

## ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТЕРИЕВ ОПТИМИЗАЦИИ В МУРАВЬИНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЁРА

Юрий Зайченко, Николай Мурга

**Аннотация:** Исследован новый алгоритм оптимизации колоний муравьёв. Найдены оптимальная стратегия поиска и критерий принятия решений в алгоритме решения задачи коммивояжера.

**Ключевые слова:** Алгоритм оптимизации муравьиных колоний, задача коммивояжера

**ACM Classification Keywords:** *G Mathematics of computing – G.2 Discrete mathematics – G.2.2 Graph theory – Graph algorithms, Network problems; I Computing Methodologies – I.2. Artificial Intelligence – I.2.8 Problem Solving, Control Methods and Search – Graph and tree search strategies*

---

### Введение

Задача коммивояжера относится к классу N-P-трудных. Её решение с ростом размерности становится проблематичным, если для этого применяются традиционные алгоритмы, что обуславливает актуальность поиска новых. К одним из перспективных алгоритмов решения данной задачи оптимизации относится муравьиный. В работе [Зайченко & Мурга, 2013] было рассмотрено его приложение, а также предложена модификация, которая показала большую эффективность по сравнению с первоначальным алгоритмом. В данной работе проводились исследования на слабосвязанных топологиях и демонстрировалась эффективность модифицированного алгоритма на полностью связанных топологиях с количеством вершин 15 и 20. Однако не изученными остались причина такой эффективности предложенной модификации, а также её оптимальность.

Данная работа посвящена анализу причин эффективности модификации муравьиного алгоритма, а также поиску оптимального критерия принятия решения муравьём о выборе дуги для перехода.

---

### Содержание предложенной модификации

Детальное описание муравьиных алгоритмов и способов их приложений можно найти в работе [Зайченко & Мурга, 2013; Згуровский & Зайченко, 2013, С. 365-394]. Здесь же предлагается краткое описание модифицированного алгоритма.

Рассмотрим предлагаемый муравьиный алгоритм для решения задачи коммивояжера.

Первоначально рассмотрим случай, когда рёбра графа для задачи коммивояжера неориентированные, то есть стоимости прямых и обратных путей из двух соседних вершин одинаковые.

*Предусловия алгоритма*

Каждая вершина графа содержит три множества: множество муравьёв для дальнейшего передвижения –  $FD$ , множество муравьёв для возвращения в гнездо после успешного обхода всего маршрута без тупиков и петель –  $BK$  и множество муравьёв, которым не удалось обойти маршрут без тупиков и петель –  $BD$ .

Находясь в конкретной вершине, муравью необходимо принять решение, по какой дуге переходить к следующей вершине. Пусть  $n$  – общее количество дуг, исходящих из данной вершины и идущих в вершины, которые ещё не посещал муравей. Тогда для принятия решения муравью предлагается следующий показатель:

$$D_i = c_1 \cdot \left( 1 - \frac{L_i}{\sum_{j=1}^n L_j} \right) + c_2 \cdot \frac{\tau_i}{\sum_{j=1}^n \tau_j} + c_3 \cdot U(0,1) \quad (1)$$

где  $i = \overrightarrow{1, \dots, n}$  – порядковый номер дуги, обладающей обозначенным свойством,  $L_i$  – стоимость перехода муравья по данной дуге (либо длина пути),  $\tau_i$  – концентрация феромона на данной дуге,  $U(0,1)$  – генератор случайных чисел, равномерно распределённых на отрезке  $[0;1]$ .

Следует отметить, что  $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ .

Муравей переходит на следующую вершину с самым большим значением показателя  $D_i$ .

Последним предусловием алгоритма является помещение муравьёв во все вершины графа путей. Это эквивалентно их помещению во множества  $FD$  каждой из вершин графа.

#### Описание алгоритма

1. Каждый муравей из множества  $FD$  в каждой вершине ищет такие рёбра, которые ведут к вершинам, которые он ещё не посещал. Если поиск завершается успешно, то – переход на шаг 3, иначе – на шаг 2.
2. В случае, если уже пройдены все вершины, то муравей перемещается в множество  $BK$  данной вершины, иначе – в множество  $BD$ .
3. Для дуг, ведущих к вершинам, которые муравей ещё не посещал, рассчитывается показатель  $D_i$  из формулы (1). Для дуги с наибольшим значением показателя количество феромона увеличивается и муравей перемещается в множество  $FD$  вершины, на втором конце дуги.
4. Все муравьи из множества  $BK$  всех вершин перемещаются в множества  $BK$  предыдущих посещённых вершин, при этом увеличивая количество феромона в дугах, по которым они переходят. Если вершина, в которую должен перейти муравей – его муравейник, то он помещается в её множество  $FD$ .
5. Все муравьи из множества  $BD$  всех вершин перемещаются в множества  $BD$  предыдущих посещённых вершин, при этом уменьшая количество феромона в дугах, по которым они переходят. Если вершина, в которую должен перейти муравей – его муравейник, то он помещается в её множество  $FD$ .
6. Проверка условия превышения допустимого числа итераций. Если число итераций превышено – завершение работы алгоритма, иначе – на шаг 1.

*Примечание 1.* Как следует из алгоритма, каждый муравей должен запоминать последовательность посещённых им вершин и, при обратном ходе, удалять вершины с конца данной последовательности.

*Примечание 2.* В случае ориентированных рёбер алгоритм не меняется.

*Примечание 3.* Если количество феромона в дугах увеличивается (и уменьшается) обратно пропорционально их длине, то такая тактика поиска оптимального маршрута далее будет называться

локальной, если – обратно пропорционально длине всего маршрута муравья – глобальной, если увеличение происходит на некоторую постоянную величину – глобальной.

## Методология экспериментальных исследований

### Параметры экспериментов

В работе исследуется эффективность отдельных компонент критерия (1) применительно к локальной и глобальной тактикам поиска. Таким образом, параметрами экспериментов являются разновидность тактики поиска и множество компонент (1), участвующее в принятии решения о выборе муравьём следующей дуги для перехода. Данные подмножества формируют новый критерий принятия данного решения.

Для сокращения объёма дальнейших выкладок целесообразно ввести следующие обозначения.

Факт того, что для поиска оптимального замкнутого пути будет использована локальная тактика поиска будет обозначаться как *local*, глобальная – *global*.

Факт использования  $1 - \frac{l_i}{\sum_j l_j}$  в качестве критерия принятия решения о выборе дуги для перехода будет обозначаться как  $l$ ,  $\frac{\tau_i}{\sum_j \tau_j} - t$ , равномерно распределённого на интервале  $[0;1]$  числа –  $u$ . Все

возможные комбинации данных компонент обозначаются следующим образом. Если в качестве критерия принятия решения используется  $\left(1 - \frac{iterNum}{iterMax}\right) \cdot \left(1 - \frac{l_i}{\sum_j l_j}\right) + \frac{iterNum}{iterMax} \cdot \frac{\tau_i}{\sum_j \tau_j}$ , где *iterNum*

– номер текущей итерации, *iterMax* – заданное максимальное число итераций, то данный факт будет обозначаться как *l-t*, а если  $\left(1 - \frac{iterNum}{iterMax}\right) \cdot \frac{\tau_i}{\sum_j \tau_j} + \frac{iterNum}{iterMax} \cdot \left(1 - \frac{l_i}{\sum_j l_j}\right)$ , то – *t-l*. По аналогии, в

соответствии с заданным правилом вводятся обозначения *l-u*, *u-l*, *t-u* и *u-t*.

То есть, факт того, что для поиска оптимального замкнутого пути была использована глобальная тактика поиска с критерием принятия решения о выборе муравьём следующей дуги, содержащим компоненту учёта длины дуги с убывающим весом в общем критерии при росте числа итераций и компоненту учёта концентрации феромона в дуге с возрастающим весом в общем критерии при росте числа итераций, обозначается как – *global-l-t*.

### Цель экспериментальных исследований

В результате проведённых экспериментальных исследований необходимо установить вклад каждой из компонент критерия (1) в процесс поиска оптимального решения и, при необходимости, пересмотреть веса компонент в нём.

### Представление результатов экспериментальных исследований

Как и в работе [Зайченко & Мурга, 2013], данные экспериментальные исследования будут состоять в оценке эффективности тактики поиска и набора компонент в критерии принятия решения при изменении начального числа муравьёв в узлах сети и числа итераций отведённых под поиск.

По аналогии указанной работой, при конкретной реализации параметров эксперимента, его результаты будут сохранены в виде двумерной таблицы по строкам которой будет откладываться число итераций, отведённых под поиск оптимального пути, а в столбцах – число муравьёв в каждом узле сети перед запуском алгоритма.

На пересечении строк и столбцов таблицы будет размещаться значение интегрального критерия качества, который будет определяться формулой (2):

$$q_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_{kij} \quad (2)$$

где  $q_{kij}$  – значение критерия качества результата поиска оптимального пути при количестве итераций алгоритма равном  $i$ , количестве муравьёв в каждой вершине –  $j$  на  $k$ -том повторении эксперимента, а  $n$  – число повторений эксперимента.  $q_{kij}$  может принимать значения 0, 1 или 2, которые соответственно означают: замкнутый маршрут не найдет, найден неоптимальный замкнутый маршрут, найден оптимальный замкнутый маршрут. Таким образом  $q_{ij}$  – усреднённая по количеству повторений оценка качества поиска оптимального замкнутого пути.

В работе  $n$  выбрано равным 50. Данный выбор был продиктован следующими условиями. Во первых, дать точную оценку качества невозможно, поскольку, согласно центральной предельной теореме, для её получения необходимо было бы выбрать  $n = \infty$ . Во вторых, проведение экспериментальных исследований забирает значительное время, как показали эксперименты, выбор  $n = 50$  позволяет проявить основные характеристики процесса поиска. Таким образом, использование данного значения с точки зрения цели экспериментальных исследований адекватно.

#### **Инструментарий сравнительного анализа результатов экспериментов**

Эффективность реализации параметров экспериментов определяется минимальным числом итераций, необходимых для определения оптимального замкнутого пути, а также минимальным числом муравьёв в каждом узле сети перед началом работы алгоритма. Следует также отметить, что характеризовать данную эффективность следует не только отдельными указанными числами, а в общем по всей таблице результатов экспериментов на реализации, а данный процесс не поддаётся автоматизации и требует оценочных суждений экспертов. С этой целью для оценки эффективности реализации параметров экспериментов задействована методика многокритериального выбора на множестве альтернатив.

Для формирования критериев эффективности необходимым является использование понятия срезки (в терминологии OLAP-кубов) – то есть выделение из таблицы данных подмножества в следствии фиксации значений её параметров.

Прежде всего необходимо выделить срезки по числу итераций алгоритма и по числу муравьёв в узлах сети перед началом его работы. Пусть  $R_1$  – критерий эффективности на срезке по числу итераций, а  $R_2$  – по начальной концентрации муравьёв в узлах.

Если реализации параметров эксперимента  $l$  эффективнее  $k$ , то будет считаться, что реализация  $l$  предпочтительнее по данному критерию, чем реализация  $k$ , если значения равны – то реализации эквивалентны. Формально факт предпочтения реализации  $l$  над реализацией  $k$  по критерию  $i$  будет выражаться числом  $r_{ilk}$ . Если  $r_{ilk} = 1$ , то это означает, что  $l$  предпочтительнее или эквивалентно  $k$  по критерию  $i$ ,  $r_{ilk} = 0$  –  $k$  предпочтительнее  $l$ .

Поскольку оба критерия одинаково важны (оба оценивают скорость нахождения оптимального пути), то веса данных критериев в интегральном критерии принятия решения выбраны одинаковыми – 0,5. Интегральный критерий принятия решений рассчитывается по формуле (3):

$$R = 0,5 \cdot R_1 + 0,5 \cdot R_2 \quad (3)$$

где  $R_i = \|r_{ilk}\|_{l,k=1,s}$ ,  $s$  - общее число реализаций параметров экспериментов.

Далее, согласно методике предложенной в работе [Зайченко, 2006, С. 602-618], оценивается уровень недоминируемости каждой из реализаций параметров экспериментов остальными. На основании полученных значений можно сделать выводы о необходимости присутствии каждой из компонент  $(l, t, u)$  в общем критерии принятия решения о выборе муравья следующей дуги для перехода и о весах данных компонент в нём.

Поскольку (допускается) значимость значений критерия качества поиска имеет нелинейный характер в зависимости от числа итераций и количества муравьёв в узлах в начале работы, то целесообразно выразить каждый из  $R_i, i = \overline{1,2}$  через следующую линейную комбинацию критериев срезов:

$$R_i = \sum_{j=1}^3 w_j R_{ij} \quad (4)$$

Критерии  $R_{ij}$  имеют следующий смысл:

- $R_{11}$  – оценка предпочтения между реализациями параметров экспериментов при малом числе итераций алгоритма, то есть – от 5 до 100;
- $R_{12}$  – оценка предпочтения между реализациями параметров экспериментов при среднем числе итераций алгоритма, то есть – от 250 до 500;
- $R_{13}$  – оценка предпочтения между реализациями параметров экспериментов при большом числе итераций алгоритма, то есть – от 1000 до 1500;
- $R_{21}$  – оценка предпочтения между реализациями параметров экспериментов при малом числе муравьёв в каждом узле перед началом работы алгоритма, то есть – от 1 до 5;
- $R_{22}$  – оценка предпочтения между реализациями параметров экспериментов при среднем числе муравьёв в каждом узле перед началом работы алгоритма, то есть – от 10 до 30;
- $R_{23}$  – оценка предпочтения между реализациями параметров экспериментов при большом числе муравьёв в каждом узле перед началом работы алгоритма, то есть – при 50.

Значения  $w_j, j = \overline{1,3}$  предлагается брать как решение следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 = 1, \\ w_1 = 2 \cdot (w_2 + w_3), \\ w_2 = 2 \cdot w_3. \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом,  $w_1 = \frac{2}{3}, w_2 = \frac{2}{9}, w_3 = \frac{1}{9}$ .

---

### Организация экспериментов и результаты экспериментальных исследований

---

Проведение вычислительных экспериментов, согласно описанной методике, позволило получить следующие данные, которые представлены в Таблицах 1 - 18.

Таблица 1. Результаты экспериментов при значении их параметров *local-l*

		Число муравьёв в узлах перед запуском алгоритма							
		1	2	3	4	5	10	30	50
Номер итерации	5	0	0	0	0	0	0	0	0
	50	0	0	0	0	0	0	0	0
	100	0	0	0	0	0	0	0	0
	250	0	0	0	0	0	0	0	0
	500	0	0	0	0	0	0	0	0
	1000	0	0	0	0	0	0	0	0
	1500	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 2. Результаты экспериментов при значении их параметров *local-t*

		Число муравьёв в узлах перед запуском алгоритма							
		1	2	3	4	5	10	30	50
Номер итерации	5	0,04	0,16	0,16	0,22	0,2	0,51	0,84	1
	50	1,02	1,16	1,22	1,38	1,38	1,72	1,58	1,56
	100	1,1	1,22	1,26	1,42	1,46	1,72	1,58	1,58
	250	1,24	1,22	1,3	1,46	1,48	1,72	1,58	1,58
	500	1,28	1,22	1,3	1,46	1,48	1,72	1,58	1,58
	1000	1,28	1,22	1,3	1,46	1,48	1,72	1,58	1,58
	1500	1,28	1,22	1,3	1,46	1,48	1,72	1,58	1,58

Таблица 3. Результаты экспериментов при значении их параметров *local-u*

		Число муравьёв в узлах перед запуском алгоритма							
		1	2	3	4	5	10	30	50
Номер итерации	5	0,06	0,14	0,24	0,28	0,28	0,46	0,94	0,96
	50	1	1	1	1	1	1	1	1
	100	1	1	1	1	1	1	1	1
	250	1	1	1	1	1	1	1	1
	500	1	1	1	1	1	1	1	1
	1000	1	1	1	1	1	1	1	1
	1500	1	1	1	1	1	1	1	1

Таблица 4. Результаты экспериментов при значении их параметров *local-l-t*

		Число муравьёв в узлах перед запуском алгоритма							
		1	2	3	4	5	10	30	50
Номер итерации	5	0,16	0,12	0,04	0,14	0,06	0,26	0,22	0,16
	50	2	2	1,98	1,96	1,98	1,98	1,98	1,96
	100	2	2	1,98	1,96	1,98	1,98	1,98	1,96

	250	2	2	1,98	1,96	1,98	1,98	1,98	1,96
	500	2	2	1,98	1,96	1,98	1,98	1,98	1,96
	1000	2	2	1,98	1,96	1,98	1,98	1,98	1,96
	1500	2	2	1,98	1,96	1,98	1,98	1,98	1,96

Таблица 5. Результаты экспериментов при значении их параметров *local-t-l*

		Число муравьёв в узлах перед запуском алгоритма							
		1	2	3	4	5	10	30	50
Номер итерации	5	0,04	0,2	0,16	0,18	0,28	0,38	0,78	0,86
	50	1,88	1,98	1,98	1,96	1,96	2	2	1,98
	100	1,92	1,98	1,98	1,96	1,96	2	2	1,98
	250	1,92	1,98	1,98	1,96	1,96	2	2	1,98
	500	1,92	1,98	1,98	1,96	1,96	2	2	1,98
	1000	1,92	1,98	1,98	1,96	1,96	2	2	1,98
	1500	1,98	2	2	1,98	1,96	2	2	1,98

Таблица 6. Результаты экспериментов при значении их параметров *local-l-u*

		Число муравьёв в узлах перед запуском алгоритма							
		1	2	3	4	5	10	30	50
Номер итерации	5	0,14	0,12	0,06	0,08	0,08	0,2	0,12	0,04
	50	1,98	2	2	2	1,98	2	1,98	2
	100	2	2	2	2	2	2	2	2
	250	2	2	2	2	2	2	2	2
	500	2	2	2	2	2	2	2	2
	1000	2	2	2	2	2	2	2	2
	1500	2	2	2	2	2	2	2	2

Таблица 7. Результаты экспериментов при значении их параметров *local-u-l*

		Число муравьёв в узлах перед запуском алгоритма							
		1	2	3	4	5	10	30	50
Номер итерации	5	0,02	0,16	0,14	0,32	0,24	0,5	0,88	0,96
	50	1	1	1	1	1	1	1	1
	100	1	1	1	1	1	1	1	1
	250	1	1	1	1	1	1	1	1
	500	1	1	1	1	1	1	1	1
	1000	1	1	1	1	1	1	1	1
	1500	1,98	2	2	2	2	2	2	2





	500	1	1	1	1	1	1	1	1
	1000	1	1	1	1	1	1	1	1
	1500	1	1	1	1	1	1	1	1

Таблица 12. Результаты экспериментов при значении их параметров *global-u*

		Число муравьёв в узлах перед запуском алгоритма							
		1	2	3	4	5	10	30	50
Номер итерации	5	0,02	0,18	0,22	0,28	0,32	0,58	0,86	0,98
	50	1	1	1	1	1	1	1	1
	100	1	1	1	1	1	1	1	1
	250	1	1	1	1	1	1	1	1
	500	1	1	1	1	1	1	1	1
	1000	1	1	1	1	1	1	1	1
	1500	1	1	1	1	1	1	1	1

Таблица 13. Результаты экспериментов при значении их параметров *global-l-t*

		Число муравьёв в узлах перед запуском алгоритма							
		1	2	3	4	5	10	30	50
Номер итерации	5	0,08	0,1	0,16	0,16	0,06	0,16	0,22	0,08
	50	1,98	1,98	2	1,98	1,98	1,98	1,98	2
	100	2	1,98	2	1,98	1,98	1,98	1,98	2
	250	2	2	2	2	1,98	2	1,98	2
	500	2	2	2	2	1,98	2	1,98	2
	1000	2	2	2	2	2	2	1,98	2
	1500	2	2	2	2	2	2	2	2

Таблица 14. Результаты экспериментов при значении их параметров *global-t-l*

		Число муравьёв в узлах перед запуском алгоритма							
		1	2	3	4	5	10	30	50
Номер итерации	5	0,08	0,06	0,2	0,14	0,18	0,34	0,62	0,9
	50	1,4	1,4	1,6	1,48	1,64	1,82	1,92	1,92
	100	1,4	1,4	1,6	1,48	1,64	1,82	1,92	1,92
	250	1,4	1,4	1,6	1,48	1,64	1,86	1,92	1,92
	500	1,4	1,4	1,6	1,48	1,64	1,86	1,92	1,92
	1000	1,64	1,62	1,67	1,54	1,68	1,86	1,92	1,92
	1500	2	2	2	2	2	2	1,98	2



	500	1	1	1	1	1	1	1	1
	1000	1	1	1	1	1	1	1	1
	1500	1	1	1	1	1	1	1	1

### Анализ результатов экспериментов

Анализ результатов экспериментов разбивается на две части: ранжирование реализаций параметров экспериментов по уровню их эффективности и анализ вклада отдельных компонент в общий критерий принятия решения о переходе муравья на следующую дугу.

Для сокращения дальнейших выкладок, необходимо ввести нумерацию реализаций параметров экспериментов. Такая нумерация представлена в Таблице 19.

**Таблица 19.** Нумерация реализаций параметров экспериментов

№	Реализация параметров эксперимента
1	<i>local-l</i>
2	<i>local-t</i>
3	<i>local-u</i>
4	<i>local-l-t</i>
5	<i>local-t-l</i>
6	<i>local-l-u</i>
7	<i>local-u-l</i>
8	<i>local-t-u</i>
9	<i>local-u-t</i>
10	<i>global-l</i>
11	<i>global-t</i>
12	<i>global-u</i>
13	<i>global-l-t</i>
14	<i>global-t-l</i>
15	<i>global-l-u</i>
16	<i>global-u-l</i>
17	<i>global-t-u</i>
18	<i>global-u-t</i>

Прежде всего, необходимо произвести ранжирование по уровню эффективности реализаций параметров экспериментов.

Ниже представлены результаты парных сравнений реализаций параметров экспериментов по введённым ранее критериям. Нумерация строк и столбцов соответствует нумерации, введённой в Таблице 19.



Далее, необходимо рассчитать матрицу линейной свёртки критериев, используя формулы (3)-(5):

$$Q = \frac{1}{2} \frac{2}{3} R_{11} + \frac{1}{2} \frac{2}{9} R_{12} + \frac{1}{2} \frac{1}{9} R_{13} + \frac{1}{2} \frac{2}{3} R_{21} + \frac{1}{2} \frac{2}{9} R_{22} + \frac{1}{2} \frac{1}{9} R_{23} =$$

$$= \frac{1}{3} R_{11} + \frac{1}{9} R_{12} + \frac{1}{18} R_{13} + \frac{1}{3} R_{21} + \frac{1}{9} R_{22} + \frac{1}{18} R_{23}. \tag{6}$$

Применение формулы (6) дало следующие результаты:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0,67 & 0 & 0 & 0 & 0,61 & 0,77 & 0,44 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,44 & 1 & 1 \\ 1 & 0,33 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,44 & 0 & 0,44 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,44 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0,12 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0,89 & 0,94 & 0,83 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0,17 & 1 & 1 & 0,94 & 1 & 1 & 1 & 0,56 & 0,94 & 0,5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0,39 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0,5 & 0,44 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0,06 & 0 & 0,89 & 0,89 & 0,89 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 & 0,5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 & 1 \\ 1 & 0,56 & 1 & 0,06 & 0,06 & 0 & 1 & 0,5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0,06 & 0,06 & 0,06 & 1 & 0,67 & 0,67 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,11 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,44 & 0 & 0,44 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,44 & 1 & 1 \\ 1 & 0,11 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,44 & 0 & 0,44 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,44 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0,61 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0,17 & 0,06 & 0 & 0,94 & 1 & 0,94 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0,83 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0,56 & 1 & 0,11 & 0 & 0 & 0,94 & 0,5 & 0,77 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,44 & 0 & 0,77 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,44 & 1 & 1 \\ 1 & 0,11 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,44 & 0 & 0,77 & 1 & 1 & 0,67 & 0 & 0 & 0 & 0,44 & 1 & 0,67 \end{pmatrix}$$

Теперь, согласно формуле (7), можно рассчитать отношение строгого предпочтения.

$$Q^S(i, j) = \max\{Q(i, j) - Q(j, i), 0\}, i, j = \overline{1, 18} \tag{7}$$

После вычислений были получены следующие результаты:

$$Q^S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0,34 & 0 & 0 & 0 & 0,22 & 0 & 0 & 1 & 0,89 & 0,89 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0,89 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0,94 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0,77 & 0 & 0,89 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0,88 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0,88 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0,88 & 0,83 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0,39 & 1 & 0,17 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0,56 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0,56 & 0,56 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,45 & 0,45 \\ 1 & 0,23 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0,12 & 0,56 & 0 & 0 & 0 & 0,56 & 0 & 0 & 1 & 0,56 & 0,56 & 0 & 0 & 0 & 0,23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,33 \\ 1 & 1 & 1 & 0,11 & 0,44 & 0 & 1 & 1 & 0,94 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,88 & 1 & 0,88 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0,17 & 0,5 & 0 & 1 & 1 & 0,94 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0,12 & 0,56 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0 & 0 & 1 & 0,56 & 0,56 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,56 & 0,56 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Уровни предпочтения реализаций параметров экспериментов можно получить, используя формулу (8):

$$l_j = 1 - \max_i Q^S(i, j) \tag{8}$$

Результаты расчётов по данной формуле приведены в Таблице 20.

**Таблица 20.** Уровни предпочтения реализаций параметров экспериментов

<i>j</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
<i>l<sub>j</sub></i>	0	0	0	0,12	0,17	1	0	0	0	0	0	0	0,61	0	0,83	0	0	0

Таким образом, принимая во внимание Таблицу 19, из Таблицы 20 следует, что:

$$local - l - u > global - l - u > global - l - t > local - l - t \sim local - t - l \tag{9}$$

Из (9) следует, что:

1. Локальная тактика поиска оптимального замкнутого пути эффективней глобальной.
2. Целесообразно использование равномерного шума, влияние на принятие решения которого увеличивается с числом итераций.
3. Влияние длины дуги на принятие решения муравьём о переходе должно уменьшаться с ростом числа итераций.
4. Влияние концентрации феромона в дуге должно увеличиваться (в общем для обеих тактик поиска случае) с ростом числа итераций.

Однако, следует заметить, что из приведённых исследований не возможно судить об оптимальности критерия (1).

Для подобного утверждения необходимо провести дополнительные экспериментальные исследования.

Сравнительному анализу будут подвергнуты критерии local-l-u и критерии, определяемые формулами (10)-(13):

$$D_1 = \left(1 - \frac{iterNum}{iterMax}\right) \left( (1 - c) \left(1 - \frac{l_i}{\sum_j l_j}\right) + c \cdot U(0,1) \right) + \frac{iterNum}{iterMax} \frac{t_i}{\sum_j t_j} \tag{10}$$

где *c* – некоторая константа. Методом подбора было установлено, что её оптимальное значение – 0,66.

$$D_2 = \left(1 - \frac{iterNum}{iterMax}\right) \left( \left(1 - \frac{iterNum}{iterMax}\right) \left(1 - \frac{l_i}{\sum_j l_j}\right) + \frac{iterNum}{iterMax} \cdot U(0,1) \right) + \frac{iterNum}{iterMax} \frac{t_i}{\sum_j t_j} \tag{11}$$

$$D_3 = (1 - c) \left( \left(1 - \frac{iterNum}{iterMax}\right) \left(1 - \frac{l_i}{\sum_j l_j}\right) + \frac{iterNum}{iterMax} \frac{t_i}{\sum_j t_j} \right) + c \cdot U(0,1) \tag{12}$$

$$D_4 = \left(1 - \frac{iterNum}{iterMax}\right) \left( \left(1 - \frac{iterNum}{iterMax}\right) \left(1 - \frac{l_i}{\sum_j l_j}\right) + \frac{iterNum}{iterMax} \cdot \frac{t_i}{\sum_j t_j} \right) + \frac{iterNum}{iterMax} \cdot U(0,1) \tag{13}$$

Результаты экспериментов по критериям  $local - D_1$ ,  $local - D_2$ ,  $local - D_3$  и  $local - D_4$  приведены в Таблицах 21 - 24.

Таблица 21. Результаты экспериментов при значении их параметров  $local - D_1$

		Число муравьёв в узлах перед запуском алгоритма							
		1	2	3	4	5	10	30	50
Номер итерации	5	0,14	0,12	0,14	0,28	0,25	0,58	0,92	0,98
	50	1	1	1	1	1	1	1,02	1
	100	1	1	1,02	1	1	1	1,02	1,02
	250	1,06	1,46	1,84	1,66	1,68	1,62	1,46	1,66
	500	1,94	2	2	2	2	2	2	2
	1000	1,94	2	2	2	2	2	2	2
	1500	1,94	2	2	2	2	2	2	2

Таблица 22. Результаты экспериментов при значении их параметров  $local - D_2$

		Число муравьёв в узлах перед запуском алгоритма							
		1	2	3	4	5	10	30	50
Номер итерации	5	0,08	0,02	0,06	0,1	0,18	0,6	0,18	0,06
	50	1,98	2	2	2	2	2	2	2
	100	2	2	2	2	2	2	2	2
	250	2	2	2	2	2	2	2	2
	500	2	2	2	2	2	2	2	2
	1000	2	2	2	2	2	2	2	2
	1500	2	2	2	2	2	2	2	2

Таблица 23. Результаты экспериментов при значении их параметров  $local - D_3$

		Число муравьёв в узлах перед запуском алгоритма							
		1	2	3	4	5	10	30	50
Номер итерации	5	0,1	0,14	0,21	0,26	0,36	0,62	0,9	1
	50	1	1	1	1	1	1	1	1
	100	1	1	1	1	1	1	1	1,02
	250	1	1	1,02	1,04	1,02	1,06	1,04	1,06
	500	1,1	1,82	2	1,98	1,92	1,9	1,76	1,86
	1000	1,94	2	2	2	2	2	2	2
	1500	1,98	2	2	2	2	2	2	2

Таблица 23. Результаты экспериментов при значении их параметров  $local - D_4$ 

		Число муравьёв в узлах перед запуском алгоритма							
		1	2	3	4	5	10	30	50
Номер итерации	5	0,04	0,12	0,21	0,2	0,02	0,12	0,08	0,18
	50	2	1,98	2	2	1,98	1,98	2	2
	100	2	2	2	2	2	2	2	2
	250	2	2	2	2	2	2	2	2
	500	2	2	2	2	2	2	2	2
	1000	2	2	2	2	2	2	2	2
	1500	2	2	2	2	2	2	2	2

Из приведённых результатов очевидно, что  $local - D_1$  и  $local - D_3$  не являются оптимальными. В то же время, применение  $local - D_2$  и  $local - D_4$  даёт приблизительно одинаковые результаты, которые также идентичны результатам использования критерия  $local-l-u$ . А отсюда можно сделать три фундаментальных для решения задачи коммивояжёра муравьиным алгоритмом выводы:

1. Присутствие равномерного шума с не монотонно убывающим весом с ростом числа итераций в критерии принятия решения о выборе муравьём дуги для перехода повышает эффективность алгоритма.
2. В силу своей простоты (требует выполнения меньшего числа операций для расчёта) критерий  $local-l-u$  является оптимальным для решения задачи.
3. И, как следствие из предыдущего вывода, оптимальным поведением для муравья в процессе принятия решений является: в начале работы алгоритма выбор самой короткой ближайшей дуги и, с ростом числа итераций увеличение элемента случайности при принятии решения. То есть, **муравьям нет необходимости оставлять на своём пути феромоны.**

## Заключение

Работа посвящена актуальной тематике применения муравьиных алгоритмов к решению задачи коммивояжёра большой размерности. Проведённые экспериментальные исследования дали следующие результаты:

1. Локальная тактика поиска оптимального замкнутого пути является эффективней глобальной.
2. Лучшими критериями для принятия решения муравьём о выборе дуги для перехода являются  $local-D_2$ ,  $local-D_4$  и  $local-l-u$ . Таким  $local-l-u$  образом, является оптимальным в силу своей простоты.

Следует отметить, что эксперименты проводились на полносвязных топологиях, содержащих 15 вершин, то есть, сделанные выводы актуальны для топологий сетей с количеством вершин меньшим или равным 15. Таким образом актуальным является проведение представленной серии экспериментов для числа вершин больше 15. Кроме того, опыт применения данного алгоритма показывает, что его эффективность существенно снижается с ростом числа вершин и, при большом их количестве, критерий  $local-l-u$  может перестать быть оптимальным.

Также актуальным является необходимость теоретического обоснования оптимальности приведённых троих критериев и, более того, вывод об отсутствии необходимости учёта концентрации феромона в дугах



при принятии муравьём решения о переходе. Данный факт является феноменом и не укладывается в классическое представление о свойствах муравьиных алгоритмов.

Актуальным является сравнительный анализ эффективности муравьиного алгоритма решения задачи коммивояжёра с традиционными.

Все указанные вопросы составят предмет дальнейших исследований.

---

## Литература

[Зайченко, 2006] Зайченко Ю.П. "Дослідження операцій", Підручник. Сьоме видання, перероблене та доповнене, К.: Видавничий Дім "Слово", 2006, 816 с.

[Зайченко & Мурга, 2013] Зайченко Ю., Мурга Н. "Исследование муравьиных алгоритмов оптимизации в задаче коммивояжёра", International Journal "Information Models and Analyses", 2013, Vol. 2, N 4, pp. 370-384.

[Згуровский & Зайченко, 2013] Згуровский М.З., Зайченко Ю.П. "Основы вычислительного интеллекта", К.: НВП Видавництво "Наукова думка" НАН України", 2013, 408 с.

---

## Благодарности

Статья частично финансирована из проекта ITNEA XXI Института Информационных Теорий и Приложений FOI ITNEA и консорциума FOI Bulgaria ([www.ithea.org](http://www.ithea.org), [www.foibg.com](http://www.foibg.com)).

---

## Информация об авторах



**Зайченко Юрий** - д.т.н., профессор ННК „Институт прикладного системного анализа“, 03056, Киев-56, проспект Победы, 37, Украина phone: 38044 -4068393; e-mail: [baskervil@voliacable.com](mailto:baskervil@voliacable.com),

Области научных исследований: теория принятия решений в условиях неопределенности, модели и методы вычислительного интеллекта в задачах прогнозирования и анализа в экономике и финансовой сфере, моделирование и оптимизация компьютерных сетей



**Николай Мурга** – кандидат технических наук, ассистент кафедры математических методов системного анализа Учебно-научного комплекса “Институт прикладного системного анализа” НТУУ “КПИ”, Киев, Украина, e-mail: [murga.nicholas@gmail.com](mailto:murga.nicholas@gmail.com)

### Criteria investigations in ant colony optimization algorithm for travelling salesman problem

Yuriy Zaychenko, Nicholas Murga

**Abstract:** New ant colony optimization algorithm has been investigated. Optimal search tactic and ant decision making criterion have been found.

**Keywords:** Ant colony optimization algorithm, travelling salesman problem, salesman problem