$u_{0i}=\sum_{j=1}^{m}e_{ij},\ i=\overline{1,m}\,. \tag{12}$$

Доказательство. Справедливость утверждений 1,2 следует из формул (7), (9) и соотношений

$$A_\delta u_0=C_\delta,\ C_\delta=(\underbrace{1,1,...,1}_{m})^T,\quad u_0=A_\delta^{-1}\times C_\delta,\ C_\delta=(\underbrace{1,1,...,1}_{m})^T,$$

$$\alpha_0\times A_\delta=B,\ B=(\underbrace{1,1,...,1}_{m}),$$

$$\alpha_0=B\times A_\delta^{-1},\ B=(\underbrace{1,1,...,1}_{m}) \tag{13}$$

Следствие 1. Суммы элементов векторов столбцов обратной матрицы совпадают со значением соответствующей компоненты вектора разложения целевой функции по строкам базисной матрицы.

Следствие 2. Суммы элементов строк обратной матрицы совпадают со значением соответствующей компоненты вектора промежуточного решения на итерациях метода базисных матриц.

Доказательство. Справедливость утверждений является следствием свойств разложений элементов метода базисных матриц по строкам базисной матрицы.

Утверждение 3. Для суммы элементов столбцов обратной матрицы в двух смежных базисных матрицах выполняются такие рекуррентные соотношения

$$\sum_{j=1}^{m}\bar{e}_{jk} = \frac{\sum_{j=1}^{m} e_{jk}}{\alpha_{lk}} , \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\bar{e}_{jr} = \sum_{j=1}^{m} e_{jr} - \frac{\sum_{j=1}^{m} e_{jk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li} \;\; , \; r=\overline{1,m}; \;\; i=\overline{1,m}; \;\; i \neq k . \tag{15}$$

Доказательство. Согласно соотношений связывающих элементы обратной матрицы в двух смежных базисных матрицах

$$\bar{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}, \qquad \bar{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li}, \quad r=\overline{1,m}; \;\; i=\overline{1,m}; \;\; i \neq k;$$

следует, что

$$\bar{e}_{k} = \frac{e_{k}}{\alpha_{lk}}, \qquad \bar{e}_{r} = e_{r} - \frac{e_{k}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li}, \; r=\overline{1,m}; \;\; i=\overline{1,m}; \;\; i \neq k .$$

После проведения по элементного складывания элементов столбцов получим, что

$$\sum_{j=1}^{m}\bar{e}_{jk} = \frac{\sum_{j=1}^{m} e_{jk}}{\alpha_{lk}} \; , \;\; \sum_{j=1}^{m}\bar{e}_{jr} = \sum_{j=1}^{m} e_{jr} - \frac{\sum_{j=1}^{m} e_{jk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li} \;\; , \; r=\overline{1,m}; \;\; i=\overline{1,m}; \;\; i \neq k .$$

Утверждение 4. Для суммы элементов строк обратной матрицы в двух смежных базисных матрицах выполняются такие рекуррентные соотношения

$$\sum_{i=1}^{m}\overline{e_{ri}} = \sum_{i=1}^{m} e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_{li} - 1\right), \; r=\overline{1,m}; \tag{16}$$

Доказательство. Согласно соотношений

$$\bar{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}, \qquad \bar{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li}, \quad r=\overline{1,m}; \;\; i=\overline{1,m}; \;\; i \neq k;$$

следует, что элементы строк обратной матрицы находятся по соотношениям для каждого r

$$\bar{e}_{r1} = e_{r1} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{l1}, \; \bar{e}_{r2} = e_{r2} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{l2}, \;\; \bar{e}_{rk-1} = e_{rk-1} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{lk-1},$$

$$\bar{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}} = e_{rk} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\times\alpha_{lk} + \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}} = e_{rk} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\times(\alpha_{lk} - 1)$$

$$\bar{e}_{rk+1} = e_{rk+1} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{lk+1}, \; \bar{e}_{rm} = e_{rm} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{lm},$$

то есть для элементов вектор строки обратной матрицы можем записать $r=\overline{1,m}$

$$\overline{E_{r}} = E_{r} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}(\alpha_{l1}, \, \alpha_{l2}, \, \alpha_{lk-1}, \, \alpha_{lk} - 1, \, \alpha_{lk+1}, \, \alpha_{lm-1}, \, \alpha_{lm}) .$$

После суммирования элементов строки получим

$$\sum_{i=1}^{m}\overline{e_{ri}}=\sum_{i=1}^{m}e_{ri}-\frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}(\sum_{i=1,i\neq k}\alpha_{li}+(\alpha_{lk}-1))=\sum_{i=1}^{m}e_{ri}-\frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}(\sum_{i=1}^{m}\alpha_{li}-1)$$

При построении алгоритмов МБМ для матричной игры формулы (7) и (9) существенно упрощаются, поскольку компоненты вектора разложения целевой функции по строкам базисной матрицы и компоненты текущего решения определяются по сумам столбцов и строк обратной базисной матрицы. По формулам (15),(16) находятся компоненты этих векторов на следующей итерации. Следует отметить, что для проведения расчетов достаточно знание номера k (вывод), l (ввода) ограничений и компонент вектора разложений $\alpha_l=(\alpha_{l1},\alpha_{l2},\ldots,\alpha_{lk-1},\alpha_{lk},\ldots,\alpha_{km-1},\alpha_{lm})$.

Выводы

Структурные свойства двойственной пары задач линейного программирования (как матричной игры в смешанных стратегиях) в схеме метода базисных матриц трансформировались в особенном содержательном смысле элементов строк и столбцов обратной к базисной матрице. Сумма элементов столбцов (их неотрицательность) указывает на свойство оптимальности решений, а суммы элементов строк указывают на компоненты вектора решения задачи. Упомянутые свойства можно учесть при построении алгоритмов на основе метода базисных матриц (рекуррентных соотношений для элементов метода). При решении двойственной пары задач линейного программирования (матричной игры в смешанных стратегиях) на основе метода базисных матриц можно установить ряд свойств, в частности, свойства оптимальных решений.

Литература

[Golshteyn, 1969] Golshteyn E.G., Yudin D.B. New directions in linear programming. – M. – Sovetskoe radio, – 1969, – 524p. (in Russian).

[Dantzig, 1966] Dantzig G.B Linear programming and application. M.(Progress, – 1966. (in Russian).

[Dantzig, 1997] Dantzig G.B., Thapa M.N. Linear Programming 1: introduction, Springer, – 1997, – 435p.

[Golshteyn, 1963] Golshteyn E.G., Yudin D.B. Linear programming.Theory and methods. – M. : Nauka, – 1963. - 776p. (in Russian).

[Kudin, 2007] Kudin V. I., Lyashko S.I., Khritonenko N.V., Yatsenko Yu.P. Analysis of the properties of a linear system using the method of artificial basis matrices // Kibernetika i sistemny analiz. — 2007. — N 4. -.P. 119-127 (in Ukrainian).

Авторы

Владимир И. Кудин, Киев, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка, факультет кибернетики, Украина, д. т. н., с. н. с., E-mail: V_I_Kudin@mail.ru

Основные области научных исследований: методы оптимизации, системный анализ, компьютерный анализ вычислений.