ЭКСПЕРТНЫЕ МОДЕЛИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Альберт Воронин

Аннотация. *Предложен подход к решению задачи векторной оптимизации сложных технических и экономических систем в тех случаях, когда недостаточны (или отсутствуют) сведения об экспериментально-статистических данных, необходимых для построения регрессионных моделей. Для решения рассматриваемой проблемы предпринимается подход многокритериальной оптимизации с применением нелинейной схемы компромиссов. Приведен модельный пример.*

***Ключевые слова**: векторная оптимизация, регрессионные модели, метод экспертных оценок, аппроксимационные полиномы, метод наименьших квадратов, нелинейная схема компромиссов.*

***ACM Classification Keywords**: H.1 Models and Principles – H.1.1 – Systems and Information Theory; H.4.2 – Types of Systems.*

Содержание проблемы

При оптимизации сложных технических и экономических систем часто приходится сталкиваться с тем, что для построения необходимых математических моделей не хватает экспериментально-статистических данных. Положение усугубляется в том случае, когда оптимизация осуществляется по нескольким противоречивым критериям качества.

В условиях острой нехватки экспериментальных данных мы предлагаем получать необходимую информацию («квазиэкспериментальные» данные) от экспертов — специалистов, имеющих достаточный опыт в проектировании и эксплуатации сложных систем рассматриваемого класса.

Исследование проводится на примере векторной оптимизации объектов космической деятельности по обобщенному критерию “надежность-стоимость”, но результаты легко могут быть использованы и в других предметных областях. Под термином "надежность" будем понимать вероятность нахождения определяющих параметров всех элементов объекта в допустимых по условиям работоспособности пределах.

Необходимо учитывать, что в данном случае речь идет о проектировании принципиально новой техники, для которой технико-экономические показатели существенно отличаются от тех, с какими имели дело раньше или работают сейчас разработчики. Одним из специфических аспектов является крайняя ограниченность (а иногда и полное отсутствие) экспериментально-статистических данных, по которым можно было бы определять математические модели надежности и стоимости.

В этих трудноформализуемых условиях приходится прибегать к нетрадиционным подходам, один из которых рассматривается в настоящей работе. Естественно, что в данном случае речь может идти лишь о прикидочных расчетах, об ориентировочном определении основных тенденций при выборе факторов, влияющих на надежность и стоимость разрабатываемых объектов космической деятельности.

Постановка задачи

Для решения задачи оптимизации необходимо иметь следующие отправные данные.

1. Математические модели:

$$y_1' = f_1(x);$$
$$y_2 = f_2(x),$$

где y_1' – надежность объекта космической деятельности (критерий, подлежащий максимизации); y_2 – стоимость мероприятий, от которых зависит надежность (критерий, подлежащий минимизации); f_1 и f_2

– некоторые критериальные функции; $x = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ – *n*-мерный вектор независимых переменных (аргументы оптимизации).

2. Ограничения по независимым переменным $x \in X$, где

$$X = \{x \left| x_{i\min} \le x_i \le x_{i\max,}\ i \in [1, n] \right.\}.$$

3. Ограничения по критериям $y \in M$, где $y = \{y_k\}_{k=1}^{s}$ – *s*-мерный вектор минимизируемых неотрицательных критериев (в нашем случае *s*=2). Поясним, что в качестве единого способа экстремизации критериев в нашей задаче выбрана минимизация. Чтобы критерий по характеристике надежности сделать тоже минимизируемым, определим

$$y_1 = 1 - y_1^{'}$$

(если стопроцентная надежность выражается единицей). Тогда

$$M = \{y \left| 0 \le y_k \le A_k, k \in [1;2] \right.\}.$$

Ограничения $x_{i\min}, x_{i\max}$ по аргументам $x \in X$ и A_k по критериям $y \in M$ задаются исходя из физических соображений.

Если всё это есть, то имеются все предпосылки для оптимизации космических объектов по критериям надежности и стоимости, т.е. для определения компромиссно-оптимальных значений параметров $x^* = \{x^*_i\}_{i=1}^{n}$.

Метод решения

Ввиду очевидной противоречивости критериев, необходимо прибегнуть к специфическим методам теории многокритериальной (векторной) оптимизации. Если используется способ скалярной свертки, то математически модель решения задачи векторной оптимизации представляется в виде

$$x^* = \arg\min_{x \in X} Y[y(x)], \tag{1}$$

где $Y(y)$ – скалярная функция, имеющая смысл скалярной свертки вектора частных критериев, вид которой зависит от выбранной схемы компромиссов. При этом нужно убедиться, что ее минимизация приводит к парето-оптимальному решению: $x^* \in X^K$. В работах [1,2] предложена скалярная свертка по нелинейной схеме компромиссов

$$Y[y(x)] = \sum_{k=1}^{s} A_k [A_k - y_k(x)]^{-1}, \tag{2}$$

где *s* – размерность вектора критериев. Свертка (2) дает возможность формализовано получать парето-оптимальные решения, адекватные заданным ситуациям. При *s*=2 модель (1) имеет вид

$$x^* = \arg\min_{x \in X} [\frac{A_1}{A_1 - y_1(x)} + \frac{A_2}{A_2 - y_2(x)}]. \tag{3}$$

Качественный состав вектора x достаточно разнообразен и, соответственно, размерность *n* этого вектора в общем случае велика. Полный учет параметров x привел бы к неоправданному усложнению критериальных функций f_1 и f_2 и к чрезмерным трудностям решения оптимизационной задачи. Поэтому естественным является выбор только наиболее информативных параметров x – координат пространства, в котором будет осуществляться оптимизация критериев y_1 и y_2, в то время как остальные параметры считаются фиксированными и заданными.

Выбор будем выполнять с привлечением экспертов. Их знакомят с условиями задачи, т.е. называют конкретный тип разрабатываемого космического объекта (ракета-носитель или космический аппарат), описывают условия его проектирования, производства, испытаний и эксплуатации. Экспертов просят записать те мероприятия, которые, по их мнению, могут влиять на надежность и стоимость данного космического объекта на разных стадиях жизненного цикла изделия.

Это, например, кратность резервирования систем управления x_1, значения коэффициентов запаса по прочности конструкции x_2 и по мощности энергоисточников x_3; относительный объем входного контроля материалов и комплектующих x_4, подбор технологий производства и относительный объем контроля их стабильности x_5, объем проведения контрольно-выборочных испытаний x_6; объем экспериментальной отработки элементов и систем во всех режимах x_7, величина материального стимулирования персонала x_8 и пр. В результате специальной процедуры [1] определяется адекватный качественный состав и размерность n вектора независимых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ критериальных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Вид критериальных функций зависит от того, какими сведениями располагает исследователь для построения модели. Спектр широк – от полного знания механизмов явлений (детерминированная модель) до полной неопределенности ("черный ящик"). Между этими информационными полюсами находится вероятностный уровень неопределенности. Детерминированную математическую модель $f(x)$ любой характеристики объекта космической деятельности разработать крайне затруднительно ввиду сложности происходящих физических процессов и реакций объекта на комплекс внутренних и внешних факторов.

Рассмотрим, например, критериальную функцию надежности $f_1(x)$ и аппроксимируем ее на множестве аргументов $x \in X$ некоторой приближающей функцией $F_1(x,a)$, известной с точностью до вектора констант (коэффициентов) $a = \{a_j\}_{j=1}^{m}$.

При выборе вида функции $F_1(x,a)$ нужно иметь в виду следующее. Установлено [1], что наилучшие результаты получаются, если регрессионная модель строится на основе некоторой известной информации о механизмах исследуемых явлений. Тогда модель называется содержательной. Если же такой информации нет, то приходится работать в классе формальных регрессионных моделей и расплачиваться за отсутствие информации большим объемом вычислений.

К формальной модели предъявляются два противоречивых требования. С одной стороны, приближающая функция должна быть достаточно простой, чтобы процессы вычислений не оказались чрезмерно громоздкими. С другой стороны, аппроксимирующая зависимость должна обладать достаточными прогностическими и точностными свойствами. В большинстве практических случаев оба эти требования выполняются в классе регрессионных полиномов второго порядка:

$$F_1(x,a) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i,j=1, i<j}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{4}$$

где a_0, a_1, a_{ij} – коэффициенты. Функция (4) достаточно хорошо адаптируется к топографии целевой функции $f_1(x)$, она способна выражать такие особенности, как овражность и пр. На практике используются различные усечения регрессионного полинома (4), главным образом, линейные приближения.

Определение коэффициентов a может быть выполнено как методами интерполяции, так и по методу наименьших квадратов (МНК). Интерполяционные формулы предусматривают точное совпадение приближающей и целевой функций в опорных точках (узлах интерполяции), количество которых N, как и количество неизвестных констант a, равно m. Коэффициенты a определяются решением определенной системы уравнений для критерия надежности

$$F_1(x^{(u)}, a) = f_1(x^{(u)}), u \in [1, N = m], \tag{5}$$

где $x^{(u)}$ – узлы интерполяции.

Предполагается, что значения целевой функции в узлах аппроксимации $f_1(x^{(u)}), u \in [1, N]$ известны. Определение этих значений с помощью экспертов является ключевым моментом в настоящей работе и рассматривается ниже.

МНК предусматривает N опорных точек (узлов аппроксимации), причем число N может быть больше, меньше или равно (как частный случай) количеству констант m. Неизвестные коэффициенты приближающей функции определяются из условия

$$E(a) = \sum_{u=1}^{N} [F_1(x^{(u)}, a) - f_1(x^{(u)})]^2 = \min_a . \quad (6)$$

Используя необходимое условие минимума функции, получим называемую в теории МНК систему *нормальных* уравнений для критерия надежности

$$\frac{\partial E(a)}{\partial a_j} = 0, j \in [1, m], \quad (7)$$

решение которой определяет коэффициенты аппроксимирующей функции. Обратим внимание, что независимо от числа выбираемых опорных точек N система нормальных уравнений (7) всегда является определенной.

Для критерия стоимости $f_2(x)$ справедливы все вышеизложенные соображения, но вместо $a = \{a_j\}_{j=1}^m$ в выражении аппроксимирующей функции $F_2(x, b)$ в общем случае фигурирует другой вектор неизвестных констант $b = \{b_h\}_{h=1}^p$.

Спецификой рассматриваемой задачи является то, что получить значения целевых функций в опорных точках очень затруднительно. Действительно, даже для той одной точки, которая соответствует сложившемуся к настоящему времени комплексу мер по обеспечению надежности уже разработанного космического объекта данного класса, нет достаточной статистики для уверенной оценки уровня надежности. Это особенно относится ко вновь разрабатываемым объектам, не имеющим длительного периода эксплуатации. И уж совсем иллюзорны возможности объективной оценки надежности для других точек области существования аргументов оптимизации x $\in$X.

Как всегда в тех случаях, когда задача трудноформализуема, приходится прибегать к методам экспертных оценок. Квалифицированный специалист (эксперт), имеющий достаточный опыт в проектировании, производстве и эксплуатации объектов данного класса, может произвести **мысленный эксперимент** и представить себе, какими будут уровни надежности объекта при различных сочетаниях факторов x $\in$X. Таким образом, в основе метода лежит индивидуальное мнение (постулат), высказываемое специалистом-экспертом об оцениваемой величине, исходя из своего профессионального опыта. Основным недостатком постулирования является субъективность и возможность произвола.

Процедура метода обработки экспертных оценок позволяет уменьшить этот недостаток. Метод заключается в том, что для оценки некоторой количественной характеристики используются постулаты не одного, а нескольких лиц, компетентных в данном вопросе. Предполагается, что "истинное" значение неизвестной нам количественной характеристики находится внутри диапазона оценок экспертов и "обобщенное" коллективное мнение является более достоверным. В работе [1] предложена процедура обработки данных экспертных оценок, в ходе которой получаются уточненные агрегированные оценки, а также (как сопутствующий продукт) коэффициенты доверия к мнению отдельных экспертов.

Применив этот метод к обработке экспертных оценок надежности и стоимости в каждой из N узловых точек области определения $x \in X$, получим два вектора оценок (квазиэкспериментальные данные):

$$\{f_1(x^{(u)})\}_{u=1}^N;$$
$$\{f_2(x^{(u)})\}_{u=1}^N,$$

которые служат основанием для определения векторов констант a и b по условию (5), если применяется способ интерполяции, или по условию (6)-(7), если применяется МНК. Так определяются математические регрессионные модели

$$y_1' = f_1(x) \approx F_1(x);$$
$$y_2 = f_2(x) \approx F_2(x),$$

которые участвуют в оптимизационной процедуре (3). Так как информация о целевых функциях в узловых точках области аппроксимации получена не экспериментально, а путем экспертного оценивания, то и модели $F_1(x)$, $F_2(x)$ называются *экспертными* регрессионными моделями.

Обсудим отдельно проблему выбора способа аппроксимации критериальных функций в заданных обстоятельствах. При различных усечениях регрессионного полинома (4) количество неизвестных констант, как правило, превышает то число N узлов аппроксимации, в которых эксперт может достаточно уверенно дать свою оценку величины критериальной функции. Поэтому, используя способ интерполяции, мы получим недоопределенную систему уравнений, в которой число уравнений меньше, чем число неизвестных констант.

Чтобы выйти из этого положения, следует применить метод наименьших квадратов, который в математике рассматривается как способ решения недоопределенных, переопределенных и определенных (как частный случай) систем уравнений. При этом решение может быть как аналитическим (по формулам (6)-(7)), так и численным, если функция невязок $E(a)$ имеет сложное выражение. В последнем случае используется, например, алгоритм Левенберга-Марквардта [3,4].

Иллюстрационный пример

Рассматривается задача оптимизации процесса разработки перспективной ракеты-носителя по обобщенному критерию «надежность-стоимость». С помощью экспертных процедур [1] выбраны и фиксированы значения факторов, влияющих на надежность изделия, кроме следующих трех (здесь и далее все числовые данные условны):

1. Кратность резервирования систем управления ракетой x_1, выбирается из возможного диапазона от одного до десяти: $x_1 \in [1;10]$;
2. Коэффициент запаса по прочности конструкции x_2, находится в диапазоне от одного до пяти: $x_2 \in [1;5]$;
3. Коэффициент материального стимулирования персонала фирмы-разработчика x_3, может выбираться из диапазона от одного до шести: $x_3 \in [1;6]$.

Требуется, используя противоречивые критерии надежности $y_1^{'} = f_1(x)$ и стоимости $y_2 = f_2(x)$, оценить компромиссно-оптимальные величины этих трех факторов: $x^* = \{x_i^*\}_{i=1}^{3}$.

Критериальную функцию надежности аппроксимируем линейным приближением со свободным членом

$$y_1^{'} = f_1(x) \approx F_1(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3,$$

число неизвестных констант $m = 4$.

При определении значений целевой функции в узлах аппроксимации $f_1(x^{(u)}), u \in [1, N]$ будем иметь в виду, что с достаточной степенью уверенности эксперты могут оценить эти значения только в трех (N=3) точках области $x \in X$:

$$x_1^{(1)} = x_{1\max} = 10; x_2^{(1)} = x_{2\max} = 5; x_3^{(1)} = x_{3\max} = 6;$$
$$x_1^{(2)} = x_{1\min} = 1; x_2^{(2)} = x_{2\min} = 1; x_3^{(2)} = x_{3\min} = 1;$$
$$x_1^{(3)} = x_{1\text{nom}} = 6; x_2^{(3)} = x_{2\text{nom}} = 3; x_3^{(3)} = x_{3\text{nom}} = 3.$$

Последняя точка соответствует представлениям экспертов о номинальных значениях факторов надежности.

Пусть эксперты дали следующие свои оценки уровней надежности изделия в указанных узлах аппроксимации (единица соответствует 100-процентной надежности):

$$f_1(x^{(1)}) = 0,8; f_1(x^{(2)}) = 0,6; f_1(x^{(3)}) = 0,7.$$

Отметим, что в данной задаче N<m и метод интерполяции применен быть не может. Метод МНК предусматривает минимизацию по неизвестным константам функции (6) квадратов невязок, которая при заданных условиях имеет вид

$$E(a) = (a_0 + 10a_1 + 5a_2 + 6a_3 - 0,8)^2 + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 - 0,6)^2 + (a_0 + 6a_1 + 3a_2 + 3a_3 - 0,7)^2.$$

Применение необходимого условия минимума функции (7) приводит к следующей определенной системе нормальных уравнений:

$$3a_0 + 17a_1 + 9a_2 + 10a_3 = 2,1;$$
$$17a_0 + 137a_1 + 69a_2 + 79a_3 = 12,8;$$
$$9a_0 + 69a_1 + 35a_2 + 40a_3 = 6,7;$$
$$10a_0 + 79a_1 + 40a_2 + 46a_3 = 7,5.$$

Это система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), для решения которой разработаны стандартные компьютерные программы. Метод последовательного исключения переменных Гаусса положен в основу программы on-line [5]. Формулы Крамера для решения СЛАУ используются в программе [6]. Применив метод Гаусса для решения нашей системы нормальных уравнений, получим значения неизвестных констант:

$$a_0 = 0,46; a_1 = -0,06; a_2 = 0,25; a_3 = -0,06.$$

Минимизируемый критерий по характеристике надежности определяется по формуле

$$y_1(x) = 1 - y_1'(x) \approx 0,54 + 0,06x_1 - 0,25x_2 + 0,06x_3$$

(имеется ввиду, что единица соответствует 100-процентной надежности изделия).

Аналогичный расчет проведем для критерия стоимости. Критериальную функцию стоимости аппроксимируем линейным приближением без свободного члена:

$$y_2(x) \approx F_2(x^{(u)}, b) = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3,$$

где b_1, b_2, b_3 – неизвестные константы (p=3). Оценку уровней стоимости эксперты дали в тех же узлах аппроксимации (N=3), что и в случае критерия надежности. Пусть эти оценки таковы:

$$f_2(x^{(1)}) = 1; f_2(x^{(2)}) = 0,3; f_2(x^{(3)}) = 0,6$$

(нормированное значение стоимости при максимальных факторах равно единице). Поскольку в данном случае p=N, то для определения констант можно использовать метод интерполяции. Уравнение (5) применительно к критерию стоимости преобразуется к виду

$$F_2(x^{(u)}, b) = f_2(x^{(u)}), u \in [1, N = p],$$

и с учетом числовых данных

$$10b_1 + 5b_2 + 6b_3 = 1;$$
$$b_1 + b_2 + b_3 = 0,3;$$
$$6b_1 + 3b_2 + 3b_3 = 0,6.$$

Решив эту СЛАУ методом Крамера [6], получим

$$b_1 = -0,1; b_2 = 0,3; b_3 = 0,1$$

и выражение для критерия стоимости имеет вид

$$y_2(x) \approx -0,1x_1 + 0,3x_2 + 0,1x_3.$$

Мы получили аналитические выражения критериев надежности и стоимости, что позволяет применить формулу (3) для определения компромиссно-оптимальных значений факторов x* с учетом очевидных ограничений $A_1 = A_2 = 1$:

$$x^* = \arg\min_{x \in X}\left(\frac{1}{1 - 0.54 - 0.06x_1 + 0.25x_2 - 0,06x_3} + \frac{1}{1 + 0,1x_1 - 0,3x_2 - 0,1x_3}\right).$$

Осуществив минимизацию скалярной свертки критериев по аргументам оптимизации методом Нелдера-Мида [1,2], получим

$$x_1^* = 9,99; x_2^* = 3,69; x_3^* = 1,01.$$

Для решения широкого спектра многокритериальных задач разработана программа TURBO-OPTIM [1].

Этот результат иллюстрационного примера можно трактовать следующим образом. При оптимизации разрабатываемой перспективной ракеты-носителя особое внимание следует обратить на резервирование систем управления изделием x_1. Коэффициент запаса по прочности конструкции нужно выбрать ориентировочно немного более середины диапазона $x_2 \in [1;5]$. Не следует возлагать особых надежд на возможности материального стимулирования персонала x_3.

Заключение

Таким образом, данное исследование дает возможность выявить основные тенденции при разработке и оптимизации новой космической техники. Предложенная методика позволила практически решить задачу векторной оптимизации процесса обязательного страхования разрабатываемых объектов космической деятельности [7].

Нужно отдавать себе отчет, что экспертные модели менее информативны, чем регрессионные модели, определенные с помощью реальных экспериментов. Однако, во-первых, экспертные оценки все же отражают, пусть и с возможными искажениями, реальную действительность, а, во-вторых, экспертные модели являются только начальными приближениями и по мере накопления статистических данных поддаются усовершенствованию.

Благодарности

Статья частично финансирована из проекта **ITHEA XXI** Института Информационных теорий и приложений FOI ITHEA и Консорциума FOI Bulgaria (www.ithea.org, www.foibg.com).

Библиография

1. Воронин А.Н., Зиатдинов Ю.К., Козлов А.И. Векторная оптимизация динамических систем. – Киев: Техніка, 1999. – 284 с.
2. Воронин А.Н. Нелинейная схема компромиссов в многокритериальных задачах оценивания и оптимизации // Кибернетика и системный анализ – 2009. – №4.– С. 106-114.
3. Levenberg K. A method for the solution of certain problems in least squares // Quart. Appl. Math., 1944, Vol. 2, pp. 164-168.
4. Marquardt D. An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters // SIAM J. Appl. Math., 1963, Vol. 11, pp. 431-441.
5. http://www.webmath.ru/web/prog13_1.php.
6. http://www.webmath.ru/web/prog12_1.php.
7. Воронин А.Н., Кириченко А.А., Козлов А.И. Регрессионная модель экспертных оценок «надежность-стоимость» в задачах векторной оптимизации страхования объектов космической деятельности // Проблемы управления и информатики – 1999. – №3. – С. 58-65.

Сведения об авторе

Воронин Альберт Николаевич *– профессор, доктор технических наук, профессор кафедры компьютерных информационных технологий Национального авиационного университета, проспект Комарова, 1, Киев-58, 03058 Украина; e-mail:* alnv@voliacable.com