ОЦЕНКА ОЖИДАЕМОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ АЛЬТЕРНАТИВ

Михаил Стернин, Геннадий Шепелев

***Аннотация**: Введенный нами ранее критерий сравнения интервальных альтернатив (коэффициент уверенности), основанный на соизмерении шансов истинности проверяемой гипотезы о предпочтительности одной из сравниваемых альтернатив и риска, связанного с возможной истинностью противоположной гипотезы, предложено использовать в наиболее важных с практической точки зрения задачах оценки прогнозирования ожидаемой эффективности отдельных альтернатив. Проведено сравнение результатов оценки ожидаемой эффективности по предлагаемому критерию и другим критериям оценки (среднее значение, критерий Гурвица). Приведены аргументы в пользу использования предлагаемого критерия в задачах прогнозирования ожидаемой эффективности интервальных альтернатив и при их сравнении по предпочтительности. Именно, показано, что критерий оценки ожидаемой эффективности интервальных альтернатив, как и сравнения их по предпочтительности, а также соответствующий метод сравнения/оценки, адекватный задачам прогнозирования, должен, из-за неопределенности будущего исхода, позволять соизмерять шансы проверяемой гипотезы о предпочтительности и противоположной ей. Один из таких методов, основанный на расчете критерия, названного коэффициентом уверенности, предложен в настоящей работе. Рассмотрены возможность согласования результатов сравнения и оценки ожидаемой эффективности на базе критерия Гурвица и расчетов на основе коэффициента уверенности, а также вопрос выбора величины коэффициента „пессимизма – оптимизма”. Предложено использовать при сравнении альтернатив и оценке их ожидаемой эффективности по величине коэффициента уверенности порядковые шкалы, не уточняя сколь велико значение критерия сравнения.*

***Ключевые слова:** оценка ожидаемой эффективности интервальных альтернатив, критерий оценки эффективности, сравнение различных критериев эффективности*

***ACM Classification Keywords**: H.1.2 Human information processing. G3 Distribution functions. I.2.3 Uncertainty, "fuzzy", and probabilistic reasoning*

Введение

Будем называть интервальными такие альтернативы, показатели эффективности которых имеют из-за неопределенности интервальное представление. Необходимость в интервальном представлении возникает, например, в достаточно распространенных на практике задачах прогнозирования будущих значений исследуемых числовых (количественных) показателей.

В интервальном подходе к описанию неопределенности можно выделить два основных направления - моноинтервальное и полиинтервальное. В первом, традиционном направлении анализируемые показатели задаются как одноинтервальные оценки. Второе направление является развитием моно направления, при котором первичный объект моно подхода – точечная оценка - заменяется интервальной оценкой, а интервал как инструмент описания неопределенности заменяется совокупностью интервальных оценок. В широком классе задач полиинтервальное направление открывает бóльшие возможности для анализа неопределенности по сравнению с моно подходом [Chugunov, 2008], однако в задачах сравнения и оценки эффективности интервальных альтернатив полиинтервальные оценки без ущерба для результатов исследования могут быть сведены к моноинтервальным [Стернин, 2010]. Это позволяет без потери общности ограничиться при исследовании таких задач случаем одноинтервальных оценок.

Часто предполагается, что интервал-представитель анализируемого показателя [L, R] (L и R левая и правая граница интервала соответственно) содержит все возможные для данной конкретной проблемы точечные значения анализируемой величины и что лишь единственное из них реализуется в действительности в будущем, когда исходная неопределенность будет снята. Отметим, что множества всех возможных прогнозных реализаций показателей качества альтернатив для большинства практических задач дискретны. Таковы, например, множества всех возможных прогнозных реализаций стоимостных показателей эффективности. Используемая обычно и принимаемая в настоящей работе аппроксимация дискретных множеств возможных реализаций непрерывными упрощает математический анализ таких задач и не приводит к значительному искажению результатов.

Важно иметь в виду, что задачи сравнения и оценки эффективности интервальных альтернатив являются задачами принятия решений. Это означает, что они не могут быть исчерпывающе решены чисто математическими методами, поскольку в процессе решения приходиться привлекать предпочтения лиц, принимающих решения (ЛПР), или экспертов. Действительно, для конфигураций общего положения, когда сравниваемые интервальные оценки имеют ненулевое пересечение (общую часть), в принципе нельзя с определенностью сделать вывод о предпочтительности какой-либо интервальной альтернативы в их паре, - любая из них может оказаться таковой в будущем, в момент „снятия” неопределенности, когда интервальная оценка замещается точным точечным значением показателя эффективности. Поэтому на момент сравнения можно судить лишь о шансах на то, что одна альтернатива окажется предпочтительнее другой. При этом всегда существует риск того, что в действительности именно другая альтернатива окажется лучше.

Цель оценки ожидаемой эффективности альтернативы на основе интервального показателя эффективности - еще в условиях неопределенности, т.е. на момент прогнозирования, дать заключение об ее приемлемости для ЛПР, а цель сравнения альтернатив найти аргументы в пользу предпочтительности какой-либо альтернативы из числа сравниваемых. Интервальные показатели эффективности служат, таким образом, критериями сравнения и оценки эффективности. Будем для определенности считать, что рассматриваются проблемные ситуации, в которых большее значение критерия отвечает более предпочтительному состоянию.

Можно видеть, что задачи оценки ожидаемой эффективности интервальной альтернативы являются частным случаем задач сравнения интервальных величин, в которых один из сравниваемых интервалов принимает точечное значение. С этим точечным значением, выбираемым ЛПР, сопоставляется по предпочтительности интервальная альтернатива. Как правило, но не всегда, таким значением служит ноль и, следовательно, оценивается, насколько шансы появления положительных значений в интервальной альтернативе превосходят шансы возникновения отрицательных величин.

В настоящей работе для квантификации шансов на предпочтительность сравниваемых интервальных альтернатив или подмножеств содержащихся в них значений выбран аппарат функций распределения теории вероятностей (не обязательно в рамках частотной концепции, что характерно для задач экспертного анализа). Этот аппарат в наибольшей степени знаком, по нашему мнению, экспертам, что существенно, поскольку экспертный анализ практических задач наиболее продуктивен, если он ведется на привычном для специалистов предметной области языке, с использованием понятной ему терминологии [Петровский, 2008].

Вместе с тем надо отметить, что многие задачи в условиях интервальной неопределенности исследуются в рамках теории нечетких множеств [Дилигенский, 2004; Зайченко, 1991].

Критерий сравнения и оценки ожидаемой эффективности интервальных альтернатив

Ранее нами предложен общий подход к сравнению интервальных альтернатив с заданными на них распределениями шансов (интервально-вероятностных альтернатив) [Стернин, 2011, 2012; Shepelyov, 2012]. Он состоит в следующем.

Пусть вновь, для определенности, рассматривается ситуация, когда бóльшие значения показателя качества отвечают более предпочтительному состоянию. Пусть проверяется гипотеза о том, что вторая интервальная альтернатива I_2 предпочтительнее („больше") первой I_1 ($I_2 \succ I_1$). Если шансы появления различных точечных значений на каждом из интервалов в сравниваемой паре заданы как распределения вероятностей, численное моделирование процесса возможной многократной реализации точечных оценок может служить основой для оценки шансов предпочтительности интервальных величин и их сравнения.

Для сравнения интервалов методом численного моделирования необходимо провести достаточно много (скажем, N) испытаний, при каждом из которых соответствующий интервал заменяется его точечной реализацией, и отметить количество N_g возникающих точечных реализаций (i_1, i_2) интервальных оценок I_1 и I_2, для которых i_2 не меньше, чем i_1, а также количество N_r точечных реализаций, для которых i_2 меньше, чем i_1. В качестве критерия сравнения интервально-вероятностных альтернатив по предпочтительности предложено принять в этом подходе коэффициент уверенности $K_{as} = (N_g - N_r)/N$. Коэффициент уверенности показывает, насколько шансы реализации проверяемой гипотезы о предпочтительности одной из альтернатив ($I_2 \succ I_1$) превышают шансы истинности противоположной гипотезы. Другими словами, насколько шансы получения желаемого результата превосходят риск его неполучения.

Коэффициент уверенности как критерий безразмерен и соизмеряет шансы получения желаемого результата и связанный с этим риск. Он отличается от более привычных критериев, основанных на замещении интервальных оценок точечными, предположительно эквивалентными при сравнении и оценке эффективности исходным интервальным. Это оценки математического ожидания, оценки, получаемые на основе коэффициентов “пессимизма – оптимизма” Гурвица, и детерминистские эквиваленты теории ожидаемой полезности. Эти критерии подкупают простотой получения их значений, а также тем фактом, что, как отмечают эксперты, руководители-практики привыкли работать и предпочитают иметь дело с одно числовыми оценками, в том числе для будущих значений сравниваемых показателей. Наглядность точечных критериев проявляется и в том факте, что они измеряются в тех же единицах, что и исходные интервальные показатели эффективности альтернатив. Простота и наглядность точечных оценок скрывает некоторые их недостатки. Так, эти оценки не сопровождаются оценками риска, связанного с принятием неверной гипотезы о предпочтительности/эффективности. У ЛПР может сложиться впечатление, что на их основе могут быть приняты единственно верные, при всех реализациях правильные решения о предпочтительности или эффективности альтернатив, чего, как мы видели, не должно быть для критериев, адекватных проблематике сравнения и оценки ожидаемой эффективности интервальных альтернатив.

Вместе с тем точечные оценки могут быть использованы при сравнении интервальных альтернатив и оценке их ожидаемой эффективности, если их применение в таком качестве имеет конвенциональный характер. При этом, конечно, надо отдавать себе отчет в приближенности и ограниченности получаемых при этом результатов.

Приведем пример именно такого использования подобных оценок. В международной практике вероятностной классификации запасов нефти и газа [Пороскун, 1999], принятой Всемирным нефтяным конгрессом и Обществом инженеров нефтяников, за оценку наиболее разведанной части запасов V (доказанных запасов) принимается величина V*, определяемая по вероятностной кривой P(V > V*) на уровне P = 90%. В то же время ясно, что сравнение залежей по значениям доказанных запасов не вполне корректно, поскольку эти значения всего лишь границы суженных, по сравнению с исходными, интервалов, в которых могут находиться все оцениваемые запасы сравниваемых объектов. Если эти суженные интервальные оценки не пересекаются, задача выбора предпочтительной альтернативы решена, но если и суженные интервалы пересекаются, сделать однозначный выбор предпочтительной альтернативы нельзя и следует обратиться к более адекватным задаче методам.

Будем считать, что альтернатива I_2 теоретически предпочтительнее, чем I_1, если значение K_{as} положительно. Теоретически, поскольку предпочтения ЛПР еще не учтены. Эти предпочтения могут быть выражены введением назначаемого ЛПР порогового значения коэффициента уверенности K_{th}. Именно, если вычисленное для данной пары интервальных оценок значение K_{as} не меньше, чем K_{th}, то I_2 следует признать более предпочтительной альтернативой на уровне уверенности K_{as} с учетом предпочтений ЛПР. Если порог, назначенный ЛПР, не позволяет признать вторую альтернативу предпочтительной, необходимо анализировать ситуацию заново. Если значение K_{as} отрицательно, необходимо проверить противоположную гипотезу. Приемлемый пороговый уровень K_{th} свой для каждого ЛПР и зависит от его склонности к риску.

Коэффициент уверенности может использоваться как критерий и при оценивании ожидаемой эффективности отдельной альтернативы I. Если, например, ЛПР считает, что приемлемое граничное значение критерия равно T, то $K_{as}(I \succ T) = P(I \succ T) - P(T \succ I)$, где $P(I \succ T)$ и $P(T \succ I)$ величины соответствующих шансов. Положительное значение коэффициента уверенности означает, что шансы получения в будущем "истинной" величины критериального показателя, которая превзойдет T, больше, чем шансы получения меньшего значения.

Как ранее это делалось при сравнении альтернатив, при анализе ожидаемой эффективности отдельной альтернативы коэффициент уверенности для произвольного распределения вероятностей на интервальной оценке может быть рассчитан методом статистических испытаний. Для отдельных частных, но важных для практики случаев, рассмотренных далее, могут быть найдены аналитические соотношения для расчета коэффициента уверенности. Это позволяет исследовать зависимость коэффициента уверенности от исходных параметров задачи в общем виде и сопоставить результаты оценки эффективности по критерию K_{as} и по критерию математического ожидания, подобно тому, как это было сделано для задач сравнения интервальных альтернатив [Стернин, 2013].

Расчет ожидаемой эффективности интервально-вероятностных альтернатив по критерию K_{as}: аналитический подход

В задачах сравнения и оценки ожидаемой эффективности интервальных альтернатив при квантификации шансов в рамках теории вероятностей возможны два пути. Первый основан на принципе максимальной энтропии (принцип Гиббса - Джейнса), согласно которому все возможные состояния природы имеют равные шансы на реализацию и, следовательно, необходимо признать наличие на интервалах равномерных распределений. Некоторые исследователи полагают, что „поскольку речь идет о четких интервалах, никакое другое распределение, кроме равномерного, не будет иметь смысла" [Дилигенский, 2004]. Мы не разделяем этой точки зрения, считая, что эксперт должен иметь более широкие возможности для выражения своих знаний об анализируемых альтернативах. Даже ограничивая себя равномерным распределением, эксперт может перейти к классу обобщенных интервальных оценок [Стернин, 2005] и выразить свои знания с помощью обобщенного равномерного распределения вероятностей [Стернин, 2007], представляющего собой вероятностную смесь равномерных распределений.

Конечно, для чисто интервальных альтернатив точное распределение шансов на них неизвестно. Однако можно предположить, что во многих случаях эти распределения унимодальные и для многих типов распределений эксперт может приближенно аппроксимировать эти неизвестные (но унимодальные) распределения какими-либо простыми привычными для него, например, треугольными распределениями. Возможность перемещения моды треугольного распределения от левой до правой границы его интервала-носителя позволяет эксперту проверить различные гипотезы о правдоподобности использования в задаче тех или иных шансов. Указанная гипотеза о правомочности такой приближенной замены интервальных альтернатив интервально-вероятностными использована в настоящей работе.

В этой связи следует отметить еще одно обстоятельство. Информация об анализируемых интервальных альтернативах достаточно часто предоставляется экспертами. Хотя используемые в предлагаемом подходе при сравнении/оценке эффективности альтернатив методы являются количественными, при приближенно-экспертном задании информации вряд ли имеет смысл придавать особое значение тому, на сколько именно показатель эффективности одной альтернативы больше/меньше другой. Представляется, что здесь более уместны суждения, основанные на порядковых шкалах, то есть на-констатации того, что одна из альтернатив предпочтительней без квантификации степени этой предпочтительности, так, как это имеет место в задачах не с количественными, а с качественными критериями [Ларичев, 2006]. Поэтому при замещении неизвестных "истинных" распределений вероятностей треугольными неизбежная погрешность в точном измерении различий в значениях критериев сравнения альтернатив не столь важна, если общий вывод о предпочтительности альтернатив инвариантен к такому замещению. Хотя строгое доказательство этого факта вряд ли возможно, проведенные нами численные эксперименты для различных распределений вероятностей с последующей их заменой на треугольные показали приемлемость такого замещения для выводов о предпочтительности, делаемых на основе предлагаемого здесь критерия сравнения – коэффициента уверенности.

В работе [Смоляк, 1996] было показано, что при оценке и сравнении интервально-вероятностных альтернатив в классе размерных точечных индикаторов наиболее обосновано употребление критерия математического ожидания эффективности. В статьях [Стернин, 2011; 2013] нами получены аналитические соотношения для коэффициента уверенности для всех возможных конфигураций пар сопоставляемых альтернатив для равномерных и треугольных распределений, задаваемых в различных комбинациях на сравниваемых по предпочтительности интервалах. Это позволило установить, что для некоторых частных случаев коэффициент уверенности может быть, с точностью до общей для данной конфигурации нормировки, выражен через разность ΔAv математических ожиданий распределений на сравниваемых интервалах, однако в общем случае результаты сравнения по критерию K_{as} и критерию разности математических ожиданий отличаются. Можно было бы предположить, что хотя критерий ΔAv не сопровождается оценкой риска, но вместе с тем и не противоречит критерию коэффициента уверенности. Действительно, многие численные примеры сравнения интервальных альтернатив для произвольных распределений, проведенные нами методом статистических испытаний, подтверждают это: знаки величин ΔAv и $Kas(I_2 \succ I_1)$ в этих примерах совпадают. Можно посчитать поэтому, что критерий ΔAv пригоден для использования в задачах оценки и сравнения интервальных альтернатив для экспресс-анализа. Это, однако, не так, нетрудно привести контрпример, опровергающий эту гипотезу: для вложенных интервалов с треугольными распределениями на них (L_1 = 3, M_1 = 38, R_1 = 41, L_2 = 23, M_2 = 25, R_2 = 37) $Kas(I_2 \succ I_1)$ = - 0.02, а ΔAv = 1. В аналогичном примере для сдвинутых интервалов (L_1 = 0, M_1 = 4.9, R_1 = 5, L_2 = 1, M_2 = 3, R_2 = 6) $Kas(I_2 \succ I_1)$ = - 0.03, а ΔAv = 0.03.

Обратимся теперь к аналогичному анализу для задач оценки ожидаемой эффективности интервальных альтернатив. Пусть вначале на интервале $I = [L, R]$ задано равномерное распределение вероятностей, и желаемое для ЛПР пороговое значение критерия равно неотрицательной величине T. Отметим, что если $T = 0$, то для того, чтобы задача оценки эффективности как задача принятия решений имела смысл, L должно быть отрицательным.

Для коэффициента уверенности получаем тогда соотношение

$$Kas(T) = \frac{R - 2T + L}{R - L} = \frac{2(< I > - T)}{R - L}. \tag{1}$$

Здесь $<I> = (R + L)/2$ математическое ожидание для равномерного распределения на интервале $[L, R]$.

Из (1) следует, что для равномерного распределения („классический” интервальный случай) выбор в качестве желаемого критериального значения величины математического ожидания приводит к нулевому коэффициенту уверенности. Это означает, что возможные реализации, превосходящие среднее значение, и меньшие его имеют одинаковые шансы, что едва ли может свидетельствовать в пользу принятия решения на основе критерия математического ожидания. Из (1) вытекает также, что при T, больших $<I>$, коэффициент уверенности отрицателен, а значит риск того, что тестируемая гипотеза о предпочтительности неверна, превосходит для таких значений критерия шансы ее истинности. Это всегда так при отрицательных математических ожиданиях.

В случае задания на интервальном показателе эффективности треугольного распределения следует различать случаи $T > M$ и $T < M$, где M мода треугольного распределения.

При $T < M$ получаем:

$$K_{as}(T) = 1 - \frac{2(T - L)^2}{(R - L)(M - L)} \tag{2A}$$

или

$$K_{as}(T) = \frac{RM - 2T^2 + 4TL - 3L < I >}{(R - L)(M - L)}, \tag{2B}$$

где $<I> = (R + M + L)/3$ – среднее значение треугольного распределения. Из (2B) следует, что при $T < M$ коэффициент уверенности как функция выбираемого ЛПР желаемого („не хуже, чем”) порогового значения T показателя эффективности представляет собой выпуклую параболу, ветви которой обращены вниз, а максимум (+1) достигается при $T = L$, находясь, таким образом, вне допустимой области $T \geq 0$.

При $T > M$ имеем:

$$Kas(T) = \frac{2(R - T)^2}{(R - M)(R - L)} - 1. \tag{2C}$$

или

$$K_{as}(T) = \frac{3R < I > +2T^2 - 4RT - ML}{(R-M)(R-L)} \tag{2D}$$

В этой области коэффициент уверенности - это вогнутая парабола, ветви которой обращены вверх, а минимум (-1) достигается при $T = R$. Можно проверить, что при $T = M$ обе ветви коэффициента уверенности имеют общее значение $K_{as}(M) = 3(<I> - M)/(R - L) = 2[(R + L)/2 - M]/(R - L)$. Следовательно, графиком показателя „коэффициент уверенности” служат в этом случае две вышеуказанные параболы, сопряженные в точке $(M, K_{as}(M))$.

Для сопоставления результатов оценки ожидаемой эффективности по критерию математического ожидания и коэффициенту уверенности приведем формулы для K_{as} при $T = <I>$.

При $T = <I> < M$, или, эквивалентно, при $(R + L)/2 < M$

$$K_{as}(< I >) = \frac{1}{9} - \frac{2(R-M)^2}{9(R-L)(M-L)}$$

При $T = <I> > M$, или, эквивалентно, при $(R + L)/2 > M$

$$K_{as}(< I >) = \frac{2(M-L)^2}{9(R-M)(R-L)} - \frac{1}{9}$$

Можно видеть, что при $M = (R + L)/2$ коэффициент уверенности $K_{as}(<I>) = 0$, при $M > (R + L)/2$ значение коэффициента уверенности $K_{as}(<I>)$ положительно, а при $M < (R + L)/2$ отрицательно. Нетрудно обнаружить, что ЛПР, использующие разные критерии оценки ожидаемой эффективности интервальных альтернатив, могут прийти к разным выводам. Например, для альтернативы $L = -10$, $M = 0.9$, $R = 12$ ЛПР, пользующийся критерием математического ожидания, получит, что $<I> = 0.97$, а ЛПР, полагающийся на критерий коэффициента уверенности, обнаружит, что $K_{as}(<I>) = -0.003$.

Можно понять природу этого расхождения: даже несмотря на то, что шансы получения значений показателя эффективности, превосходящих среднюю величину, меньше, чем не достигающих ее, суммарный „взвешенный по вероятности” вклад первых значений эффекта превосходит вклад, пусть и встречающихся более часто, вторых значений. Это обстоятельство скажется, однако, на результате сравнения лишь в случае возможности многократного реального повторения точечных реализаций оцениваемой интервальной альтернативы, что вряд ли можно считать допустимым в задачах экспертного анализа прогнозных интервальных оценок показателей эффективности альтернатив.

Мы показали, таким образом, что критерий оценки ожидаемой эффективности интервальных альтернатив, как и сравнения их по предпочтительности, а также соответствующий метод, адекватный задачам прогнозирования, должен, из-за неопределенности будущего исхода, позволять соизмерять шансы проверяемой гипотезы о предпочтительности и противоположной ей. Один из таких методов, основанный на расчете коэффициента уверенности, предложен в настоящей работе.

Критерий Гурвица и оценка шансов предпочтительности интервальных альтернатив

Одним из распространенных способов сравнения и оценки альтернатив с интервальными показателями эффективности является использование формулы Гурвица [Hurwicz, 1951]. Согласно ей интервальный показатель эффективности $I = [L, R]$ заменяется точечным S, эквивалентным, как полагают, первоначальному интервальному при сравнении или оценке ожидаемой эффективности. При этом

$S(\lambda) = (1 - \lambda)L + \lambda R$, где $0 < \lambda < 1$ – коэффициент “пессимизма – оптимизма” Гурвица. В ситуации, в которой большему значению показателя качества отвечает более предпочтительное состояние альтернативы, $\lambda = 1$ соответствует “безудержному” оптимизму ЛПР, а $\lambda = 0$ – пессимизму. Для противоположной ситуации эти граничные значения λ надо поменять местами. Подход Гурвица, таким образом, предлагает для принятия решений два критерия: безразмерный, как и коэффициент уверенности, параметр λ и одноразмерную с интервальным показателем эффективности точечную величину $S(\lambda)$.

Считается, что при сравнении альтернатив или оценке их эффективности предпочтение следует отдать альтернативе с наилучшей (наибольшей или наименьшей) величиной критерия $S(\lambda)$. Отметим, что, в дополнение к недостаткам точечных эквивалентов, изложенным выше, одна из трудностей использования метода Гурвица связана со сложностью обоснования выбора величины λ в конкретных задачах сравнения или оценки эффективности альтернатив, что затрудняет, на наш взгляд, осознанное использование метода в задачах принятия решений. Это приводит к тому, что одни исследователи рекомендуют использовать при сравнении и оценке эффективности альтернатив одинаковые значения λ [Виленский, 2008], а другие, впрочем без какого-либо обоснования, – разные [Кононов, 2010].

В этом разделе статьи мы попытаемся ответить на вопрос, в каких случаях и как подход Гурвица можно согласовать с подходом расчета шансов предпочтительности, а также обсудить вопрос выбора величины коэффициента “пессимизма – оптимизма”.

Обратим внимание, прежде всего, на тот факт, что при выборе величины λ следует учитывать специфику конфигурации [Shepelyov, 2011] сравниваемой интервальной пары. Так, в ситуации „правого сдвига” при сравнении, когда сравниваемая пара интервалов такова, что $L_1 < L_2 < R_1 < R_2$, нет смысла рекомендовать какое-либо одно значение коэффициента „пессимизма – оптимизма” при принятии решения о предпочтительности. Действительно, выбрав одинаковые значения λ на интервалах, эксперт получил для них точечные значения по методу Гурвица S_1 и S_2. Можно видеть, что $S_2 - S_1 = \lambda(R_2 - R_1) + (1 - \lambda)(L_2 - L_1)$, т.е. эта разность неотрицательна. Таким образом, при одинаковых значениях коэффициентов „пессимизма – оптимизма” для сравниваемых альтернатив одна из них (вторая) предпочтительнее другой при любом выборе значения λ из интервала [0, 1][1]. Поэтому, если знания ЛПР подсказывают ему, что шансы предпочтительности первой альтернативы выше, чем второй, ему следует использовать разные значения коэффициентов „пессимизма – оптимизма” для разных альтернатив. Кроме того, как было показано выше из содержательных соображений, адекватный задаче метод сравнения должен допускать возможность оценки риска ошибки при выборе предпочтительной альтернативы. Однако обоснование выбора разных значений λ при сравнении и оценки величины шансов истинности проверяемой ЛПР гипотезы должны на чем-то основываться. Конечно, если допустить возможность существования эксперта-оракула, безошибочно предсказывающего будущее, никакие методы поддержки деятельности эксперта такому специалисту не нужны. Такой эксперт однозначно укажет правильные будущие реализации точечных значений сравниваемых интервальных оценок, а шансы реализации других точечных значений будут нулевыми. Мы будем все же ориентироваться на традиционных экспертов, нуждающихся в средствах проверки истинности их гипотез о предпочтительности сравниваемых интервальных альтернатив.

---

[1] Отметим, что для пары вложенных интервалов предпочтительность, измеряемая величиной S, зависит от выбора общего для сравниваемых альтернатив значения λ.

Рассмотрим в связи с этим некоторые подходы к обоснованию выбора значений коэффициентов “пессимизма – оптимизма” и оценке шансов их реализации, согласующиеся с теоретико-вероятностными представлениями.

Поскольку λ = (*S* – *L*)/(*R* – *L*), то λ = *P*(*i* < *S*) для равномерного распределения, заданного на интервальной оценке *I*. Это значит, что формула Гурвица может быть переписана в виде

$$S = P(i > S)L + P(i < S)R \tag{3A}$$

Откажемся теперь считать, что кумулятивная функция распределения *P*(*i* < *S*) и дополнительная к ней до 1 функция *P*(*i* > *S*) отвечают равномерному распределению. Для произвольного неизвестного распределения вероятностей перепишем формулу Гурвица в виде

$$S = P(i > T)L + P(i < T)R, \tag{3B}$$

где *T* - приемлемое для эксперта граничное („не хуже, чем”) значение показателя эффективности. Таким образом, теперь λ = *P*(*i* < *T*). Эксперт может, альтернативно, задать значение *T* или вероятность получения “гарантированного” (не хуже, чем) результата, то есть, фактически, λ.

Формула (3B) показывает, что *S* – взвешенная по вероятности сумма *L* и *R* при принятой экспертом величине *T* или при выбранных экспертом шансах λ = *P*(*i* < *T*). Функции *P*(*i* < *T*) и *P*(*i* > *T*) являются функциями, описывающими шансы на получение “гарантированных” результатов “не хуже, чем”. Первая – для случая, когда степень предпочтительности альтернатив возрастает с уменьшением показателя эффективности (случай 1), а вторая, когда предпочтительность возрастает вместе с ростом показателя эффективности (случай 2). В первом случае одна и та же устраивающая эксперта величина показателя эффективности, отграничивающая интервал “не хуже, чем”, будет достигаться в альтернативе, претендующей на статус предпочтительной, при большем значении *P*(*i* < *T*), а во втором при большем значении *P*(*i* > *T*). Если же эксперт задастся для сравниваемых интервалов одинаковой величиной шансов на истинность результатов сравнения (величиной *P*(*i* < *T*) в первом случае и *P*(*i* > *T*) во втором), “худшая” граница суженного интервала значений показателя эффективности окажется меньше у альтернативы, претендующей на статус предпочтительной, в случае 1 и больше в случае 2.

Таким образом, при такой интерпретации коэффициента „пессимизма – оптимизма” становится ясным, что рациональный эксперт, желая повысить уровень надежности результатов сравнения, будет тестировать при сравнении уровни λ, бóльшие 0.5 в случае 1, а в случае 2 меньшие 0.5.

В рамках такой трактовки несложно теперь найти связь между коэффициентом „пессимизма – оптимизма” Гурвица и коэффициентом уверенности. Именно, λ = (1 – K_{as})/2. Теперь можно оценить величину риска, связанного с принятием решений об ожидаемой эффективности интервальной альтернативы на основе коэффициента Гурвица: если, например, рекомендуемое значение λ = 0.33 [Виленский, 2008], то K_{as} = 0.34, шансы истинности гипотезы о неотрицательности показателя эффективности равны 0.67, а истинности противоположной гипотезы (риск) равны 0.33.

Приведем также соотношение, связывающее коэффициент уверенности со вторым параметром подхода Гурвица, величиной *S*.

$$K_{as} = 1 - \frac{2(S-L)}{R-L} = \frac{2}{R-L}\left(\frac{R+L}{2} - S\right)$$

До настоящего момента распределение вероятностей на интервальной альтернативе еще не специфицировано. Его задание позволяет вычислить коэффициент уверенности, а вместе с ним λ и *S*.

Если заданное распределение треугольное, соответствующие λ и *S* могут быть определены с помощью следующих соотношений.

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{(T-L)^2}{(R-L)(M-L)}, L \le T \le M \\ 1-\dfrac{(R-T)^2}{(R-L)(R-M)}, M < T \le R \end{cases} \tag{4A}$$

$$S = \begin{cases} L+\dfrac{(T-L)^2}{M-L}, L \le T \le M \\ R-\dfrac{(R-T)^2}{R-M}, M < T \le R \end{cases} \tag{4B}$$

Таким образом, эксперт может, используя подход Гурвица, задать величину коэффициента “пессимизма – оптимизма”, определить значения *S* и коэффициента уверенности, а вместе с ним и шансы истинности проверяемой гипотезы о предпочтительности, а также связанного с этим риска. Отметим, что это может делаться без спецификации распределения вероятностей на интервальной альтернативе, ожидаемая эффективность которой анализируется. При задании упомянутого распределения вероятностей вначале может быть найдено значение коэффициента уверенности, а остальные обсуждаемые здесь параметры на этой основе позже.

Сравнение интервальных альтернатив по предпочтительности, адекватное задаче, не может быть произведено лишь путем выбора λ и сопоставления соответствующих *S*. Согласование подходов Гурвица и оценки шансов предпочтительности потребует задания значений λ, возможно разных для разных сравниваемых альтернатив в их паре, и подбора в диалоге с экспертом параметров распределений вероятностей на интервалах. Для треугольных распределений это может быть сделано расчетом величин мод распределений по заданным значениям коэффициентов “пессимизма – оптимизма” с помощью, например, сервиса “Подбор параметра” MS-Excel. Дальнейшее сопоставление альтернатив следует проводить путем расчета коэффициента уверенности для сравниваемой пары по формулам, полученным в работе [Стернин, 2013].

Заключение

Настоящая статья посвящена обоснованию метода и критерия оценки ожидаемой эффективности альтернатив с интервальным, из-за неопределенности, показателем эффективности в задачах прогнозирования. Критерий оценки – „коэффициент уверенности” - и метод расчета его значений дают возможность получить оценку шансов истинности проверяемой ЛПР гипотезы о приемлемости ожидаемой эффективности анализируемой альтернативы и определить связанный с этим риск. Статья примыкает к работе [Стернин, 2013], в которой рассмотрена более сложная задача предпочтительности одной из альтернатив в их сравниваемой паре и риска ее ложности. Проведено сравнение результатов оценки ожидаемой эффективности по предлагаемому критерию и другим критериям оценки (среднее значение, критерий Гурвица). Приведены аргументы в пользу использования предлагаемого критерия в задачах прогнозирования ожидаемой эффективности интервальных альтернатив и при их сравнении по предпочтительности. Именно, показано, что критерий оценки ожидаемой эффективности интервальных альтернатив, как и сравнения их по предпочтительности, а также соответствующий метод сравнения/оценки, адекватный задачам прогнозирования, должен, из-за неопределенности будущего исхода, позволять соизмерять шансы проверяемой гипотезы о предпочтительности и противоположной ей. Один из таких методов, основанный на расчете коэффициента уверенности, предложен в настоящей работе. Поскольку при работе с интервальными оценками эффективности альтернатив лица, принимающие решения, в процессе решения задач выбора в условиях неопределенности часто предпочитают заменить неопределенную интервальную оценку детерминированной точечной, рассмотрены возможность согласования результатов сравнения и оценки ожидаемой эффективности на основе оценок математического ожидания и критерия Гурвица и расчетов на базе коэффициента уверенности, а также вопрос выбора величины коэффициента „пессимизма – оптимизма”. Предложено использовать при сравнении альтернатив и оценке их ожидаемой эффективности по величине коэффициента уверенности порядковые шкалы, не акцентируя внимание на том, сколь велико значение критерия сравнения.

Благодарности

The paper is published with financial support by the project ITHEA XXI of the Institute of Information Theory and Applications FOI ITHEA (www.ithea.org) and the Association of Developers and Users of Intelligent Systems ADUIS (www.aduis.com.ua).

Библиография

[Chugunov, 2008] N. Chugunov, G. Shepelyov and M. Sternin. The generalized interval estimations in decision making under uncertainty. // International Journal on Technology, Policy and Management. Vol. 8, pp. 298-321. 2008.

[Hurwicz, 1951] Hurwicz L Optimality criteria for decision making under ignorance. Cowles Commission Discussion Paper, Statistics, # 370, New Haven. 1951.

[Shepelyov, 2011] G. Shepelyov, Sternin M. Methods for comparison of alternatives described by interval estimations. // International Journal of Business Continuity and Risk Management. 2011. Vol. 2, No. 1. 2011.

[Виленский, 2008] Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А. Оценка эффективности инвестиционных проектов. Теория и практика. М.: Дело, АНХ. 2008.

[Дилигенский, 2004] Дилигенский Н.В., Дымова Л.Г., Севастьянов П.В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология. М.: Издательство Машиностроение − 1. 2004.

[Зайченко, 1991] Зайченко Ю.П. Исследование операций. Нечеткая оптимизация. Киев: Высшая школа. 1991.

[Кононов, 2010] Кононов Ю.Д., Локтионов В.И., Ступин П.В. Учет фактора неопределенности при оценке вариантов использования ковыктинского газа // Proc. of the Int. Symposium on “Energy of Russia in XXI Century: Development Strategy – Eastern Vector”. Irkutsk, Russia, Aug. 30 – Sept. 3. 2010.

[Ларичев, 2006] Ларичев О.И. Вербальный анализ решений. М.: Наука. 2006.

[Петровский, 2008] Петровский А.Б. Компьютерная поддержка принятия решений: современное состояние и перспективы развития // Системные исследования. Методологические проблемы. Ежегодник 1996. М.: Эдиториал УРСС. 1996.

[Пороскун, 1999] Пороскун В.И., Стернин М.Ю., Шепелев Г.И. Вероятностная оценка запасов на начальных стадиях изучения залежей нефти и газа. // Геология нефти и газа. 1999. № 5 – 6. Cc. 59 – 63.

[Смоляк, 1996] Смоляк С.А. О сравнении альтернатив со случайным эффектом. // Экономика и мат. методы. 1996. Т. 32. Вып. 4.

[Стернин, 2005] Стернин М.Ю, Чугунов Н.В., Шепелев Г.И. Учет неопределенности экспертных знаний: синтез интервального и вероятностного подходов // Информационные технологии и вычислительные системы. 2005. Т. 4. Сс. 36 – 46.

[Стернин, 2007] Стернин М.Ю, Шепелев Г.И., Шепелев Н.Г. Свойства обобщенного равномерного распределения вероятностей // Труды Второй международной конференции „Системный анализ и информационные технологии“. 2007. Т. 1. Сс. 239 – 242.

[Стернин, 2010] Стернин М.Ю., Шепелев Г.И. // Обобщенные интервальные экспертные оценки в принятии решений. // Доклады академии наук. Т. 432, № 1, сс. 33 – 34. 2010.

[Стернин, 2011] Стернин М.Ю, Шепелев Г.И. Сравнение интервальных альтернатив. // Труды Института системного анализа Российской академии наук. 2011. Т. 61, вып. 2. Сс. 7 – 11.

[Стернин, 2012] Стернин М.Ю., Шепелев Г.И. Оценка интервальных альтернатив: неопределенности и предпочтения. // International journal “Information models and analysis”. 2012. V.1, No 4. Pp. 357 – 369.

[Стернин, 2013] Стернин М.Ю., Шепелев Г.И. О применимости оценок математического ожидания при сравнении интервальных альтернатив. // International journal “Information models and analysis”. 2013. V.20, No 4. Pp. 342 – 351.

Информация об Авторах

Михаил Стернин *– старший научный сотрудник Института системного анализа Российской академии наук, Россия, 117312, Москва, просп. 60-летия Октября, 9, ИСА РАН; e-mail: mister@isa.ru*

Геннадий Шепелёв *– заведующий лабораторией ИСА РАН; e-mail: gis@isa.ru*

Evaluating Expected Effectiveness of Interval Alternatives

Gennady Shepelev, Mikhail Sternin

Abstract: *Earlier, in the framework of our previous papers, we introduced a criterion for comparing interval alternatives, which was called the assurance factor. It is based on the balance of chances that hypothesis on preference for one of the compared alternatives is true and the risks associated with the possible truth of the opposite hypothesis. The criterion is dimensionless that is not similar to other criteria used for this purpose. In this paper this criterion and its calculation method are proposed to use for analysis of the most important from a practical point of view problems of forecasting the expected effectiveness of the individual alternatives. Numerical procedures have been developed to calculate the values of the assurance factor in the case of arbitrary distribution on the analyzed interval alternative. Analytical expressions were also found for the uniform and triangular distributions. Comparison of the results was produced for evaluating the expected effectiveness of interval alternatives on the proposed criterion and on base of other evaluation criteria (mean value, Hurwicz criterion). The arguments presented in favor of adequacy of the proposed criterion for problems of forecasting both expected efficiency of interval alternatives and comparison of alternatives on preference. The possibility harmonizing of results comparing alternatives and evaluating their expected efficiency based on Hurwicz criterion and on the assurance factor was considered. Relation of the assurance factor with "pessimism - optimism" coefficient was received. On this basis we analyze the question concerning substantiation of the choice of Hurwicz criterion values. Using ordinal scales in the process of comparing alternatives and evaluating their expected effectiveness on base of the assurance factor is proposed.*

Keywords*: estimating expected efficiency of interval alternatives, criterion estimating efficiency, comparing different criteria of efficiency*