ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ АКСИОМАТИЧЕСКОГО ПОДХОДА К СУЖЕНИЮ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО

Владимир Ногин

Аннотация: *Рассматривается аксиоматический подход к решению проблемы сужения множества Парето на основе определённой числовой информации об отношении предпочтения лица, принимающего решение. Этот подход развивается автором, начиная с 1983 г. Его применение предполагает принятие определённых четырёх аксиом «разумного» поведения ЛПР в процессе принятия решений. Предполагается, что в дополнение к указанным аксиомам известны некоторые сведения об отношении предпочтения ЛПР (т.н. «кванты» информации). На основе этих сведений можно сократить множество Парето и, тем самым, облегчить последующий выбор выбираемых решений. Анализируется класс задач многокритериального выбора, для решения которых этот подход можно применять, а также обсуждаются возможные направления расширения границ его применимости.*

Ключевые слова: *множество Парето, многокритериальный выбор, сужение множества Парето*

ACM Classification Keywords: *F.4.3 – Decision problems*

Введение

Аксиоматический подход к сужению множества Парето берёт свое начало с доклада автора в 1983 г. в Батуми на одной из Всесоюзных конференций по принятию решений [Ногин, 1983]. В этом докладе были сформулированы четыре аксиомы (аксиома нерефлексивности отношения предпочтения, аксиома Парето, аксиома транзитивности и аксиома инвариантности отношения предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР). Кроме того, в этом докладе присутствовало требование наличия дополнительных сведений об отношении предпочтения в виде определённых пар несравнимых по отношению Парето векторов критериального пространства, относительно которых ЛПР могло с уверенность сказать, какое именно из этих двух векторов для него является более предпочтительным по сравнению с другим. На основе этих сведений, впоследствии названных «квантами» информации об отношении предпочтения, осуществлялось построение оценки сверху для неизвестного множества выбираемых вариантов (векторов). Данная оценка представляла собой определённое множество Парето относительно новой векторной функции, компоненты которой являются линейными комбинациям исходных критериев, а коэффициенты этих комбинаций выписываются, исходя из имеющихся дополнительных сведений об отношении предпочтения ЛПР.

Впоследствии аксиомы были уточнены, но существо аксиоматического подхода осталось прежним. Существенное развитие этот подход получил в работе [Noghin, 1997], где впервые в самом широком классе многокритериальных задач (в которых на векторную функцию и допустимое множество не накладывается никаких ограничений) было установлено, что любое множество выбираемых решений содержится в «новом» множестве Парето, которое можно построить с использованием «нового» векторного критерия, число компонент которого не менее размерности «старого» критерия. Тем самым, для искомого множества выбираемых решений (векторов) была построена оценка сверху в виде указанного «нового» множества Парето. Эта оценка в существенной степени зависит как конкретного вида «кванта» используемой информации, так и имеющихся в наличии векторного критерия и множества допустимых решений. В крайних случаях эта оценка может состоять как из одноэлементного множества, так и совпадать с исходным множеством Парето.

В настоящее время аксиоматический подход к сужению множества Парето представляет собой развитую теорию (см., например, [Ногин, 2005]), которая по-прежнему базируется на определённых четырёх аксиомах «разумного» выбора, опирается на определение «кванта» информации об отношении предпочтения ЛПР и содержит несколько десятков теорем, показывающих, каким образом можно производить сужение множества Парето на основе того или иного набора «квантов» информации об отношении предпочтения ЛПР. Место рассматриваемого аксиоматического подхода в числе прочих, предназначенных для сужения множества Парето, а также его взаимосвязь с ними, была проанализирована в [Ногин, 2006].

В настоящей работе формулируются основные положения аксиоматического подхода, анализируется класс задач многокритериального выбора, для решения которых этот подход предназначен, а также рассматриваются возможные направления расширения границ его применимости за счёт ослабления некоторых аксиом, лежащих в его основе.

Задача многокритериального выбора. Аксиомы разумного выбора

Рассмотрим задачу (модель) *многокритериального выбора* $\langle X, f, \succ_X \rangle$ в следующей постановке. Заданы:

- X − множество возможных вариантов (решений), из которого следует осуществлять выбор; это непустое множество произвольной природы;
- $f=(f_1,...,f_m)$, *m*≥2 − векторный критерий, определенный на множестве X и принимающий значения в арифметическом векторном пространстве R^m ;
- $\succ_X$ – асимметричное бинарное отношение строгого предпочтения ЛПР, определённое на множестве *X*. Запись $x_1 \succ_X x_2$ для $x_1, x_2 \in X$ означает, что вариант x_1 для ЛПР предпочтительнее варианта x_2; иными словами, при выборе из двух данных вариантов ЛПР выберет первый и не выберет второй.

Результатом решения задачи многокритериального выбора является подмножество множества возможных вариантов X, которое именуется множеством выбираемых вариантов и обозначается C(*X*). В частном случае это множество может состоять из одного элемента.

В дальнейшем будут также использоваться множество возможных векторов (векторных оценок) $Y = f(X) \subset R^m$ и множество выбираемых векторов $C(Y) = f(C(X))$. Будем считать, что на множестве возможных векторов (оценок) *Y* задано отношение строгого предпочтения $\succ_Y$ (которое на практике обычно полностью не известно), согласованное с отношением $\succ_X$ следующим образом:

$$x_1 \succ_X x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \succ_Y f(x_2) \text{ для всех } x_1 \in \tilde{x}_1, x_2 \in \tilde{x}_2;\ \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{X} ,$$

где $\tilde{X}$ – совокупность классов эквивалентности, порожденных отношением эквивалентности $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ на множестве *X*.

Модель многокритериального выбора $\langle Y, \succ_Y \rangle$ в терминах векторных оценок включает множество возможных векторов Y и асимметричное отношение строгого предпочтения $\succ_Y$, заданное на множестве Y, а решением задачи многокритериального выбора в таком случае является множество выбираемых векторов C(*Y*). Между задачами выбора в терминах вариантов, а также в терминах их оценок имеется очевидная связь, которая даёт возможность любое высказывание, сформулированное в одних терминах, переформулировать в другие термины.

Напомним «разумные» требования (аксиомы), принятие которых лежит в основе использования аксиоматического метода сужения множества Парето [Ногин, 2005].

Аксиома 1 (*аксиома исключения доминируемых векторов*). Для любой пары векторов $y', y'' \in Y$, удовлетворяющих соотношению $y' \succ_Y y''$, *выполнено* $y'' \notin C(Y)$.

Смысл Аксиомы 1 состоит в том, что любой не выбираемый в паре вектор не должен выбираться и из всего множества векторов. В [Ногин, 2005] было указано, что это требование выполняется во многих, но не во всех задачах многокритериального выбора. Там же приводён пример ситуации, когда эта аксиома нарушается.

Аксиома 2 (*аксиома существования транзитивного продолжения*). Для отношения $\succ_Y$ существует иррефлексивное и транзитивное продолжение на всё пространство R^m, обозначаемое далее символом $\succ$.

В соответствии с Аксиомой 2, отношение $\succ_Y$ является сужением отношения $\succ$ на множество Y и обладает свойствами иррефлексивности и транзитивности (а значит, и асимметричности). Смысл этой аксиомы заключается в том, что ЛПР в принципе может сравнивать любые (а не только возможные) векторные оценки, причём в ходе сравнения ЛПР должно вести себя «разумным» (т.е. транзитивным) образом. Главным в последней аксиоме является именно требование транзитивности отношения предпочтения. В соответствии с общепринятыми нормами в теории принятия решений, этому требованию удовлетворяет достаточно широкий класс задач, интересных с точки зрения практики. С другой стороны, известно, что человек не всегда ведёт себя транзитивным образом. Однако попытки построения теории принятия решений, отказавшись от транзитивности, до сих пор не привели к построению сколь бы то ни было содержательной теории, они так и остались отдельными попытками.

Аксиома 3 (*аксиома согласования*). Каждый из критериев $f_1, f_2, ..., f_m$ согласован с отношением предпочтения $\succ$.

Напомним, что критерий f_i называют согласованным с отношением предпочтения $\succ$, если для любых двух векторов $y', y'' \in R^m$, таких, что

$$y' = (y_1', ..., y_{i-1}', y_i', y_{i+1}', ..., y_m'), \ y'' = (y_1', ..., y_{i-1}', y_i'', y_{i+1}', ..., y_m'), \quad y_i' > y_i'',$$

верно $y' \succ y''$. Иначе говоря, ЛПР заинтересовано в увеличении значения критерия, если этот критерий согласован с отношением предпочтения. Если какой-то критерий необходимо минимизировать, то его следует включить в рассматриваемую модель со знаком минус. Последняя аксиома включена для того, чтобы имел место принцип Эджворта-Парето [Ногин, 2005], согласно которому множество выбираемых вариантов (векторов) всегда содержалось в множестве Парето: $C(Y) \subset P(Y)$.

Напомним определения множества парето-оптимальных векторов

$$P(Y) = \{ y^* \in Y \mid \text{не существует такого } \ y \in Y, \text{что } y \geq y^* \}$$

и парето-оптимальных вариантов

$$P_f(X) = \{x^* \in Y \mid \text{не существует такого } x \in X, \text{что } f(x) \geq f(x^*)\}\ .$$

Здесь запись $y' \geq y''$ означает, что каждая компонента первого вектора больше либо равна соответствующей компоненты второго вектора, причем $y' \neq y''$, т.е. по крайней мере одна компонента первого вектора строго больше соответствующей компоненты второго вектора.

Отдельные авторы не считают принцип Эджворта-Парето всеобщим, и не исключают возможность выбора наилучших вариантов за пределами множества Парето. Следует сказать, что аксиоматический подход допускает соответствующую модификацию приведённой выше Аксиомы 3, однако в таком случае следует модифицировать и определение «кванта» (см. ниже разд. «Ослабление аксиомы согласования»), на основе которого осуществляется сужение области поиска выбираемых вариантов.

Аксиома 4 (*аксиома инвариантности*). Отношение предпочтения $\succ$ является инвариантным относительно линейного положительного преобразования, т.е. имеют место свойства

– Аддитивности, т.е. из выполнения $y' \succ y''$ всегда следует $(y'+c) \succ (y''+c)$ для любого вектора $c \in R^m$;

– Однородности, означающее, что из выполнения $y' \succ y''$ всегда следует $\lambda y' \succ \lambda y''$ для любого положительного числа λ .

Заметим, что в сформулированных аксиомах на множество возможных вариантов X и векторный критерий f никаких ограничений не накладывается. В этом проявляется свойство универсальности рассматриваемого аксиоматического подхода. Ограничения распространяются лишь на линию (стиль) поведения лица, принимающего решение, в процессе принятия решений.

Последняя аксиома представляет собой довольно жёсткое требование линейности отношения предпочтения. Однако если от него полностью отказаться, то математическая основа аксиоматического подхода будет разрушена, поскольку без Аксиомы 4 отношение предпочтения может не являться конусным (см. [Ногин, 2005]), а значит использование «квантов» информации для сужения множества Парето перестаёт быть обоснованным. Тем не менее, как будет указано ниже, вполне допустимо некоторое ослабление требований, содержащихся в последней аксиоме.

Сужение множества Парето на основе «квантов» информации

Приведём определение, лежащее в основе аксиоматического подхода.

Определение 1. Пусть имеется некоторая пара парето-оптимальных векторов, т.е. существуют такие два непустых подмножества номеров критериев $A, B \subset I = \{1,2,\ldots,m\}$, что

$$y_i' - y_i'' = w_i > 0 \quad \forall i \in A\,, \qquad y_j'' - y_j' = w_j > 0 \quad \forall j \in B \qquad y_s' = y_s'', \qquad \forall s \in I \setminus (A \cup B)\,.$$

Если выполнено $y' \succ y''$, то говорят, что задан *«квант» информации* об отношении предпочтения с параметрами $w_i\ (\forall i \in A), w_j\ (\forall j \in B)$.

Очевидно, наличие данного «кванта» в силу Аксиомы 1 даёт возможность сократить множество Парето на один элемент y''. Такое сужение, как правило, не облегчает процесса выбора. Однако, благодаря Аксиомам 1−4, действительное сужение множества Парето оказывается более значительным. А именно, имеет место следующий результат.

Теорема 1 (Ногин, 2005). В предположении выполнения Аксиом 1– 4 для любого множества выбираемых вариантов C(X), *справедливы включения*

$$C(X) \subset P_g(X) \subset P_f(X)\,, \tag{1}$$

причём «новый» векторный критерий g формируется из функций f_i для всех $i \in I \setminus B$, а также функций $g_{ij} = w_j f_i + w_i f_j$ *для всех* $i \in A,\ j \in B$.

В соответствии с Теоремой 1, для учёта «кванта» информации следует пересчитать исходный векторный критерий f по указанной формуле, а затем построить новое множество Парето $P_g(X)$. Это множество и будет оценкой сверху для искомого множества $C(X)$, причём указанная оценка будет более точной (более узкой), чем $P_f(X)$. Иначе говоря, используя «квант» информации, мы сужаем множество Парето, удаляя из него парето-оптимальные варианты, не согласующиеся с имеющимся «квантом» информации об отношении предпочтения.

Следует отметить, что в рамках аксиоматического подхода получен длинный ряд подобного рода теорем, показывающих, каким образом можно использовать не один, а целые наборы различного рода «квантов» информации для сужения множества Парето (см. [Захаров, [2011], [Климова, 2006], [Ногин, 2005], [Ногин, 2009], [Ногин 2010], [Ногин 2013]). Более того, на данный момент разработаны два алгоритма ([Ногин, Басков, 2010], [Ногин, 2013]), на основе которых можно учитывать произвольные конечные наборы «квантов» информации для сужения множества Парето.

Ослабление аксиомы согласования

Автором было установлено (см. [Ногин, 2005]), что выполнение Аксиомы 2 вместе с Аксиомой 4 в предположении иррефлексивности отношения предпочтения влечет конусность этого отношения, причём соответствующий конус является острым и выпуклым (без начала координат). Если же дополнительно потребовать выполнение Аксиомы 3, то этот конус будет содержать неотрицательный ортант. Таким образом, можно предложить следующий более общий вариант аксиомы согласования.

Аксиома 3$^{/}$. В критериальном пространстве R^m задан ***конус желательных направлений*** C, который является острым, выпуклым и не содержит начала координат, причём для всякой пары векторов $y', y'' \in R^m$ из выполнения $y' - y'' \in C$ следует $y' \succ y''$.

В Аксиоме 3 конусом C служит неотрицательный ортант пространства R^m. В общем случае в соответствии с Аксиомой 3$^{/}$ конус *C* может быть как шире, так и ỳже упомянутого неотрицательного ортанта.

В случае принятия Аксиомы 3$^{/}$ необходимо видоизменить определение «кванта» информации следующим образом.

Определение 2. Пусть имеется некоторая пара векторов $y', y'' \in R^m$, для которых не выполняется ни соотношение $y' - y'' \in C$, ни соотношение $y'' - y' \in C$. Будем говорить, что в условиях справедливости Аксиомы 3$^{/}$ задан «квант» информации об отношении предпочтения, если справедливо $y' \succ y''$ или $y'' \succ y'$.

Для рассматриваемого случая можно установить следующий результат.

Теорема 2. В предположении выполнения Аксиом 1, 2, 3′ и 4, а также при условии наличия «кванта» информации (в смысле Определения 2), в соответствии с которым $y' \succ y''$, для любого множества выбираемых вариантов C(Y) *справедливо включение*

$$C(Y) \subset Ndom_C(Y) \qquad (2)$$

где в правой части записано множество

$$Ndom_C(Y) = \{y^* \in X \mid \textit{не существует такого } y \in Y, \textit{что } y - y^* \in co\{(y' - y'') \cup C\}\},$$

а символом co{A} обозначена выпуклая оболочка множества A. *Если, кроме того, конус C содержит неотрицательный ортант, то дополнительно выполняется включение* $Ndom_C(Y) \subset P(Y)$.

Теорема 2 может быть распространена на случай наличия непротиворечивого набора «квантов» информации в виде пар векторов $u^i, v^i \in R^m, i = 1,...,k,$ для которых выполнено $u^i - v^i \in C, i = 1,2,...,k$. Однако предварительно необходимо сформулировать определение непротиворечивого набора векторов.

Определение 3. Будем говорить, что набор пар векторов $u^i, v^i \in R^m, u^i - v^i \in C, i = 1,...,k,$ является непротиворечивым, если существует такое иррефлексивное бинарное отношение $\succ$, удовлетворяющее Аксиомам 1, 2, 3′ *и 4*, что выполнено $u^i \succ v^i$, $i = 1,...,k$.

Теорема 3. Набор пар векторов $u^i, v^i \in R^m, u^i - v^i \in C, i = 1,...,k,$ является непротиворечивым, если выпуклая оболочка $co\{[\bigcup_{i=1,...,k}(u^i - v^i)] \cup C\}$ *образует острый конус*.

В соответствующем обобщении Теоремы 2, справедливом для произвольного непротиворечивого набора пар векторов $u^i, v^i \in R^m, u^i - v^i \in C, i = 1,...,k,$ в определении множества $Ndom_C(Y)$ вместо выпуклой оболочки $co\{(y' - y'') \cup C\}$ будет участвовать выпуклая оболочка $co\{[\bigcup_{i=1,...,k}(u^i - v^i)] \cup C\}$.

В случае конечного множества возможных векторов Y множество $Ndom_C(Y)$ в принципе может быть построено прямым перебором всех пар векторов множества Y, в противном случае (т.е. когда *Y* бесконечно) могут возникнуть сложные вычислительные проблемы, которые здесь мы обсуждать не будем.

В наиболее простой ситуации, когда конус C является многогранным (полиэдральным), для построения множества $Ndom_C(Y)$ может быть использован алгоритм, разработанный автором [Ногин, 2013].

Ослабление аксиомы инвариантности

Как уже было упомянуто выше, выполнение Аксиомы 2 вместе с Аксиомой 4 в предположении иррефлексивности отношения предпочтения влечет конусность этого отношения, причём соответствующий конус является острым и выпуклым (без начала координат). Идея следующего варианта обобщения аксиоматического подхода состоит в отказе от свойства линейности отношения предпочтения и существования некоторого единообразного «хорошего» конуса внутри множества всех тех векторов, которые доминируют произвольный вектор критериального пространства. А именно, будем предполагать, что отношение предпочтения $\succ$ вместо Аксиом 2-4 подчиняется следующему требованию.

Аксиома 2$^{//}$. Иррефлексивное отношение предпочтения $\succ$ обладает тем свойством, что для каждого $y \in R^m$ множество $Y_y = \{z \in R^m \mid y \succ z\}$ содержит один и тот же некоторый острый выпуклый конус С, без начала координат.

Заметим, что в условиях Аксиомы 2$^{//}$ отношение предпочтения $\succ$ может не удовлетворять ни свойству однородности, ни свойству аддитивности.

Определение 4. Пусть задана некоторая пара векторов $y', y'' \in R^m$, для которых не выполняется ни соотношение $y' - y'' \in C$, ни соотношение $y'' - y' \in C$. Будем говорить, что в условиях справедливости Аксиомы 2$^{//}$ задан «квант» информации об отношении предпочтения, если имеет место соотношение $y' \succ y''$ или $y'' \succ y'$.

Следует отметить, что задача выявления подобного «кванта» информации существенно сложнее соответствующей задачи, исходя из Определения 1, поскольку неизвестен конус С.

Можно установить следующий результат.

Теорема 4. Пусть выполнены Аксиомы 1 и 2$^{//}$, а также имеется «квант» информации (в смысле Определения 4), в соответствии с которым $y' \succ y''$. Тогда для любого множества выбираемых вариантов C(Y) справедливо включение (2). Если, кроме того, конус С содержит неотрицательный ортант, то дополнительно имеем $Ndom_C(Y) \subset P(Y)$.

Данный результат можно распространить на случай наличия произвольного непротиворечивого конечного набора «квантов» информации подобно тому, как это было сделано в предыдущем разделе.

Заключение

В работе рассмотрены возможные направления обобщения аксиоматического подхода к сужению множества Парето, развиваемого автором с 1983г. Эти обобщения связаны с ослаблением аксиом, лежащих в его основе. Указывается, что в таком случае требуется определённая модификация определения «кванта» информации об отношении предпочтения, на основе которого производится сужение. Приведены соответствующие модификации, а также сформулированы теоремы, показывающие, каким образом в рамках обобщённого аксиоматического подхода можно осуществлять сужение множества Парето при наличии одного или нескольких «квантов» информации об отношении предпочтения ЛПР. Отмечены трудности, возникающие при реализации предложенного подхода на практике.

Благодарность

Автор выражает признательность ITHEA International Scientific Society и Российскому Фонду Фундаментальных Исследований (проект № 14-07-00449) за финансовую поддержку.

Литература

[Noghin, 1997] Noghin V.D. Relative importance of criteria: a quantitative approach // J. Multi-Criteria Decision Analysis, 1997 No 6, P. 355-363.

[Захаров, 2011] Захаров А.О. Сужение множества Парето на основе взаимно зависимой информации замкнутого типа // Искусственный интеллект и принятие решений, 2011, № 1. С. 95-109.

[Климова & Ногин, 2006] Климова О.Н., Ногин В.Д. Учёт взаимно зависимой информации об относительной важности критериев в процессе принятия решений // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2006, Т. 46, № 7. С. 2179-2191.

[Ногин & Басков, 2011] Ногин В.Д., Басков О.В. Сужение множества Парето на основе учёта произвольного конечного набора числовой информации об отношении предпочтения // Доклады Академии Наук РФ (информатика), 2011, Т. 438, № 4, С. 1-4.

[Ногин, 1983] Ногин В.Д. Оценки для множества оптимальных решений в условиях отношения предпочтения, инвариантного относительно линейного положительного преобразования. - Тезисы докладов на IV Всесоюзном семинаре по исследованию операций и системному анализу «Принятие решений в условиях многокритериальности и неопределённости», М.− Батуми, 1983, С. 37.

[Ногин, 2005] Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход (2-е изд., исправленное и дополненное). М.: Физматлит, 2005, 176 С.

[Ногин, 2008] Ногин В.Д. Проблема сужения множества Парето: подходы к решению // Искусственный интеллект и принятие решений, 2008, № 1. С. 98-112.

[Ногин, 2009] Ногин В.Д. Сужение множества Парето на основе информации о предпочтениях ЛПР точечно-множественного типа // Искусственный интеллект и принятие решений, 2009, № 5, С. 1-16.

[Ногин, 2010] Ногин В.Д. Сужение множества Парето на основе информации о предпочтениях ЛПР множественно-точечного типа // Искусственный интеллект и принятие решений, 2010, № 2, С. 54-63.

[Ногин, 2013] Ногин В.Д. Алгоритм сужения множества Парето на основе произвольного конечного набора «квантов» числовой информации//Искусственный интеллект и принятие решений, 2013 № 1, С. 63-69.

Информация об авторе

Владимир Ногин *– профессор Санкт-Петербургского государственного университета, Санкт-Петербург, 198504, Петродворец, Университетский пр. 35, Россия; e-mail: noghin@gmail.com, web-page: http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/nogin/*

Основная область научных интересов*: принятие решений при многих критериях, многокритериальная оптимизация*

Generalized Axiomatic Approach to the Pareto Set Narrowing

Vladimir Noghin

Abstract: *An axiomatic approach to solve the problem of narrowing the Pareto set based on some numerical information regarding preferences of the decision maker is considered. This approach has been developed by the author since 1983. It requires the acceptance of certain four axioms of "reasonable" behavior of the Decision Maker during the decision making process. It is assumed that in addition to the axioms some information regarding the Decision Maker’s preferences (the so-called "quanta" of information) is known. Using this information it is possible to reduce the Pareto set and thereby facilitate subsequent selection of solutions. We analyze a class of multicriteria choice problems for which this approach can be applied, as well as discuss of possible directions for its generalization.*

Key words: *Pareto set, multicriteria choice, Pareto set reducing*