ДИНАМИЧЕСКИЙ МЕЖОТРАСЛЕВОЙ БАЛАНС С ОПЕРЕЖАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ (ДИСКРЕТНЫЙ СЛУЧАЙ)

Игорь Ляшенко, Юрий Тадеев

***Аннотация**: В данной работе предложена дискретная модель динамического межотраслевого баланса с опережающим аргументом, которая учитывает временной лаг строительства и ввод новых производственных мощностей. Получено неотрицательное общее решение разностного уравнения с опережающим аргументом. Построена магистральная траектория. Проведен двойственный анализ модели на основе двух гипотез (статической и динамической) о балансе стоимостей системы "потребление-производство".*

***Ключевые слова**: динамический межотраслевой баланс, прямая и двойственная модели, магистральная траектория.*

***ACM Classification Keywords**: H.1 Models and Principles*

Постановка задачи и построение модели

Межотраслевая модель Леонтьева „затраты–выпуск" стала основой для разнообразных исследований так называемой линейной экономики [Leontief, 1966].

Статическая межотраслевая модель Леонтьева имеет вид

$$x = Ax + y, \quad y > 0, \quad x \geq 0, \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – вектор-столбец полного выпуска продукции, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ – вектор-столбец конечной продукции, $A = (a_{ij})_1^n \geq 0$ – матрица коэффициентов прямых производственных затрат.

Как известно, конечный продукт y состоит из двух основных частей (потребление c и сбережение s):

$$y = c + s.$$

Если сбережения используются на расширение производства, то этот процесс описывается динамической межотраслевой моделью Леонтьева „затраты-выпуск" с дискретным временем:

$$x(t) = Ax(t) + B\left[x(t) - x(t-1)\right] + c(t), \quad c(t) \geq 0, \quad x(t) \geq x(t-1), \quad t = 1,2,\ldots, \tag{2}$$

где t – дискретное время, $B = (b_{ij})_1^n \geq 0$ – матрица фондоемкости продукции.

С математической точки зрения модель (2) является системой линейных неоднородных разностных уравнений первого порядка. С экономической точки зрения модель (2) имеет существенный недостаток: здесь строительство и ввод в действие новых мощностей $x(t) - x(t-1) \geq 0$ осуществляется в течении одного временного периода, более того – затраты на создание новых мощностей компенсируются продукцией этих же мощностей, что совсем не соответствует действительности. В реальности между заказом и введением в строй новых мощностей проходит некоторое время $\tau > 1$, τ – целое число, – лаг

строительства. При этом строительство финансируется непрерывно в виде части имеющейся конечной продукции.

Если предположить, что финансы (материалы, ресурсы) выделяются полностью в начале строительства (то есть заказ финансируется сразу же), то вместо уравнения (2) будем иметь такое соотношение:

$$x(t) = Ax(t) + B\left[x(t+\tau) - x(t)\right] + c(t), \quad c(t) \geq 0, \quad t = 1,2,\ldots \tag{3}$$

Поскольку уравнение (3) связывает дискретные моменты времени t и $t+\tau$, то для нахождения траектории $x(t)$ при $t = 1,2,\ldots$ необходимы начальные условия

$$x(t) = a_0(t) \quad \text{при} \quad -\tau \leq t < 0, \tag{4}$$

где $a_0(t)$ – заданная функция дискретного аргумента.

Исследование модели

В данной работе не исследуются вопросы, связанные с решением соответствующей задачи Коши, а ставится задача построения магистральной траектории уравнения (3), что не связывается с использованием начальных условий (4).

В дальнейшем под магистральной траекторией будем понимать траекторию максимального сбалансированного экспоненциального роста среди всех возможных решений уравнения (3).

Исследование проведем в два этапа: сначала исследуется прямая модель, затем исследуется соответствующая двойственная модель.

1^0. Для нахождения магистральных траекторий необходимо вначале найти общее решение неоднородного линейного разностного уравнения (3).

Общее решение уравнения (3) ищем в виде суммы общего решения однородного уравнения

$$x(t) = Ax(t) + B\left[x(t+\tau) - x(t)\right], \quad x(t) \geq 0, \tag{5}$$

и частного решения неоднородного уравнения (3).

Общее решение однородного разностного уравнения (5) ищем в виде геометрической прогрессии по времени вида $z\lambda^t$, где $z \geq 0$ – некоторый вектор-столбец. При $z \neq 0$ из (5) получаем

$$z = Az + \left(\lambda^\tau - 1\right)Bz \tag{6}$$

или

$$\left(I - A - \mu B\right)z = 0, \tag{7}$$

где

$$\mu = \lambda^\tau - 1, \tag{8}$$

а I – единичная матрица соответствующей размерности.

Матрицу коэффициентов прямых производственных затрат A будем считать продуктивной, то есть такой, что $\left(I - A\right)^{-1} \geq 0$ [Intriligator, 1987]. Это условие является необходимым и достаточным для существования неотрицательного решения уравнения (1) при условии $y > 0$.

После умножения уравнения (7) слева на матрицу $\left(I - A\right)^{-1} \geq 0$ получим

$$\left(I - \mu\left(I - A\right)^{-1}B\right)z = 0. \tag{9}$$

Как следует из (9), случай $\mu = 0$ отвечает случаю $z \equiv 0$, что является неподходящим для поиска магистральных траекторий. Итак, пусть $\mu \neq 0$. Тогда (9) можем переписать в виде

$$\left(\left(I - A\right)^{-1} B - \mu^{-1} I\right) z = 0. \tag{10}$$

Итак, μ^{-1} является собственным числом матрицы $\left(I - A\right)^{-1} B \geq 0$. Таких собственных чисел n, включая кратные и комплексные числа. Но среди них есть единственное число, которому отвечает неотрицательный собственный вектор [Intriligator, 1987]. Это корень Фробениуса $\lambda_{(I-A)^{-1}B} > 0$ и правый вектор Фробениуса $x_{(I-A)^{-1}B} \geq 0$, который будет строго положительным только для неразложимой матрицы $\left(I - A\right)^{-1} B$.

Итак, претендентом на магистральную траекторию однородного уравнения (5) является $z\lambda^t$, где z – правый вектор Фробениуса матрицы $\left(I - A\right)^{-1} B \geq 0$, а λ – корень уравнения

$$\lambda^{\tau} - 1 = \lambda^{-1}_{(I-A)^{-1}B}. \tag{11}$$

Отсюда получаем

$$\lambda = \left(1 + \lambda^{-1}_{(I-A)^{-1}B}\right)^{1/\tau}. \tag{12}$$

Остается теперь найти неотрицательное частное решение неоднородного уравнения (3). Это частное решение ищем, как и для обычных разностных уравнений, в зависимости от вида свободного члена $c(t)$. Если вектор-функция $c(t)$ имеет аналитическое выражение, например является возрастающей геометрической прогрессии во времени, то и частное решение ищется в таком же виде. Для отыскания магистрали рассмотрим

$$c(t) = c_0 s^t, \quad c_0 \geq 0, \quad s > 1, \tag{13}$$

где s – некоторое число.

Тогда ищем частое решение в виде

$$x(t) = z_0 s^t, \quad t = 0,1,2,\ldots, \tag{14}$$

где $z_0 \geq 0$ – искомый вектор-столбец.

После подстановки выражений (13) и (14) в (3) и сокращения на $s^t > 1$ получаем

$$z_0 = A z_0 + \left(s^{\tau} - 1\right) B z_0 + c_0$$

или

$$\left(I - A - \nu B\right) z_0 = c_0, \tag{15}$$

где

$$\nu = s^{\tau} - 1 > 0. \tag{16}$$

После умножения уравнения (15) слева на матрицу $\left(I - A\right)^{-1} \geq 0$ получим

$$\left(I - \nu \left(I - A\right)^{-1} B\right) z_0 = \left(I - A\right)^{-1} c_0. \tag{17}$$

Чтобы получить решение z_0 в виде

$$z_0 = \left(I - \nu \left(I - A\right)^{-1} B\right)^{-1} \left(I - A\right)^{-1} c_0 \tag{18}$$

нужно, чтобы матрица $\nu\left(I-A\right)^{-1}B\geq 0$ была продуктивной, то есть, чтобы выполнялось неравенство [Intriligator, 1987]:

$$0<\nu\lambda_{(I-A)^{-1}B}<1.$$

Итак, получаем условие существования неотрицательного решения неоднородного уравнения (3) в виде

$$s^{\tau}-1<\lambda^{-1}_{(I-A)^{-1}B}, \tag{19}$$

откуда

$$s<\left(1+\lambda^{-1}_{(I-A)^{-1}B}\right)^{1/\tau}=\lambda. \tag{20}$$

Таким образом, магистральная траектория неоднородного разностного уравнения с опережающим аргументом как траектория максимального сбалансированного экспоненциального роста определяется правым вектор Фробениуса матрицы $\left(I-A\right)^{-1}B\geq 0$ и темпом роста λ, что является единственным корнем уравнения (11).

Рассматривая λ как функцию параметра τ, приходим из (12) к выводу, что $\lambda\left(\tau\right)$ является монотонно убывающей функцией, причем

$$\lambda\left(1\right)=1+\lambda^{-1}_{(I-A)^{-1}B}. \tag{21}$$

Как следует из (12), задержка строительства новых мощностей $\tau>1$ приводит к уменьшению темпа роста магистральных траекторий. Вместе с тем ярко высвечивается положительная роль частного инвестирования в экономику, поскольку осуществление только государственного инвестирования приводит к замедлению темпа экономического роста страны.

Как числовой пример, рассмотрим одноотраслевую экономику ($n=1$), для которой $A=0,5$ и $B=10$. Тогда $\left(I-A\right)^{-1}B=20$, следовательно $\lambda^{-1}_{(I-A)^{-1}B}=0,05$ и согласно (12) получаем $\lambda\left(\tau\right)=\sqrt[\tau]{1,05}\approx 1+\dfrac{0,05}{\tau}$. В частности, $\lambda\left(5\right)=1,01$. Это свидетельствует о том, что стране без частного инвестирования очень трудно поддерживать экономический рост.

2^0. Проведем двойственный анализ модели динамического межотраслевого баланса с опережающим аргументом и дискретным временем.

Пусть $p\left(t\right)=\left(p_1\left(t\right),p_2\left(t\right),...,p_n\left(t\right)\right)$ – вектор-строка стоимостей продукции. После умножения соотношения (3) слева на вектор $p\left(t\right)\geq 0$ получим стоимостный баланс на момент времени t:

$$p\left(t\right)x\left(t\right)=p\left(t\right)Ax\left(t\right)+p\left(t\right)B\left[x\left(t+\tau\right)-x\left(t\right)\right]+p\left(t\right)c\left(t\right),\quad t=0,1,2,... \tag{22}$$

Классическая статичная гипотеза о балансе стоимостей системы „потребление-производство" имеет вид

$$p\left(t\right)c\left(t\right)=r\left(t\right)x\left(t\right),\quad t=0,1,2,.... \tag{23}$$

Здесь $r\left(t\right)=\left(r_1\left(t\right),r_2\left(t\right),...,r_n\left(t\right)\right)$ – вектор-строка коэффициентов дополненной стоимостей продукции $x\left(t\right)$, а величина $p\left(t\right)B\left[x\left(t+\tau\right)-x\left(t\right)\right]$ – сегодняшняя стоимость запланированного нового производства.

Предлагаемая нами дополнительная динамическая гипотеза

$$p\left(t\right)B\left[x\left(t+\tau\right)-x\left(t\right)\right]=\left[p\left(t+\tau\right)-p\left(t\right)\right]Bx\left(t\right) \tag{24}$$

гласит, что стоимость будущего нового производства компенсируется плановым поднятием цены продукции.

С учетом гипотез (23) и (24) из балансового соотношения (22) получаем стоимостный баланс системы „потребление-производство" в таком виде

$$p(t)x(t) = p(t)Ax(t) + \left[p(t+\tau) - p(t)\right]Bx(t) + r(t)x(t), \quad t = 0,1,2,... \tag{25}$$

или

$$\left[p(t) - p(t)A - \left(p(t+\tau) - p(t)\right)B - r(t)\right]x(t) = 0, \quad t = 0,1,2,... \tag{26}$$

Поскольку равенство (26) должно выполняться при любых $x(t) > 0$, то это возможно лишь в случае, когда выполняется соотношение

$$p(t) = p(t)A + \left(p(t+\tau) - p(t)\right)B + r(t), \quad r(t) > 0, \quad p(t) \geq 0. \tag{27}$$

Это динамическая модель цен. Полученная модель (27) имеет вид, аналогичный основной модели (3). Поэтому построение магистральной траектории модели (27) проводится аналогично, как это сделано для модели (3).

Приходим к выводу, что темп роста цен (инфляция) определяется через корень Фробениуса матрицы $B(I-A)^{-1} \geq 0$, что совпадает с корнем Фробениуса матрицы $(I-A)^{-1}B \geq 0$. Таким образом, темп роста производства совпадает с темпом инфляции продукции, что является реалистичным и считается нормальным для здоровой экономики.

Луч Неймана, который определяет магистральную траекторию для цен, является левым вектором Фробениуса матрицы $B(I-A)^{-1} \geq 0$.

Выводы

Таким образом, в данной работе представлена модель динамического межотраслевого баланса в разностной форме, которая учитывает временной лаг строительства и введения новых производственных мощностей. Установлено существование единственной магистральной траектории как траектории максимального сбалансированного экспоненциального роста. На основе предложенных двух гипотез о балансе стоимостей системы „потребление-производство" проведен двойственный анализ динамической разностной модели с опережающим аргументом. Установлено, что на магистрали темпы роста производства и повышения цены продукции совпадают, а сами траектории выражаются через правый и левый векторы Фробениуса. Полученные магистральные траектории целесообразно использовать для стратегического планирования экономического развития.

Примечание

Результаты настоящей работы могут быть обобщены на случай заданного графика строительства и ввода новых производственных мощностей. Так, если на протяжении периода $[1,\tau]$ ввод в строй производства планируется в виде пропорции приростов мощностей $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\tau)$, где $\alpha_k \geq 0, \quad k = 1,2,...,\tau, \quad \sum_{k=1}^{\tau} \alpha_k = 1$, то полный ввод мощностей составит величину

$$\sum_{k=1}^{\tau} \alpha_k \left[x(t+k) - x(t)\right] = \sum_{k=1}^{\tau} \alpha_k x(t+k) - x(t).$$

В этом случае уравнение (3) преобразуется к виду

$$x(t) = Ax(t) + B\left[\sum_{k=1}^{\tau} \alpha_k x(t+k) - x(t)\right] + c(t), \quad t = 0,1,2,\ldots, \tag{28}$$

уравнения (7)–(8) для определения темпа роста магистральной траектории принимают вид

$$(I - A - \mu B)z = 0, \tag{29}$$

$$\mu = \sum_{k=1}^{\tau} \alpha_k \lambda^k - 1, \tag{30}$$

а уравнение (11) имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\tau} \alpha_k \lambda^k = 1 + \lambda^{-1}_{(I-A)^{-1}B}. \tag{31}$$

Поскольку $\alpha_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{\tau} \alpha_k = 1$, то уравнение (31) имеет единственное решение $\lambda > 1$.

Библиография

[Leontief, 1966] Leontief W. Input-Output Economics. – Oxford University Press, New York, 1966.

[Intriligator, 1987] Intriligator M. Mathematical Optimization and Economic Theory. – Society for Industrial & Applied Mathematics, U.S., 1987.

Информация об авторах



Игорь Ляшенко *– доктор физико-математических наук, профессор, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина, 01017 Киев, ул. Владимирская 64, e-mail: lyashenko@univ.kiev.ua*

Сфера научных интересов: математическая экономика, эколого-экономическое моделирование, математическая биология



Юрий Тадеев *– кандидат экономических наук, доцент, докторант, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина, 01017 Киев, ул. Владимирская 64, e-mail: ytadeyev@gmail.com*

Сфера научных интересов: математическая экономика, моделирование экономического роста

Dynamic inter-branch balance with advanced argument (the discrete case)

Igor Lyashenko, Yuriy Tadeev

Abstract*: In this paper, we propose a discrete model of the dynamic inter-branch balance with advanced argument, which takes into account the time lag of construction and commissioning of new capacities. General nonnegative solution of the difference equation with advanced argument is obtained. Dual analysis of the model based on two hypotheses (static and dynamic) of the costs' balance of system "production - consumption " has been provided.*

Keywords*: Dynamic inter-branch balance, primal and dual models*